गणित – 7
(Part – II)

1. ज्यामितीय जुड़वाँ

प्रश्नावली–1.1

1. दोनों V–आकार की आकृतियों में भुजाओं की लंबाई और उनके बीच के कोण अलग–अलग प्रतीत होते हैं। ट्रेसिंग पेपर से एक आकृति को दूसरे पर अध्यारोपित करने पर वे एक–दूसरे पर ठीक–ठीक नहीं बैठतीं। अत: दोनों आकृतियाँ सर्वांगसम नहीं हैं।

2. युग्म 1 (बूँद आकार)—दोनों आकृतियाँ समान आकार की हैं इसलिए सर्वांगसम होंगी।

युग्म 2 (बादल आकार)—दोनों आकृतियाँ समान आकार की नहीं हैं इसलिए सर्वांगसम नहीं होंगी।

युग्म 3 (तारा आकार)—दोनों आकृतियाँ अलग–अलग आकार की हैं इसलिए सर्वांगसम नहीं होंगी।

युग्म 4 (पंखुड़ी आकार)—दोनों आकृतियाँ समान आकार और आकृति की हैं इसलिए सर्वांगसम होंगी।

अत: युग्म 1 (बूँद) और युग्म 4 (पंखुड़ी) सर्वांगसम युग्म हैं।

3. (a) वृत्त के लिए—दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी त्रिज्याएँ बराबर हों।

(b) आयत के लिए—दो आयत सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी लंबाई और चौड़ाई दोनों बराबर हों।

4. सर्वप्रथम मुख्य आकृति को ट्रेसिंग पेपर पर उतारें और दूसरी आकृति के ऊपर रखें यदि दोनों पूरी तरह मेल खाती हैं तो वे सर्वांगसम हैं। विद्यार्थी स्वयं इसकी जाँच करें।

अभ्यास–1.1

1. हाँ, दोनों आकृतियाँ सर्वांगसम हैं।

कारण: दोनों आकृतियों को मापने पर माप समान प्राप्त होती हैं तथा एक–दूसरे की सटीक प्रतिलिपि प्रतीत होते हैं।

2. इस खंड में, हम दिए गये जोड़ों की तुलना यह देखने के लिए करते हैं कि क्या वे बिल्कुल मेल खाते हैं।

''त्रिभुज'': दिए गये त्रिभुजों का आकार और माप समान है इसलिए दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

''फूल/पत्ती'': दी गई फूल/पत्तियों का आकार और माप समान है इसलिए दोनों सर्वांगसम होंगी।

''सितारे'': दोनों आकृतियाँ समान आकार की हैं तथा एक-दूसरे की सटीक प्रतिलिपि प्रतीत होती हैं। इसलिए सर्वांगसम होंगी।

''बादल'': दोनों बादल की आकृतियाँ भिन्न-भिन्न आकार की हैं इसलिए सर्वांगसम नहीं होंगी।

3. सर्वांगसमता की अवधारणा का उपयोग करना:

(a) दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी त्रिज्या समान हो। इसलिए केवल त्रिज्या की माप महत्वपूर्ण है।

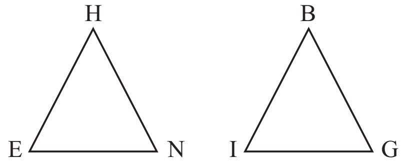
(b) दो आयत सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ बराबर हों। विशेष रूप से, पहले आयत की लंबाई दूसरे आयत की लंबाई के बराबर होनी चाहिए और पहले आयत की चौड़ाई दूसरे आयत की चौड़ाई के बराबर होनी चाहिए।

(c) इस तरह की विधि में अनियमित वक्र रेखाओं के लिए, जाँचने का सबसे अच्छा तरीका एक वक्र रेखा का प्रत्येक बिंदु दूसरी वक्र रेखा पर सटीक रूप से बैठता है, तो वे सर्वांगसम हैं। आप यह देखने के लिए ट्रेसिंग पेपर का भी उपयोग कर सकते हैं कि क्या आकृतियाँ पूरी तरह मेल खाती हैं। या नहीं, ट्रेसिंग पेपर की सहायता से हम देखते हैं कि दोनों आकृतियाँ समान नहीं हैं।

प्रश्नावली–1.2

1. दिया है: $\Delta HEN \cong \Delta BIG$

संगत शीर्ष बिंदु: $H \leftrightarrow B$, $E \leftrightarrow I$, $N \leftrightarrow G$



इसी संगतता को अलग–अलग शीर्ष बिंदु से शुरू करके लिख सकते हैं—

$\Delta ENH \cong \Delta IGB$
$\Delta NHE \cong \Delta GBI$
$\Delta HNE \cong \Delta BGI$
$\Delta EHN \cong \Delta IBG$
$\Delta NEH \cong \Delta GIB$

2. दिया है—ΔRED में,

RE = 3.5 सेमी,
ED = 5 सेमी,
RD = 6 सेमी

ΔJAM में,

JA = 3.5 सेमी,
AM = 5 सेमी,
JM = 6 सेमी

दोनों त्रिभुजों की भुजाओं की तुलना करने पर,

RE = JA = 3.5 सेमी
ED = AM = 5 सेमी
RD = JM = 6 सेमी

अत: हाँ, SSS शर्त द्वारा $\Delta RED \cong \Delta JAM$ हैं।

3. ΔABC और ΔADC में—

AC = AC (उभयनिष्ठ भुजा)

तीनों भुजाएँ बराबर हैं—इसलिए SSS शर्त पूरी होती है।

अत: $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

चूँकि $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

इनके संगत कोण बराबर हैं—

$\angle BAC \cong \angle DAC$

[CPCT शर्त द्वारा]

अत: AC, BAD को दो बराबर भागों में समद्विभाजित करता है।

$\angle BCA = \angle DCA$

[CPCT शर्त द्वारा]

अत: AC, $\angle BCD$ को दो बराबर भागों में समद्विभाजित करता है।

हाँ, AC दोनों कोण $\angle BAD$ और $\angle BCD$ को समद्विभाजित करता है।

4. ΔDFE और ΔDGE में

DF = DG (दिया गया)
FE = GE (दिया गया)
DE = DE (उभयनिष्ठ भुजा)

यहाँ तीनों भुजाएँ बराबर हैं इसलिए SSS शर्त पूरी होती है।

अत: हाँ, $\Delta DFE \cong \Delta DGE$ (SSS शर्त द्वारा) है।

अभ्यास–1.2

1. दिया है– *wxyz* एक समचतुर्भुज है जिसका विकर्ण *xz* है

(a) Δwxz और Δyxz में,

$wx = xy$

(समचतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं)

$wz = yz$

(समचतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं)

$xz = xz$ (उभयनिष्ठ भुजा)

SSS शर्त द्वारा,

$\Delta wxz \cong \Delta yxz$

(b) हाँ, रेखा *xz*, $\angle z$ और $\angle x$ को समद्विभाजित करती है।

कारण: चूँकि $\Delta wxz \cong \Delta yxz$ है, इसलिए उनके संगत भाग CPCT शर्त द्वारा बराबर होंगे।

अत: $\angle wxz = \angle yxz$

इसलिए *xz*, $\angle x$ को समद्विभाजित करती है

और $\angle wzx = \angle yzx$

इसलिए *xz*, $\angle z$ को समद्विभाजित करती है

2. ΔABM तथा ΔDCM में,

AM = DM (दिया है)
BM = CM (दिया है)
$\angle AMB = \angle DMC$

(शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं)

इसलिए, SAS (भुजा–कोण–भुजा) नियम से,

$\Delta ABM \cong \Delta DCM$

3. ΔDOG और ΔCAT में,

दिया है:

$$DO = CA = 5 \text{ सेमी}$$
$$\angle O = \angle A = 50^\circ$$
$$OG = AT = 6 \text{ सेमी}$$

शीर्षों की संगतता:

$$D \leftrightarrow C$$
$$O \leftrightarrow A$$
$$G \leftrightarrow T$$

अत: भुजा-कोण-भुजा (SAS) नियम से,

$$\Delta DOG \cong \Delta CAT$$

अत: दोनों त्रिकोण सर्वांगसम हैं।

प्रश्नावली–1.3

1. ΔABC और ΔXYZ में—

AB और XZ = 7 सेमी (दिया गया है)

BC = YZ = 5 सेमी (दिया गया है)

$$\angle B = \angle X = 47^\circ$$

(दोनों भुजाओं के बीच का कोण)

अत: SAS (भुजा-कोण-भुजा) नियम से,

$\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

अत: त्रिभुज सर्वांगसम है।

2. $CD \parallel AB$ है और AC एक तिर्यक रेखा है।

एकांतर कोण—

$$\angle OAB = \angle OCD$$

ΔABO और ΔCDO में—

AB = CD (दिया है।)

$$\angle OAB = \angle OCD$$

(एकांतर कोण, $CD \parallel AB$)

$$\angle BAO = \angle DCA$$

(एकांतर कोण, $AB \parallel CD$)

कोण-भुजा-कोण (ASA) नियम से,

संगत भागों के अनुसार—

BO = DO (CPCT द्वारा)

AO = OC (CPCT द्वारा)

$\angle AOB = \angle COD$

(शीर्षाभिमुख कोण)

3. ΔABC और ΔDBC में—

BC = BC (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ABC = \angle DBC$ (दिया है)

$\angle ACB = \angle DCB$ (दिया है)

दो कोण और एक अंतर्गत भुजा बराबर हैं—ASA शर्त पूरी होती है।

अत: $\Delta ABC \cong \Delta DBC$

सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण बराबर होते हैं—

$\angle BAC = \angle BDC$ (CPCT द्वारा)

अत: $\angle BAC = \angle BDC$

हाँ, ASA शर्त द्वारा $\Delta ABC \cong \Delta DBC$ हैं।

4. दिया है— $\angle ABD = \angle DCA$ तथा $\angle ACB = \angle DBC$

दोनों जोड़ने पर,

$$\angle ABD + \angle DBC = \angle DCA + \angle ACB$$
$$\angle ABC = \angle DCB$$

अब ΔABC तथा ΔDCB में

$\angle ACB = \angle DBC$ (दिया है)

BC = BC (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ABC = \angle DCB$

(ऊपर सिद्ध किया है)

कोण-भुजा-कोण (ASA) नियम से,

$$\Delta ABC \cong \Delta DCB$$

$\therefore$ ΔABC और ΔDCB दोनों त्रिभुज सर्वांगसम है अत:

AB = DC (CPCT से)

AC = DB (CPCT से)

अत: दोनों त्रिभुजों ΔABC तथा ΔDCB में AB और CD, AC और DB, कोण BAC और कोण CDB समान हैं।

अभ्यास–1.3

1. हाँ, दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं

शर्त: SAS (भुजा-कोण-भुजा)

$$AB = DE = 9 \text{ सेमी},$$
$$\angle B = \angle E = 55^\circ$$
$$BC = EF = 6 \text{ सेमी}$$

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS)

2. समांतर रेखाएँ $wx \parallel yz$

(a) एकांतर अंत: कोण

$$\angle zyo = \angle xwo$$
$$\angle yzo = \angle wxo$$

(एकांतर अंत: कोण होने के कारण ये सभी बराबर हैं)

(b) त्रिभुज Δwxo और Δyzo की सर्वांगसमता

$\angle xwo = \angle zyo$ (एकान्तर कोण)

$wx = yz$ (दिया है)

$\angle wxo = \angle yzo$ (एकान्तर कोण)

$\therefore \quad \Delta wxo \cong \Delta yzo$ (ASA द्वारा)

3. ΔADB और ΔCDB में,

$\angle ABD = \angle CBD$ (दिया है)

$BD = BD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ADB = \angle BDC$ (दिया है)

$\Delta ADB \cong \Delta CDB$ (ASA द्वारा)

$\angle DAB = \angle DCB$ (CPCT द्वारा)

सिद्ध करना है–AC = BD

दिया है: $\Delta ABC \cong \Delta DCB$

$AC = BD$ (CPCT द्वारा)

प्रश्नावली–1.4

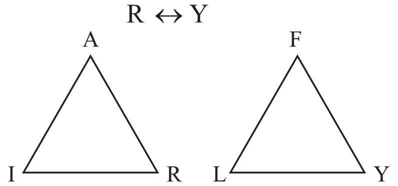
1. दिया है–$\Delta AIR \cong \Delta FLY$

ΔAIR और ΔFLY में संगतता पहचानने पर,

$A \leftrightarrow F$

$I \leftrightarrow L$

$R \leftrightarrow Y$



संगत शीर्ष बिंदु: A और F, I और L, R और Y

संगत भुजाएँ:

AI = FL

IR = LY

AR = FY

संगत कोण: $\angle A = \angle F$

$\angle I = \angle L$

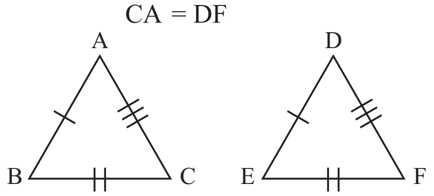
$\angle R = \angle Y$

2. दिया है–

(a) AB = DE

BC = EF

CA = DF



यहाँ तीनों भुजाएँ बराबर हैं SSS शर्त पूरी करते हैं।

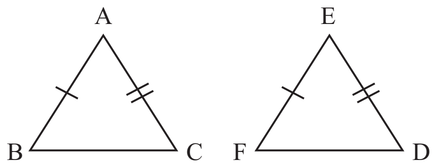
अत: हाँ, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ हैं।

(b) दिया है :

AB = EF

$\angle A = \angle E$

AC = ED



AB और AC दोनों $\angle$A पर मिलती हैं; EF और ED दोनों $\angle$E पर मिलती हैं।

दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण बराबर हैं इसलिए SAS शर्त को पूरी करते हैं।

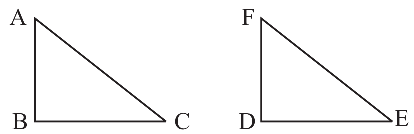
अत: हाँ, $\Delta ABC \cong \Delta EFD$

(c) दिया है–

AB = DF

$\angle B = \angle D = 90^\circ$

AC = FE

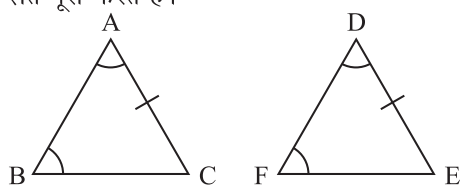


$\angle$B और $\angle$D दोनों समकोण हैं, कर्ण AC = FE, भुजा AB = DF (RHS शर्त)

अत: (c) हाँ, $\Delta ABC \cong \Delta DFE$ (RHS नियम द्वारा)

(d) दिया है– $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, AC = DF

दो कोण और एक भुजा बराबर हैं इसलिए AAS शर्त पूरी करते हैं।

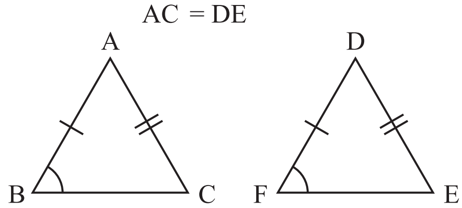


अत: हाँ, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ हैं।

(e) दिया है– AB = DF

$\angle B = \angle F$

AC = DE



दो भुजाएँ और एक बाह्य कोण—यह SSA स्थिति है।
SSA शर्त सर्वांगसमता की गारंटी नहीं देती।
अतः, नहीं, SSA शर्त से सर्वांगसमता निश्चित नहीं होती।

3. दिया है :

$OB = OC$

$OA = OD$

ΔAOB और ΔDOC में,

$OA = OD$ (दिया है)

$OB = OC$ (दिया है)

$\angle AOB = \angle \Delta DOC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

SAS शर्त के अनुसार,

$\Delta AOB \cong \Delta DOC$

CPCT नियम से,

$\angle OAB = \angle ODC$ (एकान्तर कोण)

AD एक तिर्यक रेखा है।
इसलिए, $AB \parallel CD$
सिद्ध हुआ।

4. दिया है : ABCD एक वर्ग है।
ΔABC और ΔADC में,

$AB = AD$ (वर्ग की भुजाएँ)

$BC = DC$ (वर्ग की भुजाएँ)

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ विकर्ण)

यहाँ SSS शर्त पूरी होती है।
अतः $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ (SSS शर्त द्वारा) सिद्ध हुआ।
उदाहरण लेने पर, क्या $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ हैं?
संगतता पहचानने पर,

$A \leftrightarrow C$

$B \leftrightarrow D$

$C \leftrightarrow A$

$AB = CD$

$BC = DA$

$AC = CA$

SSS शर्त द्वारा,
अतः हाँ, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ भी है।

5. दिया है : A वृत्त का केंद्र है, अतः $AB = AC$ = त्रिज्या
ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$
समद्विबाहु त्रिभुज में समान भुजाओं के सामने के कोण बराबर होते हैं—

$\angle B = \angle C$ ...(i)

त्रिभुज के कोणों का योग = 180^o

$\angle BAC + \angle B + \angle C = 180^o$

$120^o + \angle B + \angle B = 180^o$ ...(i) से

$2\angle B = 180^o - 120^o$

$2\angle B = 60^o = \angle B = 30^o$

अतः $\angle B = 30^o = \angle C = 30^o$

6. ΔCUR में,

$CU = CR$ (दिया है)

$\angle CUR = \angle CRU = x$ (माना)

$x + x + 90^o = 180^o$

$2x + 90^o = 180^o$

$2x = 180^o - 90^o$

$2x = 90^o$

$$x = \frac{90^o}{2} = 45^o$$

$\angle CRU = \angle CUR = 45^o$

ΔVRN में,

$VR = VN$

$\angle VRN = \angle VNR = x$ (माना)

$x + x + 68^\circ = 180^o$

$2x = 180^o - 68^\circ$

$$2x = \frac{112^o}{2} = 56^o$$

$\angle VRN = \angle VNR = 56^o$

ΔAUP में,

$AU = UP$

$\angle UAP = \angle UPA = 56^\circ$

$\therefore\ 56^\circ + 56^\circ + \angle AUP = 180^o$

$\angle AUP = 180^o - 112^\circ = 68^\circ$

ΔBOF एक समद्विबाहु त्रिभुज है
इसलिए $OB = OF = BF$

$\Rightarrow \angle FOB = \angle FBO = \angle OFB = 60^o$

$\angle RVN + \angle DVN = 180^o$ (रैखिक युग्म)

$68^\circ + \angle DVN = 180^o$

$\angle DVN = 180^o - 68^o = 112^o$

ΔDNV में,

$\angle VND + \angle VDN + \angle NVD = 180^o$

$VN = VD$

$\angle VND = \angle VDN = x$ (माना)

$x + x + \angle NVD = 180^\circ$

$2x + 112^\circ = 180^\circ$

$2x = 180^\circ - 112^\circ$

$2x = 68^\circ$

$\Rightarrow \quad x = \frac{68^\circ}{2} = 34^\circ$

ΔOLB में,

$\angle OBL = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\angle LOB = 60^\circ$

ΔOPN में,

$\angle OPN + \angle PON + \angle PNO = 180^\circ$

$\angle OPN + 56^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\angle OPN = 180^\circ - 146^\circ = 34^\circ$

अब, $\angle APK + \angle KPO + \angle OPN = 180^\circ$

$44^\circ + \angle KPO + 34^\circ = 180^\circ$

$\angle KPO = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ$

ΔKPO में,

$\angle KPO + \angle POK + \angle PKO = 180^\circ$

$102^\circ + 30^\circ + \angle PKO = 180^\circ$

$\angle PKO = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$

$\angle KAP + \angle KPA + \angle AKP = 180^\circ$

$34^\circ + 44^\circ + \angle AKP = 180^\circ$

$\angle AKP = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ$

और $\angle PKO = 48^\circ$

अब, $\angle AKP + \angle PKO + \angle OKL = 180^\circ$

$102^\circ + 48^\circ + \angle OKL = 180^\circ$

$150^\circ + \angle OKL = 180^\circ$

$\angle OKL = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

ΔKOL में,

$\angle OKL + \angle OLK + \angle KOL = 180^\circ$

$30^\circ + 90^\circ + \angle KOL = 180^\circ$

$\angle KOL = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\angle KOL = \angle BOL$

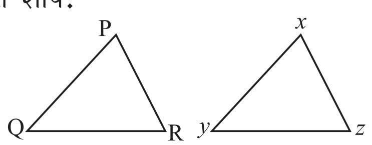
$KL = LB$

$\angle OLK \cong \angle OLB = 90^\circ$

अभ्यास–1.4

1. $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ के संगत भाग ज्ञात करने पर

संगत शीर्ष:



$P \leftrightarrow X$

$Q \leftrightarrow Y$

$R \leftrightarrow Z$

संगत कोण

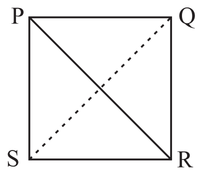
$\angle P = \angle X, \angle Q = \angle Y, \angle R = \angle Z$

संगत भुजाएँ

$PQ = XY$

$QR = YZ$

$PR = XZ$



2. वर्ग PQRS जिसमें विकर्ण PR है दर्शाने के लिए: $\Delta PQR \cong \Delta PSR$

$PQ = PS$

$QR = SR$

$PR = PR$

$\therefore \quad \Delta PQR \cong \Delta PSR$ (SSS द्वारा)

ΔPQS तथा ΔQRS में,

$PQ = SR$

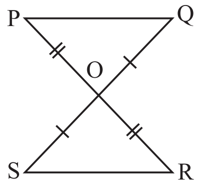
$PS = QR$

$SQ = QS$

अत: $\Delta PQS \cong \Delta QRS$ हैं।

3. सिद्ध करना है के लिए:

त्रिभुज PQO तथा RSO में,



$\Delta PQO \cong \Delta RSO$

$PO = OR$

$\angle POQ = \angle ROS$

$QO = SO$

$\therefore \quad \Delta PQO \cong \Delta RSO$ (SAS)

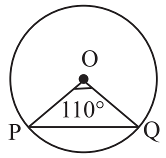
4. केंद्र O वाला वृत्त और $\angle POQ = 110^\circ$

$OP = OQ$

$\angle P = \angle Q$

$110^\circ + \angle P + \angle Q = 180^\circ$

$$2\angle P = 180° - 110°$$
$$2\angle P = 70°$$
$$\angle P = 35°$$



$$\angle Q = 35°$$

विविध प्रश्नावली

1. सर्वांगसम आकृतियाँ (Congruent figures)

2. कर्ण (Hypotenuse)।

3. SSS (भुजा–भुजा–भुजा) नियम।

4. 60°

5. SSS, SAS, ASA, AAS और RHS नियम सर्वांगसमता सुनिश्चित करते हैं।

6. दिया है कि $\Delta PQR \cong \Delta MNO$

(a) संगत शीर्ष (Corresponding vertices):
$P \leftrightarrow M \leftrightarrow Q \leftrightarrow N, R \leftrightarrow O$

(b) संगत भुजाओं का एक युग्म:
PQ = MN (या QR = NO या PR = MO)

(c) संगत कोणों का एक युग्म:
$\angle P = \angle M$ (या $\angle Q = \angle N$ या $\angle R = \angle O$)

7. त्रिभुजों की सर्वांगसमता की जाँच:

(a) AB = xy, BC = yz, AC = xz

उत्तर: सर्वांगसम हैं।

कारण: SSS (भुजा–भुजा–भुजा) नियम के अनुसार, क्योंकि दोनों त्रिभुजों की तीनों संगत भुजाएँ बराबर हैं।

(b) PQ = RS, $\angle P = \angle R$, $\angle Q = \angle S$

उत्तर: सर्वांगसम हैं।

कारण: ASA (कोण–भुजा–कोण) नियम के अनुसार, क्योंकि दो कोण और उनके बीच की भुजा बराबर हैं।

(c) LM = NO, $\angle L = \angle N = 90°$, NM = MO

उत्तर: सर्वांगसम हैं।

कारण: RHS (समकोण–कर्ण–भुजा) नियम के अनुसार, क्योंकि दोनों समकोण त्रिभुज हैं, उनके कर्ण बराबर हैं और एक अन्य भुजा भी बराबर है।

8. सिद्ध करना है: AC = BD

उपपत्ति (Proof) :

त्रिभुज APC और त्रिभुज BPD में:

AP = BP (दिया है)

CP = DP (दिया है)

$\angle APC = \angle BPD$ (शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं)

सर्वांगसमता नियम:

भुजा–कोण–भुजा (SAS) सर्वांगसमता नियम के अनुसार, दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

$\Delta APC \cong \Delta BPD$

निष्कर्ष: चूँकि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं, इसलिए इनके संगत भाग भी बराबर होंगे (CPCT नियम द्वारा)।

अत:, AC = BD (इति सिद्धम्

9. वृत्त के केंद्र O से परिधि पर स्थित बिंदुओं x और y को मिलाने वाली रेखाएँ Ox और Oy वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।

1. त्रिभुज की पहचान:

त्रिभुज Oxy में, Ox = Oy (चूँकि दोनों एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)।

इसलिए, Oxy एक समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle) है।

समद्विबाहु त्रिभुज के नियम के अनुसार, समान भुजाओं के सामने वाले कोण भी बराबर होते हैं।

अत: $\angle Oxy = \angle Oyx$

2. कोणों की गणना:

त्रिभुज के तीनों अंत: कोणों का योग 180° होता है।

$$\angle xoy + \angle Oxy + \angle Oyx = 180°$$
$$100° + \angle Oxy + \angle Oxy = 180°$$

(चूँकि $\angle Oxy = \angle Oyx$)

$$2\angle Oxy = 180° - 100$$
$$2\angle Oxy = 80°$$
$$\angle Oxy = \frac{80°}{2}$$

$\angle Oxy = 40°$

निष्कर्ष: परिधि पर बिन्दु x और y पर बने कोणों के मान निम्नलिखित हैं।

$\angle Oxy = 40°$

$\angle Oyx = 40°$

2. पूर्णांकों के साथ संक्रियाएँ

अभ्यास–2.7

1. सूत्र: दो संख्याओं (x और y) को ज्ञात करने के लिए हम इन सूत्रों का उपयोग करते हैं:

$$x = \frac{(\text{योग} + \text{अंतर})}{2}$$

$$y = \frac{(\text{योग} - \text{अंतर})}{2}$$

(a) $x = \frac{(50 + 20)}{2} = \frac{70}{2} = 35$

$y = \frac{(50 - 20)}{2} = \frac{30}{2} = 15$

अत: संख्याएँ (35, 15) हैं।

(b) $x = \frac{(0 + 14)}{2} = \frac{14}{2} = 7$

$y = \frac{(0 - 14)}{2} = \frac{-14}{2} = -7$

अत: संख्याएँ (7, –7) हैं।

(c) $x = \frac{(-8 + (-2))}{2} = \frac{-10}{2} = -5$

$y = \frac{(-8 - (-2))}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

योग: 5 + (–3) = – 8

अत: संख्याएँ (–5, –3) हैं।

(d) $x = \frac{(-18 + (-6))}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$y = \frac{(-18 - (-6))}{2} = \frac{24}{2} = 12$

योग: 6 + 12 = 18

अत: संख्याएँ (6, 12) हैं।

(e) $x = \frac{(45 + (-15))}{2} = \frac{30}{2} = 15$

$y = \frac{(45 - (-15))}{2} = \frac{60}{2} = 30$

अत: संख्याएँ (15, 30) हैं।

अभ्यास–2.2

1. स्थिति 1

x की दिशा दाईं ओर (धनात्मक दिशा)

की दिशा : बाईं ओर (ऋणात्मक दिशा)

परिमाण: | y | > | x | (y का मान x से बड़ा है क्योंकि इसका तीर लंबा है)

तुलना: x एक धनात्मक पूर्णांक है, y एक ऋणात्मक पूर्णांक है।

2. स्थिति 2

x की दिशा दाईं ओर (धनात्मक) की दिशा बाईं ओर (ऋणात्मक)

परिमाण: | x | > | y | (x का मान y से बड़ा है)

3. स्थिति 3

x की दिशा: दाईं ओर

y की दिशा: बाईं ओर

परिमाण: |x| = |y|

तुलना: x और y एक–दूसरे के विपरीत (योज्य प्रतिलोम) हैं, जैसे 5 और –5।

अत: x + y = 0

प्रश्नावली–2.1

1. संख्याओं के युगल ज्ञात करना (योग और अंतर से)

(a) योग = 27, अंतर = 9

$a = (27 + 9) \div 2 = 36 \div 2 = 18$

$b = (27 - 9) \div 2 = 18 \div 2 = 9$

अत: दोनों संख्याएँ 18 और 9 हैं।

(b) योग = 4, अंतर = 12

$a = (4 + 12) \div 2 = 16 \div 2 = 8$

$b = (4 - 12) \div 2 = (-8) \div 2 = -4$

अत: दोनों संख्याएँ 8 और –4 हैं।

(c) योग = 0, अंतर = 10

$a = (0 + 10) \div 2 = 10 \div 2 = 5$

$b = (0 - 10) \div 2 = (-10) \div 2 = -5$

अत: दोनों संख्याएँ 5 और –5 हैं।

(d) योग = 0, अंतर = –10

$a = (0 + (-10)) \div 2 = (-10) \div 2 = -5$

$b = (0 - (-10)) \div 2 = 10 \div 2 = 5$

अत: दोनों संख्याएँ –5 और 5 हैं।

(e) योग = –7, अंतर = –1

$a = (-7 + (-1)) \div 2 = (-8) \div 2 = -4$

$b = (-7 - (-1)) \div 2 = (-6) \div 2 = -3$

अत: दोनों संख्याएँ –4 और –3 हैं।

(f) योग = – 7, अंतर = –13

$a = (-7 + (-13)) \div 2 = (-20) \div 2 = -10$

$b = (-7 - (-13)) \div 2 = (-7 + 13) \div 2 = 6 \div 2 = 3$

अत: दोनों संख्याएँ –10 और 3 हैं।

2. लाल टोकन से ऋणात्मक तथा हरे टोकन से धनात्मक संख्याएँ दर्शायी जाती हैं। टोकन विधि से मान ज्ञात करें

(a) 3 × (– 2)

गुणक धनात्मक (3) है 3 बार 2 ऋणात्मक टोकन थैले में रखें।

थैले में 6 लाल टोकन = 6 ऋणात्मक

⇒ 3 × (– 2) = – 6

(b) (–5) × (–2)

गुणक)णात्मक (–5) है– 5 बार 2 ऋणात्मक टोकन हटाएँ।

हटाने के लिए 5 बार 2 शून्य युग्म रखकर 2 लाल टोकन हटाते हैं।

चरण 3 : हर बार हटाने के बाद 2 हरे टोकन बचते हैं– 5 × 2 = 10 हरे टोकन

⇒ (–5) × (–2) = + 10

(c) (–4) × (–1)

गुणक ऋणात्मक (–4) है– 4 बार 1 ऋणात्मक टोकन हटाएँ।

4 बार हटाने पर 4 हरे टोकन बचते हैं।

⇒ (–4) × (–1) = +4

(d) (– 7) × 3

गुणक ऋणात्मक (–7) है– 7 बार 3 धनात्मक टॉकन हटाएँ।

हटाने के लिए शून्य युग्म का उपयोग–

7 × 3 = 21 लाल टॉकन बचते हैं।

⇒ (–7) × 3 = –21

3. – 123 × 456 = 56088 दिया है (बिना गणना के)

(a) (–123) × 456

एक ऋणात्मक × एक धनात्मक = ऋणात्मक

परिमाण = 123 × 456 = 56088 (दिया है)

⇒ (–123) × 456 = – 56088

(b) (–123) × (–456)

ऋणात्मक × ऋणात्मक = धनात्मक

परिमाण = 123 × 456 = 56088 (दिया है)

⇒ (–123) × (–456) = +56088

(c) (123) × (–456)

धनात्मक × ऋणात्मक = ऋणात्मक

परिमाण = 123 × 456 = 56088 (दिया है)

⇒ (123) × (–456) = –56088

4. दो पूर्णांकों के गुणन का सरल नियम

पैटर्न देखकर नियम बनाएँ:

(a) (–) × (–) = (+) | 4 × (– 2) = – 8

(b) (+) × (–) = (–) | 4 × (– 2 – 2 + 2) = –8

(c) (–) × (+) = (–) | 4 × (– 4 – 2 + 4) = – 8

नियम: यदि दोनों संख्याओं के चिह्न समान हों–गुणनफल धनात्मक। यदि दोनों संख्याओं के चिह्न भिन्न हों–गुणनफल ऋणात्मक।

5. (a) 4 × (– 3) = – 12

(b) (–6) × (–3) = + 18

(c) (– 5) × (– 1) = + 5

(d) (– 8) × 4 = – 32

(e) (– 9) × 10 = – 90

(f) 10 × (–17) = – 170

6. (a) 14 × (– 15) = – 210

(b) (– 16) × (– 5) = + 80

(c) 36 ÷ (−18) = – 2

(d) (– 46) ÷ (– 23) = + 2

7. दिया गया: प्रारंभिक तापमान = 32°C

प्रति घंटे कमी = 5°C प्रति घंटे तापमान परिवर्तन = –5°C

समय = 10 घंटे

10 घंटे में कुल परिवर्तन = 10 × (–5) = –50ºC

अंतिम तापमान = 32 + (–50)

= 32 – 50 = – 18°C

10 घंटे बाद कमरे का तापमान = –18°C

8. दिया गया: सफेद सीमेंट = +₹8 प्रति बैग (लाभ)

ग्रे सीमेंट = –₹5 प्रति बैग (हानि)

(a) सफेद से लाभ

= 3000 × (+8) = + ₹24,000

ग्रे सीमेंट से हानि = 5000 × (–5)

= 5000 × (– 5) = – ₹25,000

कुल = 24,000 + (–25,000) = 24,000 – 25,000 = – ₹1,000

कंपनी को ₹1,000 की हानि हुई।

(b) दिया गया: ग्रे सीमेंट = 6400 बैग

ग्रे सीमेंट से हानि = 6400 × (–5) = – ₹32,000

न लाभ न हानि—कुल = 0

सफेद बैग × (+8) + (–32,000) = 0

सफेद बैग × 8 = 32,000

सफेद बैग = 32,000 ÷ 8 = 4,000

अत: कंपनी को 4,000 बैग सफेद सीमेंट बेचने होंगे।

9. (a) 27 ÷ (–3) = –9 (b) (–35) ÷ 5 = –7

(c) (–56) ÷ (–8) = 7 (d) 132 ÷ (–12) = – 11

(e) 7 × (–8) = –56 (f) (–11) × 12 = – 132

अभ्यास–2.3

1. नियम: किसी पूर्णांक को घटाने के लिए, उसके विपरीत (opposite) को जोड़ दें।

(a) 7 – 12 = ? या 7 – (+12) = ?

चरण 1: + 12 का विपरीत –12 है।

चरण 2: जोड़ के रूप में लिखें: 7 + (–12)

चरण 3: हल: 12 – 7 = 5 (बड़ी संख्या का चिन्ह लगाएँ)

उत्तर: –5

(b) (– 3 – (–8)) = ?

चरण 1: – 8 का विपरीत + 8 है।

चरण 2: जोड़ के रूप में लिखें: –3 + 8

चरण 3: हल: 8 – 3 = 5

उत्तर: 5

2. (a) 4 × (–3) = –12

(असमान चिन्हों का गुणा हमेशा ऋणात्मक होता है)

(b) (–6) × (–3) = 18

(दो ऋणात्मक चिन्हों का गुणा हमेशा धनात्मक होता है)

(c) (–5) × (2) = –10

(एक ऋणात्मक और एक धनात्मक संख्या का गुणा ऋणात्मक होता है)

(d) (–8) × (–1) = 8

(समान चिन्हों का गुणा धनात्मक होता है)

3. (a) (–200) × (–50) = –10,000

(चूंकि एक संख्या ऋणात्मक है, इसलिए उत्तर ऋणात्मक होगा)

(b) (–200) × (–50) = 10,000

(चूंकि दोनों संख्याएँ ऋणात्मक हैं, इसलिए उत्तर धनात्मक होगा)

(c) 200 × (–50) = –10,000

(चूंकि एक संख्या ऋणात्मक है, इसलिए उत्तर ऋणात्मक होगा)

4. नीचे दिए गए दृश्य पैटर्न को देखें:

यदि हम (–3) मान वाले 4 समूहों को एक खाली थैली में डालते हैं, तो यह 4 × (–3) = –12 को दर्शाता है।

अब कल्पना कीजिए कि हम इन्हीं समूहों को एक ऐसी थैली से ''निकालते'' हैं जिसमें पर्याप्त शून्य युग्म (Zero pairs) हैं। यह (–4) × (–3) को दर्शाता है।

थैली में क्या बचेगा?

उत्तर: जब हम ऋणात्मक मान को थैली से बाहर निकालते हैं, तो थैली का कुल मान बढ़ जाता है। इसलिए थैली में +12 बचेगा।

5. हम जानते हैं कि किसी संख्या को हटाना, उसके व्युत्क्रम (Opposite) को जोड़ने के बराबर होता है।

प्रश्न: क्या हम (–5) × (3) को जोड़ की तर्क प(ति से परिभाषित कर सकते हैं?

उत्तर: हाँ, हम इसे 'बार–बार जोड़ने (Repeated Addition) की विधि से परिभाषित कर सकते हैं।

(–5) × 3 का अर्थ है (–5) को 3 बार जोड़ना:

(–5) + (–5) + (–5) = –15

अत:, गुणा को बार–बार जोड़ने की क्रिया के रूप में देखा जा सकता है।

अभ्यास–2.4

1. (a) आठ ऋणात्मक (–) पूर्णांक और तीन धनात्मक (+) पूर्णांक:

तर्क: जब ऋणात्मक चिन्हों की संख्या सम (even) होती है (जैसे 8), तो उनका गुणनफल धनात्मक (+) हो जाता है। धनात्मक संख्याओं का गुणा हमेशा धनात्मक ही रहता है।

उत्तर: धनात्मक (+)

(b) इक्कीस ऋणात्मक (–) पूर्णांक:

तर्क: जब ऋणात्मक चिन्हों की संख्या विषम (odd) होती है (जैसे 21), तो उनका गुणनफल हमेशा ऋणात्मक होता है।

उत्तर: ऋणात्मक (–)

(c) (–) को 50 बार स्वयं से गुणा किया जाए:

तर्क: यहाँ 50 एक सम संख्या (even number) है। ऋणात्मक चिन्ह को सम बार गुणा करने पर वह धनात्मक हो जाता है।

उत्तर: धनात्मक (+)

2.

गणितीय कथन	प्रयुक्त गुणधर्म
(a) (–25) × 1 = –25	गुणात्मक तत्समक गुण
(b) (–12) × (–5) = (–5) × (–12)	क्रमविनिमेय गुण
(c) (–100) × 0 = 0	शून्य का गुण
(d) –6 और 4 का गुणनफल एक पूर्णांक है	संवरक गुण

अभ्यास–2.5

1. (a) –48 ÷ (–4) = 12

(समान चिन्हों वाली संख्या का गुणा धनात्मक होगा दो ऋणात्मक चिन्ह मिलकर धनात्मक हो जाते हैं)

(b) (–35) ÷ 7 = –5

(असमान चिन्हों वाली संख्याओं का गुणा ऋणात्मक होगा)

(c) 18 × (–3) = –54

(तर्क: 18 × 3 = 54, ऋणात्मक होगा)

2. दिया गया है:

आधार शिविर की ऊंचाई = 2500 मीटर

नीचे उतरने की दर = 150 मीटर प्रति घंटा

(a) 6 घंटे बाद पर्वतारोही की ऊँचाई:

6 घंटे में तय की गई दूरी = 150 × 6 = 900 मीटर

6 घंटे बाद पर्वतारोही की ऊँचाई = 2500 – 900 = 1600 मीटर

(b) 1300 मीटर की ऊँचाई तक पहुँचने में लगा समय:

कुल उतरने वाली दूरी = 2500 – 1300 = 1200 मीटर

लगा समय = कुल दूरी ÷ उतरने की दर

समय = 1200 ÷ 150 = 8 घंटे

3. दिया गया है:

स्ट्रॉबेरी पर लाभ = 6 रुपये प्रति टोकरी

अंगूर पर हानि = 4 रुपये प्रति टोकरी

हल: (a) सोमवार की स्थिति:

400 टोकरी स्ट्रॉबेरी पर लाभ = 400 × 6 = 2400 रुपये

700 टोकरी अंगूर पर हानि = 700 × 4 = 2800 रुपये

कुल परिणाम = 2400 (लाभ) – 2800 (हानि) = 400 रुपये की हानि

(b) 900 टोकरी अंगूर पर हानि = 900 × 4 = 3600 रुपये

इस हानि को बराबर करने के लिए स्ट्रॉबेरी से 3600 रुपये का लाभ चाहिए।

स्ट्रॉबेरी की टोकरियों की संख्या = 3600 ÷ 6 = 600 टोकरी

4. व्यंजक: 6 × (–2) × 5

तरीका 1:

(6 × (–2)) × 5

= –12 × 5 = –60

तरीका 2 (क्रम बदलकर):

(6 × 5) × (–2)

30 × (–2) = –60

निष्कर्ष: मान –60 है। नहीं, क्रम बदलने से परिणाम नहीं बदलता क्योंकि गुणा में क्रमविनिमेय (Commutative) और साहचर्य (Associative) गुण लागू होते हैं।

प्रश्नावली–2.2

1. (a) (–5) × (18 + (–3))
18 + (–3) = 18 – 3 = 15
(–5) × 15 = –75   [(–) × (+) = (–)]
(–5) × (18 + (–3)) = –75
(b) (–7) × 4 × (–1)
(–7) × (4) = –28
(–28) × (–1)) = +28   [(–) × (–) = (+)]
(–7) × 4 × (–1) = 28
(c) (–2) × (–1) × (–5) × (–3)
(–2) × (–1)) = +2   [(–) × (–) = (+)]
(+2) × (–5) = –10   [(+) × (–) = (–)]
(–10) × (–3) = +30   [(–) × (–) = (+)]
(–2) × (–1) × (–5) × (–3) = 30

2. (a) (–27) ÷ 9 = (–3) (b) 84 ÷ (–4) = –21
(c) (–56) ÷ (–2) = + 28

3. (a) (–1) × ? = 27
? = 27 ÷ (–1) = – 27
पूर्णांक = –27
(b) (–1) × ? = –31
? = (–31) ÷ (–1) = +31
पूर्णांक = 31
(c) (–1) × ? = –1
? = (–1) ÷ (–1) = +1
पूर्णांक = 1
(d) (– 1) × ? = 1
? = 1 ÷ (– 1) = –1
पूर्णाक = –1
(e) (– 1) × ? = 0
किसी भी संख्या को 0 से गुणा करने पर 0 मिलता है। अत: पूर्णाक = 0

4. 47 – 56 + 14 – 8 + 2 – 8 + 5 = – 4 दिया है
ज्ञात करना है: – 47 + 56 – 14 + 8 – 2 + 8 – 5 = ?
चरण 1: देखें कि दूसरा व्यंजक पहले व्यंजक के प्रत्येक पद का विपरीत हैं।
पहला व्यंजक = 47 – 56 + 14 – 8 + 2 – 8 + 5 = – 4
दूसरा व्यंजक = (–47 + 56 – 14 + 8 –2 + 8 – 5)
चरण 2: – (–4) = + 4
– 47 + 56 – 14 + 8 – 2 + 8 – 5 = + 4

5. (–21) से प्रारंभ:
– 21 विषम → (–3) × (–21) + 1 = 63 + 1 = 64
64 सम → 64 ÷ 2 = 32
32 सम → 32 ÷ 2 = 16
16 सम → 16 ÷ 2 = 8
8 सम → 8 ÷ 2 = 4
4 सम → 4 ÷ 2 = 2
2 सम → 2 ÷ 2 = 1
– 21 → 64 → 32 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1
(–6) से प्रारंभ:
–6 सम → (–6) ÷ 2 = –3
–3 विषम → (–3) × (–3) + 1 = 9 + 1 = 10
10 सम → 10 ÷ 2 = 5
5 विषम → (–3) × 5 + 1 = – 15 + 1 = –14
–14 सम → (–14) ÷ 2 = –7
– 7 विषम → (–3) × (–7) + 1 = 21 + 1 = 22
22 सम → 22 ÷ 2 = 11
.... [और आगे 1 तक पहुँचती है]
–6 → –3 → 10 → 5 → –14 → –7 → 22 → 11 → ..... → 1

6. (a) दिया गया सही उत्तर = 15, कुल अंक = 40
सही उत्तरों से अंक = 15 × 4 = 60
माना गलत उत्तर = x

$$60 + x \times (-2) = 40$$
$$-2x = 40 - 60 = -20$$
$$x = (-20) \div (-2) = 10$$

कुल प्रश्न = 15 + 10 = 25
अनिता के गलत उत्तर = 10। परीक्षा में कुल प्रश्न = 25
(b) दिया गया: सही उत्तर = 5, कुल अंक = –10
सही उत्तरों से अंक = 5 × 4 = 20
माना गलत उत्तर = y

$$20 + y \times (-2) = -10$$
$$-2y = -10 - 20 = -30$$
$$y = (-30) \div (-2) = 15$$

अनिल ने कुल उत्तर दिए = 5 + 15 = 20

कुल प्रश्न = 25 (भाग a से) → अनुतरित = 25 – 20 = 5

अनिल के गलत उत्तर = 15। अनुत्तरित प्रश्न = 5

7. मशीन की प्रविष्टियाँ देखें:

4, 8; –3 → 28; 6, 9, 6→ 48

2, 3, –2 → 8; –9, 5, –8→ 31

7, –4, –6 → –17

$a - b \times c$ का परीक्षण करें:

4 – 8 × (– 3) = 4 – (–24) = 4 + 24 = 28

6 – 9 × 6 = 6 – 54 = – 48

2 – 3 × (−2) = 2 + 6 = 8

(−9) – 5 × (–8) = – 9 + 40 = 31

7 – (−4) × (−6) = 7 – 24 = –17

अंतिम पंक्ति– –16, –6, –9

(–16) – (–6) × (–9) = –16 – 54 = –70

मशीन की संक्रिया: पहली संख्या – (दूसरी × तीसरी) यानी $a - b \times c$

अंतिम पंक्ति का उत्तर : (–16) – (– 6) × (−9) = – 70

8. दिया गया: वर्तमान तापमान = 8°C

प्रति घंटे गिरावट = 5°C → प्रति घंटा परिवर्तन = –5°C

समय = 4 घंटे

4 घंटे में तापमान परिवर्तन = 4 × (–5)

4 घंटे बाद तापमान = 8 + 4 × (–5)

= 8 + (–20) = 8 – 20 = –12°C

व्यंजक: 8 + 4 × (–5)। 4 घंटे बाद तापमान = -12ºC

9. (a) गुणनफल – 6

माना तीन क्रमागत संख्याएँ n, $n + 1$, $n + 2$ हैं।

$n = -3$ आजमाएँ: (–3) × (−2) × (−1) = –6

तीन क्रमागत संख्याएँ: -3 -2, -1

(b) गुणनफल = 120

$n = 4$ आजमाएँ: 4 × 5 × 6 = 120

तीन क्रमागत संख्याएँ: 4, 5, 6

10. (a) 13 × 5 – 9 × 5 = 65 – 45 = 20

+13 के 5 सिक्के और –9 के 5 सिक्के → 65 – 45 +20

(b) +13 के 10 सिक्के और -9 के 10 सिक्के → 130 – 90 = +40

(c) 13 × 1 – 9 × 7 = 13 – 63 = – 50

+ 13 का 1 सिक्का और 9 के 7 सिक्के → 13 – 63 = – 50

(d) 13 × 2 – 9 × 2 = 26 – 18 = 8

+13 के 2 सिक्के और -9 के 2 सिक्के → 26 – 18 = + 8

(e) 13 × 7 – 9 × 9 = 91 – 81 = 10

+13 के 7 सिक्के और -9 के 9 सिक्के → 91 – 81 = +10

(f) 13 × 4 – 9 × 6 = 52 – 54 = −2

+13 के 4 सिक्के और 9 के 6 सिक्के → 52 - 54 = -2

(g) 13 × 7 – 9 × 10 = 91 – 90 = 1

+13 के 7 सिक्के और -9 के 10 सिक्के → 91 – 90 = +1

(h) 1568 पिब्स संभव है?

13 × 122 = 1586 | 9 × 2 = 18

13 × 122 – 9 × 2 = 1586 – 18 = 1568

[चूँकि 13 और 9 सह-अभाज्य हैं, कोई भी पूर्णांक प्राप्त हो सकता है।]

हाँ, +13 के 122 सिक्के और –9 के 2 सिक्के → 1586 – 18 = 1568 पिब्स।

11. (a) (32 × (–18)) ÷ (–36)

32 × (–18) = –576 [(+)×(−)=(–)]

(–576) ÷ (–36) = +16 [(–)÷(–)=(+)]। 576 ÷ 36 = 16

(32 × (–18)) ÷ (–36) = 16

(b) 32 ÷ ((–36) × (–18))

(–36) × (–18) = + 648 [(–) × (–) = (+)]

$$32 \div 648 = \frac{32}{648} = \frac{4}{81}$$

$$32 \div ((-36) \times (-18)) = \frac{4}{81}$$

(c) (25 × (–12)) ÷ ((45) × (–27))

25 × (–12) = –300

45 × (–27) = –1215

$$(-300) \div (-1215) = +\frac{300}{1215} = \frac{20}{81}$$

= [(–) ÷ (–) = (+)]

$(25 \times (-12)) + ((45) \times (-27)) = \frac{20}{81}$

(d) (280 × (–7)) ÷ ((–8) × (–35))
280 × (–7) = –1960
(–8) × (–35) = +280
(–1960) ÷ 280 = –7 [(–) ÷ (+) = (–)]

12. व्यंजकों को आरोही क्रम में लिखें

पहले प्रत्येक व्यंजक का मान ज्ञात करें:
(a) (–348) + (–1064) = –1412
(b) (–348) – (–1064) = –348 + 1064 = +716
(c) 348 – (–1064) = 348 + 1064 = +1412
(d) (–348) × (–1064) = + 370,272 [(–) × (–) = (+)]
(e) 348 × (–1064) = –370,272 [(+)×(–)=(–)]
(f) 348 × 964 = 335,472

तुलना : –370,272 < –1412 < +716 < +1412 < +335,472 < +370,272

आरोही क्रम : (e) < (a) < (b) < (c) < (f) < (d)

13. (–548) × 972 = –532656 दिया है

(a) (–547) = × 972

(–547) = (–548 + 1)
(–547) × 972 = (–548 + 1) × 972
= (–548) × 972 + 1 × 972
= –532656 + 972
(–547) × 972 = –531,684

(b) (–548) × 971

971 = 972 – 1
(–548) × 971 = (–548) × (972 – 1)
= (–548) × 972 – (–548) × 1
= –532656 – (–548)
= –532656 + 548
(–548) × 971 = –532,108

(c) (–547) × 971

(547) × 972 = –531684 [हल 13 (a) से]
(–547) × 971 = (–547) × (972 – 1)
= (–547) × 972 – (–547) × 1
= –531684 – (–547) = –531684 + 547
(–547) × 971 = –531,137

14. 207 × (–33 +7) = –5382 दिया है

ज्ञात करना है: –207 × (33 – 7)

– 207 × 26 = – 5382

15. 3, –2, 5, –6 का उपयोग करें (प्रत्येक एक बार; +, –, × प्रत्येक एक बार)

(a) अधिकतम परिणाम
व्यंजक = (3 – (–6)) × 5 + (–2)
= 9 × 5 – 2 = 45 = 2 = 43

(b) न्यूनतम परिणाम
व्यंजक = (–6 – 3) × 5 + (–2)
= – 45 – 2 = – 47

16. (a) – ______ + ______ × ______ = – 36

तरीका 1 : 0 + (–4) × 9 = 0 – 36 = – 36

तरीका 2 : (–6) + (–6) × 5 = –6 – 30 = – 36

तरीका 3 : 4 + (–8) × 5 = 4 – 40 = – 36

तरीका 4 : (–12) + (–4) × 6 = – 12 – 24 = – 36

तरीका 5 : 10 + (–2) × 23 = 10 – 46 = – 36

इसी प्रकार (b) और (c) भी स्वयं हल करें।

विविध प्रश्नावली

1. (–6) × (7 + (–4))

(–6) × (3)

उत्तर: –18

2. इसे हम (–245) × (40 – 4) या (–245) × (30 + 6) के रूप में लिख सकते हैं।
(–245 × 30) + (–245 × 6) = –7350 + (–1470)

उत्तर: – 8820

3. सूत्र: पहली चाल + दूसरी चाल = अंतिम स्थिति

–9 + दूसरी चाल = 4

दूसरी चाल = 4 + 9

उत्तर: 13

4. यहाँ ऋणात्मक चिन्ह 4 बार (सम संख्या) है, इसलिए परिणाम धनात्मक होगा।

– 2 × – 2 × – 2 × – 2 = 16

उत्तर: 16

5. (+48) + (–6) = 48 – 6

उत्तर: 42

6. 7 घंटे में कुल गिरावट = 7× 4 = 28°C

अंतिम तापमान = 10°C – 28°C

उत्तर: –18°C

7. (–9 × .... = 63) चूंकि परिणाम धनात्मक (63) है, इसलिए हमें एक ऋणात्मक (–9)

संख्या से गुणा करना होगा।

63 ÷ (–9) = –7

उत्तर: –7

8. (–15) × (–4)

उत्तर: 60 (दो ऋणात्मक चिन्ह मिलकर धनात्मक हो गए)

9. दो ऋणात्मक संख्याओं का भाग हमेशा धनात्मक होता है।

64 ÷ 8 = 8

उत्तर: 8

10. (−18) + 25 – 12 + (–5)

धनात्मक संख्याएँ: 25

ऋणात्मक संख्याएँ: –18, –12, –5 (योग = –35)

हल: 25 – 35

उत्तर: –10

11. यदि हम संख्याओं को देखें: (–6) × (–5) × (–4) = –120

अत: पूर्णांक – 6, –5, –4 हैं।

12. (–7) × [10 + (–6)]

= (–7 × 10) + (–7 × (–6))

= –70 + 42

उत्तर: –28

3. समान आधार की खोज

अभ्यास-3.1

(a) 75 को दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखने पर:

1 × 75 = 75

3 × 25 = 75

5 × 15 = 75

अत: 75 के सभी गुणनखंड: 1, 3, 5, 15, 25, 75

(b) 144 को दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखने पर:

1 × 144 = 144

2 × 72 = 144

3 × 48 = 144

4 × 36 = 144

6 × 24 = 144

8 × 18 = 144

9 × 16 = 144

12 × 12 = 144

अत: 144 के सभी गुणनखंड: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144

(c) 210 को दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखने पर:

1 × 210 = 210

2 × 105 = 210

3 × 70 = 210

5 × 42 = 210

6 × 35 = 210

7 × 30 = 210

10 × 21 = 210

14 × 15 = 210

अत: 210 के सभी गुणनखण्ड (1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210)

(d) 500 को दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखने पर–

- 1 × 500 = 500
- 2 × 250 = 500
- 4 × 125 = 500
- 5 × 100 = 500
- 10 × 50 = 500
- 20 × 25 = 500

अत: 500 के सभी गुणनखंड : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500

अभ्यास-3.2

1. (a) 36 और 48

36 = 2 × 2 × 3 × 3;

48 = 2 × 2 × 2 × 2 × 3

म.स.प. = 12

(b) 150 और 210:

150 = 2 × 3 × 5 × 5;

210 = 2 × 3 × 5 × 7

म.स.प. = 30

(c) 80 और 81:

इनमें 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

म.स.प. = 1

(d) 144 और 198:

$144 = 24 \times 3^2$;

$198 = 2 \times 3^2 \times 11$

म.स.प. = 18

अभ्यास-3.3

1. (a) 36 के अभाज्य गुणनखंड: 2 × 2 × 3 × 3

90 के अभाज्य गुणनखंड: 2 × 3 × 3 × 5

उभयनिष्ठ (Common) गुणनखंड: 2 × 3 × 3

म.स.प. = 2 × 3 × 3 = 18

(b) 45 के अभाज्य गुणनखंड: 3 × 3 × 5

60 के अभाज्य गुणनखंड: 2 × 2 × 3 × 5

75 के अभाज्य गुणनखंड: 3 × 5 × 5

उभयनिष्ठ (Common) गुणनखंड: 3 × 5

म.स.प. = 3 × 5 = 15

(c) 128 के अभाज्य गुणनखंड: 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2

256 के अभाज्य गुणनखंड: 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2

उभयनिष्ठ (Common) गुणनखंड: 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 (सात बार)

म.स.प. = 128

(**नोट**: यदि एक संख्या दूसरी को पूरा भाग दे दे, तो छोटी संख्या ही म.स.प. होती है)

(d) 210 के अभाज्य गुणनखंड: 2 × 3 × 5 × 7

315 के अभाज्य गुणनखंड: 3 × 3 × 5 × 7

उभयनिष्ठ (Common) गुणनखंड: 3 × 5 × 7

म.स.प. = 3 × 5 × 7 = 105

(e) 360 के अभाज्य गुणनखंड: 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5

480 के अभाज्य गुणनखंड: 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 5

600 के अभाज्य गुणनखंड: 2 × 2 × 2 × 3 × 5 × 5

उभयनिष्ठ (Common) गुणनखंड: 2 × 2 × 2 × 3 × 5

म.स.प. = 2 × 2 × 2 × 3 × 5 = 120

अत: म.स.प. वह सबसे बड़ी संख्या होती है जो दी गई सभी संख्याओं को पूरी तरह विभाजित कर दे।

2. नहीं, यह कहना गलत है। 80 और 240 में कई उभयनिष्ठ गुणनखंड हैं (जैसे 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40, 80)। 80 खुद 240 का एक गुणनखंड है।

अभ्यास-3.4

1. हम दोनों संख्याओं को अभाज्य संख्याओं से भाग देंगे:

2	10, 25
2	5, 25
5	1, 5
5	1, 1

ल.स.प. = 2 × 2 × 5 × 5 = 100

(b)

2	6, 8, 12
2	3, 4, 6
2	3, 2, 3
2	3, 1, 3
3	1, 1, 1

ल.स.प. = 2 × 2 × 2 × 2 × 3 = 48

(c)

2	15, 10
2	15, 5
3	5, 5
5	1, 1

ल.स.प. = 2 × 2 × 3 × 5 = 60

(d)

2	30, 75
2	15, 75
3	5, 25
5	1, 5
5	1, 1

ल.स.प. = 2 × 2 × 3 × 5 × 5 = 300

अत: ल.स.प. (लघुतम समापवर्त्य) वह सबसे छोटी संख्या होती है जो दी गई सभी संख्याओं के पहाड़े में आती है।

प्रश्नावली–3.1

1. (a) 90 के गुणनखंड: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90

(b) 105 के गुणनखंड: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105

(c) 132 के गुणनखंड : 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 33, 44, 66, 132

(d) 360 के 24 गुणनखंड: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360

(e) 840 के गुणनखंड : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 40, 42, 56, 60, 70, 84, 105, 120, 140, 168, 210, 280, 420, 840

2. (a) $50 = 2 \times 5 \times 5$ तथा $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

उभयनिष्ठ गुणनखंड: 1, 2, 5, 10

अत: (a) म.स. (50, 60) $= 2 \times 5 = 10$

(b) $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$ तथा $275 = 5 \times 5 \times 11$

उभयनिष्ठ गुणनखंड: 1, 5

अत: (b) म. स. (140, 275) = 5

(c) $77 = 7 \times 11$ तथा $725 = 5 \times 5 \times 29$

उभयनिष्ठ गुणनखंड: 1

अत: (c) म.स. (77, 725) = 1 (ये सहअभाज्य संख्याएँ हैं)

(d) $370 = 2 \times 5 \times 37$ तथा $592 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 37$

उभयनिष्ठ गुणनखंड: 1, 2, 37, 74

अत: (d) म.स. (370, 592) $= 2 \times 37 = 74$

(e) $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ तथा $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

उभयनिष्ठ गुणनखंड: 1, 3, 9, 27, 81

अत: (e) म.स. (81, 243) $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

नोट: 81 स्वयं 243 का गुणनखंड है, इसलिए म.स. = 81

3. (a) $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

उभयनिष्ठ गुणनखंड : 2, 2, 3

अत: म. स. (24, 180) $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

(b) $42 = 2 \times 3 \times 7$

$75 = 3 \times 5 \times 5$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

उभयनिष्ठ गुणनखंड : 3

अत: म.स. (42, 75, 24) = 3

(c) $240 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$378 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7$

उभयनिष्ठ गुणनखंड : 2, 3

अत: म.स. (240, 378) $= 2 \times 3 = 6$

(d) $400 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

$2500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

उभयनिष्ठ गुणनखंड: 2, 2, 5, 5

अत: म.स. (400, 2500) $= 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 100$

(e) $300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$

$800 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

उभयनिष्ठ गुणनखंड: 2, 2, 5, 5

अत: म.स. (300, 800) $= 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 100$

4. $72 = 6 \times 12$ और $144 = 8 \times 18$ दिया गया है। 6, 12, 8, 18 ये सब भाज्य संख्याएँ हैं।

संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

उभयनिष्ठ गुणनखंड: 2, 2, 2, 3, 3

अत: नहीं – 72 और 144 का म. स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$ है, 1 नहीं। भाज्य निष्कर्ष निकल सकते हैं।

5. (a) $30 = 2 \times 3 \times 5$ और $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

संख्याओं का गुणनखंड : 2, 2, 3, 3, 5

अत: ल.स. (30, 72) $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$

(b) $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ और $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$

संख्याओं का गुणनखंड: 2, 2, 3, 3, 3

अत: ल.स. (36, 54) $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$

(c) $105 = 3 \times 5 \times 7$ और $195 = 3 \times 5 \times 13$

$65 = 5 \times 13$

संख्याओं का गुणनखंड: 3, 5, 7, 13

अतः ल.स. (105, 195, 65) = 3 × 5 × 7× 13 = 1365

(d) 222 = 2 × 3 × 37 और 370 = 2 × 5 × 37

संख्याओं का गुणनखंड: 2, 3, 5, 37

अतः ल.स. (222, 370) = 2 × 3 × 5 × 37 = 1110

6. (a) दो क्रमागत सम संख्याएँ (जैसे 4, 6 या 8, 10) :

क्रमागत सम संख्याओं का अंतर = 2

उदाहरण: म.स. (4, 6) = 2, म. स. (8, 10) = 2, म. म. (12, 14) = 2

अतः दो क्रमागत सम संख्याओं का म. स. सदैव 2 होता है।

(b) दो क्रमागत विषम संख्याएँ (जैसे 3, 5 या 7, 9) :

उदाहरण: म.स. (3,5) = 1, म. स. (7, 9) = 1, म. स. (11, 13) = 1

क्रमागत विषम संख्याओं में कोई उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड नहीं होता। अतः दो क्रमागत विषम संख्याओं का म. स. सदैव 1 होता है।

(c) दो सम संख्याएँ: उदाहरण: म.स. (4, 8) = 4, म.स. (6, 10) = 2, म. स. (12, 18) = 6 दोनों में 2 उभयनिष्ठ है, इसलिए म.म. कम से कम 2 होगा।

अतः दो सम संख्याओं का म. स. सदैव कम से कम 2 होता है।

(d) दो क्रमागत संख्याएँ (जैसे 5, 6 या 14, 15):

उदाहरण: म.स. (5, 6) = 1, म. स. (14, 15) = 1, म.स. (99, 100) = 1 क्रमागतं संख्याएँ सदैव सहअभाज्य होती हैं।

अतः दो क्रमागत संख्याओं का म. स. सदैव 1 होता है।

(e) दो सहअभाज्य संख्याएँ: सहअभाज्य संख्याओं में केवल 1 ही उभयनिष्ठ गुणनखंड होता है।

अतः दो सहअभाज्य संख्याओं का म. स. सदैव 1 होता है।

7. (a) ऐसे युग्म जहाँ ल. स. उन्हीं में से एक हो: ल.स. (3, 24) = 24, ल.स. (4, 12) = 12, ल.स. (5, 15) = 15, ल.स. (7, 21) = 21, ल.स. (6,18) = 18

अतः ऐसे युग्म जहाँ एक संख्या दूसरे की गुणज हो।

(b) बीजगणित में: यदि m और n दो संख्याएँ हों और m, n का गुणज हो, तो ल. स. $(n, m) = m$

सामान्य कथन: यदि एक संख्या दूसरी की गुणज है, तो ल.स. बड़ी संख्या होगी।

अतः n और kn (जहाँ k कोई धनात्मक पूर्णांक हो) का ल. स. = kn

8. (a) 3 के दो गुणज (जैसे 6 और 15) :

उदाहरण: ल.म. (6,15) = 30, ल.स. (9, 12) = 36, ल.स. (6.9) = 18

3 के दो गुणजों का ल.स. भी 3 का गुणज होता है।

अतः 3 के दो गुणजों का ल. स. सदैव 3 का गुणज होता है।

(b) दो क्रमागत सम संख्याएँ (जैसे 4, 6 या 6, 8) :

उदाहरण: ल.स.(4,6)=12, ल.स.(6,8)=24, ल.स. (8, 10) = 40

इनका ल.स. $= \frac{a \times b}{2} = \frac{\text{संख्याओं का गुणनफल}}{\text{म.स.}}$

अतः दो क्रमागत सम संख्याओं का ल.स. = उनका गुणनफल ÷ 2

(c) दो क्रमागत संख्याएँ:

म.स. = 1 होने के कारण ल.स. = संख्याओं का गुणनफल उदाहरण: ल.स. (5,6) = 30, ल.स. (7,8) = 56

अतः दो क्रमागत संख्याओं का ल. स. = उनका गुणनफल।

(d) दो सह-अभाज्य संख्याएँ:

म.स. = 1 होने के कारण: ल.स. = संख्याओं का गुणनफल उदाहरण: ल.स. (4, 9) = 36, ल.स. (5,7) = 35

अतः दो सहअभाज्य संख्याओं का ल. स. = उनका गुणनफल।

अभ्यास-3.5

1. (a) 180 और 270

म.स.प. (HCF) के लिए अभाज्य गुणनखंड:

180 = 2 × 2 × 3 × 3 × 5

270 = 2 × 3 × 3 × 3 × 5

उभयनिष्ठ (Common) गुणनखंड = 2 × 3 × 3 × 5

म.स.प. = 2 × 3 × 3 × 5 = 90

ल.स.प. (LCM) के लिए भाग विधि:

2 से भाग देने पर: 90, 135

2 से भाग देने पर: 45, 135

3 से भाग देने पर: 15, 45

3 से भाग देने पर: 5, 15

3 से भाग देने पर: 5, 5

5 से भाग देने पर: 1, 1

ल.स.प. = 2 × 2 × 3 × 3 × 3 × 5

ल.स.प. = 540

(b) 132 और 198

म.स.प. (HCF) के लिए अभाज्य गुणनखंड:

132 = 2 × 2 × 3 × 11

198 = 2 × 3 × 3 × 11

उभयनिष्ठ (Common) गुणनखंड = 2 × 3 × 11

म.स.प. = 2 × 3 × 11 = 66

ल.स.प. (LCM) के लिए भाग विधि:

2 से भाग देने पर: 66, 99

2 से भाग देने पर: 33, 99

3 से भाग देने पर: 11, 33

3 से भाग देने पर: 11, 11

11 से भाग देने पर: 1, 1

ल.स.प. = 2 × 2 × 3 × 3 × 11

ल.स.प. = 396

अत:

(a) म.स.प. = 90, ल.स.प. = 540

(b) म.स.प. = 66, ल.स.प. = 396

अभ्यास-3.6

(a) 54 और 90

चरण 1: म.स.प.

54 के अभाज्य गुणनखंड = 2 × 3 × 3 × 3

90 के अभाज्य गुणनखंड = 2 × 3 × 3 × 5

उभयनिष्ठ (Common) गुणनखंड = 2 × 3 × 3

म.स.प. = 18

चरण 2: ल.स.प.

ल.स.प. = (उभयनिष्ठ गुणनखंड) : (बचे हुए गुणनखंड)

ल.स.प. = (2 × 3 × 3) × 3 × 5

ल.स.प. = 18 × 15

ल.स.प. = 270

चरण 3: गुणधर्म का सत्यापन

म.स.प. × ल.स.प. = 18 × 270 = 4860

संख्याओं का गुणनफल = 54 × 90 = 4860

अत: म.स.प. × ल.स.प. = संख्याओं का गुणनफल (सत्यापित)

(b) 160 और 120

चरण 1: म.स.प.

160 के अभाज्य गुणनखंड = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 5

120 के अभाज्य गुणनखंड = 2 × 2 × 2 × 3 × 5

उभयनिष्ठ (Common) गुणनखंड = 2 × 2 × 2 × 5

म.स.प. = 40

चरण 2: ल.स.प. (LCM) ज्ञात करना

ल.स.प. = (उभयनिष्ठ गुणनखंड) × (बचे हुए गुणनखंड)

ल.स.प. = (40) × 2 × 2 × 3

ल.स.प. = 40 × 12

ल.स.प. = 480

चरण 3: गुणधार्म का सत्यापन

म.स.प. × ल.स.प. = 40 × 480 = 19200

संख्याओं का गुणनफल = 160 × 120 = 19200

अत: म.स.प. × ल.स.प. = संख्याओं का गुणनफल (सत्यापित)

प्रश्नावली-3.2

1. पहली पंक्ति में 4, 10, 16, 22 तथा दूसरी पंक्ति में 4, 8, 12, 16

अत: 16वाँ स्थान ही अभीष्ट स्थान है।

2. गुणज और गुणनखंड की जाँच

(a) किसी संख्या का गुणज होने के लिए उसके सभी अभाज्य गुणनखंड शामिल होने चाहिए।

$5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 2$ में 7 दो बार और 2 एक बार है।

$5 \times 7 \times 11 \times 11$ में 7 एक बार है (2 बार नहीं) और 2 नहीं है।

अत: $5 \times 7 \times 11 \times 11$ गुणज नहीं है क्योंकि इसमें 72 और 2 नहीं हैं।

(b) गुणनखंड होने के लिए: दूसरी संख्या पहली से पूरी तरह विभाज्य होनी चाहिए।

$5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 2$ में 11 केवल एक बार है, किंतु $5 \times 7 \times 11 \times 11$ में 11 दो बार है।

अत: $5 \times 7 \times 11 \times 11$ गुणनखंड नहीं है।

3. म. स. और ल. स. अभाज्य गुणनखंड रूप में

(a) $3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7$ और $12 \times 7 \times 11$

$12 \times 7 \times 11 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$

$3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 = 3^2 \times 5 \times 7^2$

म.स.: उभयनिष्ठ - 3 (न्यूनतम 1 बार), 7 (न्यूनतम 1 बार)

म.स. $= 3 \times 7 = 21$

ल.स. : 2 (2 बार), 3 (2 बार), 5 (1 बार), 7 (2 बार), 11 (1 बार) ल. स. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 = 97020$

अत: (a) म. स. $= 3 \times 7$

ल.स. $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 11 = 97020$

(b) 45 और 36

$45 = 3 \times 3 \times 5$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

म.स. $= 3 \times 3 = 9$

ल. स. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$

अत: (b) म.स. $= 3^2 = 9$। ल.स. $= 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

4. दो संख्याएँ जिनका म. स. = 1 और ल. स. = 66

$66 = 2 \times 3 \times 11$

म.स. = 1 का अर्थ है संख्याएँ सहअभाज्य हों।

ल.स. = गुणनफल (जब म.स. = 1)

66 के गुणनखंड युग्म: 1×66, 2×33, 3×22, 6×11

म.स. (1,66) = 1, म.स. (2,33) = 1, म. स. (3,22) = 1, म.स. (6,11) = 1

अत: (1 और 66), (2 और 33), (3 और 22), (6 और 11)—ये चारों युग्म सही हैं।

5. गायों की संख्या 3, 5 और 7 तीनों से पूरी तरह विभाज्य होनी चाहिए। ल.स. (3, 5, 7) $= 3 \times 5 \times 7 = 105$ (सभी तीनों सहअभाज्य हैं)

200 से कम गायें: $105 \times 1 = 105$, $105 \times 2 = 210 > 200$ अत: ग्वाले के पास 105 गायें थीं।

6. डिब्बे में घन (बिना रिक्त स्थान के)

डिब्बे की माप : लंबाई = 12 सेमी, चौड़ाई = 18 सेमी, ऊँचाई = 36 सेमी

घन की भुजा को 12, 18 और 36 तीनों का गुणनखंड होना चाहिए।

म.स. (12, 18, 36) = 6

$12 = 2^2 \times 3$, $18 = 2 \times 3^2$, $36 = 2^2 \times 3^2$

म. स. $= 2 \times 3 = 6$

विकल्पों की जाँच:

(a) 9 सेमी : 9 से 12 पूरी तरह विभाज्य नहीं — नहीं

(b) 6 सेमी : 6 से 12, 18, 36 — हाँ

(c) 4 सेमी : 4 से 18 पूरी तरह विभाज्य नहीं—नहीं

(d) 3 सेमी : 3 से 12, 18, 36 — हाँ

(e) 2 सेमी : 2 से 12, 18, 36 — हाँ

अत: (b) 6 सेमी, (d) 3 सेमी, (e) 2 सेमी—ये तीन घन बिना रिक्त स्थान के आ सकते हैं।

7. 306 और 36 दोनों को विभाजित करने वाली सबसे बड़ी संख्या

दोनों को विभाजित करने वाली सबसे बड़ी संख्या = म.स. (306, 36)

$306 = 2 \times 3 \times 3 \times 17$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

म. म. $= 2 \times 3 \times 3 = 18$

अत: 18 – यह 306 और 36 दोनों को पूर्णत: विभाजित करती है।

8. वह छोटी से छोटी संख्या जो 3, 4, 5, 7 से विभाज्य हो, और 11 से भाग देने पर शेष 10 आए।

ल.स. (3, 4, 5, 7) $= 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420$

420 के गुणज: 420, 840, 1260, 1680, ...

इनमें से कौन-सा संख्या को 11 से भाग देन पर शेष 10 आता है?

$420 \div 11 = 38$, शेष = 2

$840 \div 11 = 76$, शेष = 4

$1260 \div 11 = 114$, शेष = 6

$1680 \div 11 = 152$, शेष = 8

$2100 \div 11 = 190$, शेष = 10

अत: वह संख्या 2100 है।

9. 6 और 9 का LCM

LCM (6, 9) = 18

प्रश्नानुसार, संख्या 6 और 18 से विभाजित होनी चाहिए, पर 10 से नहीं,

अत: अभीष्ट संख्या 18 की गुणज होनी चाहिए, जोकि 36 और 72 है।

10. दो भिन्न अभाज्य संख्याओं m, n का ल.स.

दो भिन्न अभाज्य संख्याएँ m और n सहअभाज्य होती हैं (म.स. = 1)

अत: ल.स. $(m, n) = m \times n$

(a) $m \times n$ से कम—असंभव, क्योंकि ल.स. = $m \times n$

(b) दोनों के बीच—असंभव

(c) दोनों से बड़ा—हाँ (जैसे ल. स. (5,7) = 35, जो 5 और 7 दोनों से बड़ा है)

(d) $m \times n$ से कम—असंभव

(e) $m \times n$ से बड़ा असंभव

अत: केवल (c) सही है—दो भिन्न अभाज्य संख्याओं का ल.स. = $m \times n$, जो दोनों से बड़ा होता है।

11. कुत्ता और खरगोश

खरगोश की बढ़त = 150 फीट

प्रत्येक छलांग में कुत्ता 9 फीट, खरगोश 7 फीट कूदता है। प्रत्येक छलांग में कुत्ता $9 - 7 = 2$ फीट की बढ़त कम करता है। बढ़त समाप्त होने के लिए: $150 \div 2 = 75$ छलाँगें

अत: कुत्ता 75 छलोगों में खरगोश को पकड़ लेगा।

12. 1 से 10 तक सभी का गुणज

वह छोटी से छोटी संख्या = ल.स. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10)

$2 = 2, 3 = 3, 4 = 2^2, 5 = 5, 6 = 2 \times 3, 8 = 2^3, 9 = 3^2, 10 = 2 \times 5$

ल. स. $= 2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \times 9 \times 5 = 360$

अत: वह सबसे छोटी संख्या 360 है।

13. महावीराचार्य का प्रश्न : भिन्नों का योग

दी गई भिन्नें : $\frac{8}{15}+\frac{1}{20}+\frac{7}{36}+\frac{11}{63}+\frac{1}{21}$

ल. स. (15, 20, 36, 63, 21) ज्ञात करना होगा:

$15 = 3 \times 5, 20 = 2^2 \times 5, 36 = 2^2 \times 3^2, 63 = 3^2 \times 7, 21 = 3 \times 7$

ल. स. $= 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 4 \times 9 \times 5 \times 7 = 1260$

अब सभी भिन्नों को 1260 के हर में बदलें:

$\frac{8}{15} = \frac{672}{1260}$; $\frac{1}{20} = \frac{63}{1260}$; $\frac{7}{36} = \frac{245}{1260}$;

$\frac{11}{63} = \frac{220}{1260}$

$\frac{1}{21} = \frac{60}{1260}$

योग $= \frac{(672+63+245+220+60)}{1260} = \frac{1260}{1260} = 1$

अत: $\frac{8}{15}+\frac{1}{20}+\frac{7}{36}+\frac{11}{63}+\frac{1}{21} = 1$

नोट: ल.स. निकालकर हर समान बनाना सबसे कुशल विधि है।

विविध प्रश्नावली

1. 72 को दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखने पर:

$1 \times 72 = 72$

$2 \times 36 = 72$

$3 \times 24 = 72$

$4 \times 18 = 72$

$6 \times 12 = 72$

$8 \times 9 = 72$

अत: 72 के सभी गुणनखंड हैं:

1. 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

(b) 98 को दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिखने पर:

$1 \times 98 = 98$

$2 \times 49 = 98$

$7 \times 14 = 98$

अत: 98 के सभी गुणनखंड हैं:
1, 2, 7, 14, 49, 98

2. अभाज्य गुणनखंड विधि से म.स.प. (HCF)

(a) 60 के अभाज्य गुणनखंड:
$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

90 के अभाज्य गुणनखंड:
$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

उभयनिष्ठ (Common) गुणनखंड: 2, 3 और 5

म.स.प. = $2 \times 3 \times 5$

अत: म.स.प. = 30

(b) 84 के अभाज्य गुणनखंड:
$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

126 के अभाज्य गुणनखंड:
$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

उभयनिष्ठ (Common) गुणनखंड: 2, 3 और 7

म.स.प. $2 \times 3 \times 7$

अत: म.स.प. = 42

3. ल.स.प. (LCM) ज्ञात कीजिए।

(a) (भाग विधि):

2	9, 12
2	9, 6
2	9, 3
3	3, 1
3	1, 1

ल.स.प. = $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

अत: ल.स.प. = 72

(b) भाग विधि:

2	10, 25
2	5, 25
5	1, 5
5	1, 1

ल.स.प. = $2 \times 2 \times 5 \times 5$

अत: ल.स.प. = 100

4. सह–अभाज्य संख्याएँ : जिन दो संख्याओं का 1 के अलावा कोई साझा गुणनखंड नहीं होता, उन्हें 'सह अभाज्य' कहते हैं। उदाहरण: (8, 9) या (15, 16)।

5. यदि एक संख्या (6) दूसरी (48) का गुणनखंड है:

म.स.प. छोटी संख्या होती है (6)।

ल.स.प. बड़ी संख्या होती है (48)।

6. चरण 1: प्रत्येक संख्या के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करना

36 के अभाज्य गुणनखंड:
$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

54 के अभाज्य गुणनखंड:
$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$

90 के अभाज्य गुणनखंड:
$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

चरण 2: उभयनिष्ठ (Common) गुणनखंडों को चुनना

हमें उन गुणनखंडों को देखना है जो तीनों संख्याओं में मौजूद हैं:

तीनों में एक बार 2 आया है।

तीनों में दो बार 3 (अर्थात 3×3) आया है।

चरण 3: म.स.प. की गणना:

म.स.प. = $2 \times 3 \times 3$

म.स.प. = 2×9.

म.स.प. = 18

अत: 36, 54 और 90 का म.स.प. 18 है।

7. ल.स.प. ज्ञात करने के लिए सभी भाजकों का आपस में गुणा करते हैं:

ल.स.प. = $2 \times 2 \times 3 \times 5$

ल.स.प. = $4 \times 3 \times 5$

ल.स.प. = 12×5

ल.स.प. = 60

अत: 15 और 20 का ल.स.प. 60 है।

8. सत्य।

9. दिया गया है:

म.स.प. (HCF) = 4

ल.स.प. (LCM) = 96

चरण 1: संख्याओं को मानना

चूंकि म.स.प. 4 है, इसलिए दोनों संख्याएँ 4 की गुणांक (Multiples) होनी चाहिए।

मान लेते हैं कि पहली संख्या = 4a और दूसरी संख्या = 4b
(यहाँ 'a' और 'b' ऐसी संख्याएँ हैं जिनमें 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।)
चरण 2: सूत्र का उपयोग
हम जानते हैं कि:
संख्याओं का गुणनफल = म.स.प. × ल.स.प.
अत: $4a \times 4b = 4 \times 96$
$16ab = 384$
$ab = \frac{384}{16}$
$ab = 24$
चरण 3: 'a' और 'b' के संभावित जोड़े ढूँढना
हमें ऐसी दो संख्याएँ ढूँढनी हैं जिनका गुणा करने पर 24 आए और उनमें कुछ भी कॉमन न हो (सह–अभाज्य):
1. यदि a = 1, b = 24 (जोड़ा: 1, 24)
2. यदि a = 3, b = 8 (जोड़ा: 3, 8)
(**नोट:** हम 2, 12 या 4, 6 नहीं ले सकते क्योंकि उनमें 2 कॉमन है, जिससे म.स.प. बदल जाएगा।)
चरण 4: संख्याएँ ज्ञात करना
स्थिति 1 (जोड़ा 1, 24 से) :
पहली संख्या = 4 × 1 = 4
दूसरी संख्या = 4 × 24 = 96
(**जाँच:** 4 और 96 का म.स.प. और ल.स.प. 96 है।)
स्थिति 2 (जोड़ा 3, 8 से):
पहली संख्या = 4 × 3 = 12
दूसरी संख्या = 4 × 8 = 32
(**जाँच:** 12 और 32 का म.स.प. 4 और ल.स.प. 96 है।)
अत: ऐसी दो संख्याओं के संभावित जोड़े (4, 96) या (12, 32) हो सकते हैं।
संभावित जोड़ी: 12 और 32 (क्योंकि 12 × 32 = 384 और (4 × 96) = 384)।
10. संबंध सत्यापित करें (28 और 70 के लिए):
म.स.प. = 14, ल.स.प. = 140
म.स.प. × ल.स.प. = 14 × 140 = 1960
संख्याओं का गुणनफल = 28 × 70 = 1960
अत:, 1960 = 1960 (सत्यापित)

4. बिंदु के आगे एक और झलक

अभ्यास–4.1

1. पहले गुणा करें, फिर दसवें (÷10) सौवें (÷100) और हजारवें (÷1000) भाग ज्ञात करें:
(a) 24 × 31 = 744
दसवाँ भाग: 74.4
सौवाँ भाग: 7.44
हजारवाँ भाग: 0.744
(b) 3.8 × 40.5 = 153.9
दसवाँ भाग: 15.39
सौवाँ भाग: 1.539
हजारवाँ भाग: 0.1539
(c) 223.6 × 43.8 = 9793.68
दसवाँ भाग: 979.368
सौवाँ भाग: 97.9368
हजारवाँ भाग: 9.79368
(d) 325 × 24 = 7800
दसवाँ भाग: 780.0
सौवाँ भाग: 78.00
हजारवाँ भाग: 7.800

2. मान ज्ञात कीजिए (दशमलव खिसकाने का नियम):
(a) 23.43 × 10 = 234.3
(b) 356.82 × 100 = 35682
(c) 58.964 × 100 = 5896.4
(d) 32.5 × 1000 = 32500

3. यदि 985 × 653 = 643205 है, तो:
(a) 9.85 × 653 = 6432.05 (2 स्थान बाद दशमलव)
(b) 98.5 × 65.3 = 6432.05 (1 + 1 = 2 स्थान बाद दशमलव)
(c) 0.985 × 65.3 = 64.3205 (3 + 1 = 4 स्थान बाद दशमलव)

(d) 98.5 × 6.53 = 643.205 (1 + 2 = 3 स्थान बाद दशमलव)

4. दूध का कुल उपयोगः

एक दिन का उपयोग = 3.5 लीटर

31 दिनों का उपयोग = 3.5 × 31 = 108.5 लीटर

प्रश्नावली-4.1

1. दशमलव गुणनफल (दसवाँ भाग/सौवाँ भाग)

(a) 6 × 4 दसवाँ भाग = 24 दसवाँ भाग

अतः (a) 24 दसवाँ भाग = 2.4

(b) $7 \times 0.3 = 7 \times \frac{3}{10} = \frac{21}{10}$ = 21दसवाँ भाग

अतः (b) 21 दसवाँ भाग = 2.1

(c) 9 × 5 सौवाँ भाग = 45 सौवाँ भाग

अतः (c) 45 सौवाँ भाग = 0.45

2. गुणनफल ज्ञात कीजिए

(a) 27.34 × 6

2734 × 6 = 16404

दशमलव अंकः 2 + 0 = 2

अतः (a) 164.04

(b) 4.23 × 3.7

423 × 37 : 423 × 30 = 12690, 423 × 7 = 2961

423 × 37 = 15651

दशमलव अंकः 2 + 1 = 3

अतः (b) 15.651

(c) 0.432 × 0.23

432 × 23 : 432 × 20 = 8640, 432 × 3 = 1296

432 × 23 = 9936

दशमलव अंकः 3 + 2 = 5

अतः (c) 0.09936

3. 1 कमीज के लिए कपड़ा = 1.65 मीटर

3 कमीजों के लिए = 1.65 × 3

165 × 3 = 495, दशमलव अंकः 2

अतः 3 कमीजों के लिए 4.95 मीटर कपड़ा चाहिए।

4. मीनू का कुल खर्च

4 कॉपियों का मूल्य = 4 × 15.50 = ₹62.00

3 रबरों का मूल्य = 3 × 2.75 = ₹8.25

कुल खर्च = 62.00 + 8.25

अतः मीनू ने कुल ₹70.25 खर्च किए।

5. 1 रुपये के सिक्के की मोटाई = 1.45 मिमी

36 सिक्कों की कुल ऊँचाई = 1.45 × 36

145 × 36

= 145 × 36 = 5220, दशमलव अंकः 2

कुल ऊँचाई = 52.20 मिमी

मिमी को सेमी में बदलने परः 52.20 ÷ 10 = 5.220 सेमी अतः सिक्कों की कुल ऊँचाई 5.22 सेमी है।

6. 1 किग्रा संतरे का मूल्य = ₹56.50

2.250 किग्रा का मूल्य = 56.50 × 2.250

56.5 × 2.25: 565 × 225 = 127125, दशमलव अंकः 3

56.50 को 56.5 और 2.250 को 2.25 लिख सकते हैं क्योंकि दशमलव के बाद अंत में शून्य मान नहीं बदलता।

दोनों तरह लिखने पर गुणनफल समान मिलेगा।

अतः 2.250 किग्रा संतरों का मूल्य ₹127.125 है।

7. क्रय मूल्य = ₹23.6 प्रति कॉपी

विक्रय मूल्य = ₹30.00 प्रति कॉपी

1 कॉपी पर लाभ = ₹30.00 – ₹23.60 = ₹6.40

50 कॉपियों पर लाभ = 6.40 × 50

640 × 50 = 32000, दशमलव अंकः 2 → 320.00

अतः द्वारकानाथ को एक सप्ताह में ₹320 का लाभ होता है।

8. (a) 18 × 1.2 → दशमलव अंक 1 → 21.6

(b) 18 × 0.12 → दशमलव अंक 2 → 2.16

(c) 1.8 × 1.2 → दशमलव अंक 2 → 2.16

(d) 0.18 × 0.12 → दशमलव अंक 4 → 0.0216

(e) 0.018 × 0.012 → दशमलव अंक 6 → 0.000216

(f) 1.8 × 12 → दशमलव अंक 1 → 21.6

9. गुणनफल 1 से कम कब ?

बिना गुणा किएः जब दोनों संख्याएँ 0 और 1 के बीच हों, तब उनका गुणनफल सदैव 1 से कम होता है।

(a) 7 × 0.6 : 7 > 1, गुणनफल 1 से अधिक (= 4.2)

(b) 0.7 × 0.6 : दोनों 0 और 1 के बीच → गुणनफल 1 से कम (= 0.42)

(c) 0.7 × 6 : 6 > 1, गुणनफल 1 से अधिक (= 4.2)

(d) 0.07 × 0.06 : दोनों 0 और 1 के बीच गुणनफल 1 से कम (= 0.0042)

अत: (b) और (d) में गुणनफल 1 से कम है।

10. 10, 100, 1000 से गुणा

दशमलव संख्या	× 10	× 100	× 1000
5.7	57	570	5700
23.02	230.2	2302	23020
0.92	9.2	92	920
0.306	3.06	30.6	306
24.67	246.7	2467	24670

प्रश्नावली–4.2

1. (a) $\frac{18}{5} = \frac{(18\times2)}{(5\times2)} = \frac{36}{10}$

अत: (a) $\frac{36}{10} = 3.6$

दहाई इकाई दसवाँ
5 | 18 | 0 3 .6
−15
30
−30
0

(b) $\frac{415}{4} = \frac{(415\times25)}{(4\times25)} = \frac{10375}{100}$

अत: (b) $\frac{10375}{100} = 103.75$

हजार दहाई इकाई दसवाँ सौवाँ
4 | 415 | 1 0 3 . 7 5
−4
×15
−12
30
−28
20
20
×

$\therefore \frac{415}{4} = 103.75$

(c) $\frac{1217}{2} = \frac{1217\times5}{2\times5} = \frac{6085}{10}$

अत: (c) $\frac{6085}{10} = 608.5$

हजार दहाई इकाई दसवाँ
2 | 1217 | 6 0 8 . 5
−12
017
−16
10
−10
0

$\therefore \frac{1217}{2} = 608.5$

(d) $\frac{4827}{8} = \frac{(4827\times125)}{(8\times125)} = \frac{603375}{1000}$

अत: (d) $\frac{603375}{1000} = 603.375$

8 | 4827 | 0 6 0 3 . 3 7 5
−48
027
−24
3 0
−2 4
6 0
− 5 6
4 0
− 4 0
×

4827 ÷ 8 = 0603.375

2. (a) $\frac{1526}{4} = \frac{(1526\times25)}{4\times25} = \frac{38150}{100}$

= 381.50

अत: (a) 381.5 → विकल्प (iii)

(b) $\frac{3567}{8} = \frac{(3567 \times 125)}{8 \times 125} = \frac{445875}{1000}$

= 445.875

अत: (iii) 445.875

3. आधार: 132 ÷ 4 = 33

(a) 132 ÷ 4 = 33.000 → 33

(b) 13.2 ÷ 4: दशमलव अंक 1 → 3.3

(c) 1.32 ÷ 4: दशमलव अंक 2 → 0.33

(d) 0.132 ÷ 4: दशमलव अंक 3 → 0.033

अत: (a) 33 (b) 3.3 (c) 0.33 (d) 0.033

4. आधार: 126 ÷ 8 की गणना

```
8 | 126 | 1 5 . 7 5
    8
   ----
    46
    40
   ----
     60
     56
   ----
     40
     40
   ----
      ×
```

126 ÷ 8 = 15.75

(a) 126 ÷ 8 = 15.75

(b) 12.6 ÷ 8: दशमलव 1 अंक → 1.575

(c) 1.26 ÷ 8: दशमलव 2 अंक → 0.1575

(d) 0.126 ÷ 8: दशमलव 3 अंक → 0.01575

(e) 0.0126 ÷ 8: दशमलव 4 अंक → 0.001575

अत: (a) 15.75 (b) 1.575 (c) 0.1575 (d) 0.01575 (e) 0.001575

प्रश्नावली–4.3

1. भिन्न को दशमलव में बदलिए–

(a) $\frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$

अत: (a) 0.4

(b) $\frac{13}{4} = \frac{13 \times 25}{4 \times 25} = \frac{325}{100}$

अत: (b) 3.25

(c) $\frac{4}{50} = \frac{4 \times 2}{50 \times 2} = \frac{8}{100}$ अत: (c) 0.08

(d) $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 125}{8 \times 125} = \frac{625}{1000}$

अत: (d) 0.625

2. भागफल ज्ञात कीजिए–

(a) 24.86 ÷ 1.2

दोनों को 10 से गुणा करें: 248.6 ÷ 12

```
12 | 248.6 | 20.71....
     240
    -----
      86
      84
    -----
       20
       12
    -----
        8 शेष
```

यह एक असांत दशमलव है।

(b) 5.728 ÷ 1.52

दोनों को 100 से गुणा करें: 572.8 ÷ 152

```
152 | 572.8 | 3.76....
      456
     -----
      1168
      1064
     -----
      1040
       912
     -----
       128 शेष
```

यह भी असांत दशमलव है।

अत: 5.728 ÷ 1.52 ≈ 3.77 (2 दशमलव स्थान तक)

3. 156 × 12 = 1872 का उपयोग करके

(a) 15.6 × 1.2: दशमलव अंक 1 + 1 = 2

1872 में 2 दशमलव स्थान → 18.72

अत: (a) 18.72

(b) 187.2 ÷ 1.2

दोनों को 10 से गुणा: 1872 ÷ 12 = 156

अत: (b) 156

(c) 18.72 ÷ 15.6

दोनों को 10 से गुणा: 187.2 ÷ 156

$\frac{187.2}{156} = \frac{1872}{1560} = \frac{156 \times 12}{(156 \times 10)} = \frac{12}{10} = 1.2$

अत: (c) 1.2

(d) 0.156 × 0.12: दशमलव अंक 3 + 2 = 5

1872 में 5 दशमलव स्थान → 0.01872

अत: (d) 0.01872

4. रिक्त स्थान भरिए—

माना रिक्त स्थान पर संख्या x है—

(a) $25 \div x = 250 \Rightarrow x = \frac{25}{0.025} = 1000$

(b) $25 \div x = 250 \Rightarrow x = \frac{25}{250} = 0.1$

(c) $25 \div x = 2.5 \Rightarrow x = \frac{25}{2.5} = 10$

(d) $25 \div 10 = 25 \times x \Rightarrow \frac{25}{10} = 25 \times (x)$

$\frac{25}{10 \times 25} = x$

$x = \frac{1}{10}$

$x = 0.1$

(e) $25 \div 0.10 = 25 \times x \Rightarrow \frac{25}{0.1 \times 25} = x \Rightarrow$ $x = 10$

(f) $25 \div 0.01 = 25 \times x \Rightarrow \frac{25}{0.01 \times 25} = x$ $\Rightarrow x = 100$

5. भागफल ज्ञात कीजिए—

(a) $2.46 \div 1.5$

दोनों संख्याओं में 10 से गुणा करने पर

$24.6 \div 15 = \frac{246}{150} = \frac{82}{50} = 1.64$

(b) $2.46 \div 0.15$

दोनों संख्याओं में 100 से गुणा करने पर

$246 \div 15 = \frac{82}{5} = 16.4$

(c) $2.46 \div 0.015$

दोनों संख्याओं में 1000 से गुणा करने पर

$2460 \div 15 = 164$

$24.6 \div 1.5 = \frac{2460}{150} = \frac{82}{5} = 16.4$

$2.46 \div 0.15 = \frac{246}{15} = \frac{82}{5} = 16.4$

अत: हाँ, $24.6 \div 1.5$ और $2.46 \div 0.15$ का भागफल समान (16.4) है।

6. लकड़ी की लंबाई = 4 मी., टुकड़ों की संख्या = 5

प्रत्येक टुकड़े की लंबाई = $4 \div 5 = \frac{4}{5}$ मी.

$\frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10} = 0.8$

अत: प्रत्येक टुकड़े की लंबाई 0.8 मी. है।

7. सम बहुभुज में भुजाओं की संख्या = 12, परिमाप = 208.8 सेमी

एक भुजा की लंबाई = $208.8 \div 12$

दोनों संख्याओं में 10 से गुणा करने पर

$2088 \div 120 = 17.4$

अत: प्रत्येक भुजा की लंबाई 17.4 सेमी है।

8. कुल रस = 3 ली., मित्रों की संख्या = 8

प्रत्येक को रस = $3 \div 8 = \frac{3}{8}$

$\frac{3 \times 125}{8 \times 125} = \frac{375}{1000} = 0.375$ ली. को मिली में बदलने पर: $0.375 \times 1000 = 375$ मिली.

अत: प्रत्येक मित्र को 375 मिली. रस मिलेगा।

9. कुल दूरी = 234.45 किमी., पेट्रोल की कुल मात्रा = 12.6 ली.

प्रति लीटर चली गई दूरी = $234.45 \div 12.6$

दोनों संख्याओं में 10 से गुणा करने पर

$2344.5 \div 126 = 18.60.....$

यह असांत आवर्ती दशमलव है

$\rightarrow 18.607142857....$

अत: प्रति लीटर दूरी ≈ 18.607 (लगभग) किमी (2 दशमलव स्थान तक)

10. कुल आटा = 13.5 किग्रा, विद्यार्थियों की संख्या = 15

प्रत्येक विद्यार्थी को प्राप्त आटा = $13.5 \div 15$

$= \frac{135}{150} = \frac{9}{10}$

अत: प्रत्येक विद्यार्थी को 0.9 किग्रा आटा मिला।

अभ्यास-4.2

1. रस्सी की कुल लंबाई = 138.6 मीटर

प्रत्येक दोस्त का हिस्सा = 138.6 ÷ 7 = 19.8 मीटर

2. 11.5 लीटर में तय की गई दूरी = 241.5 किमी

1 लीटर में तय की गई दूरी = 241.5 ÷ 11.5 = 21 किमी

3. यदि 56 × 92 = 5152 है, तो:

(a) 0.56 × 92 = 51.52

(b) 5.6 × 9.2 = 51.52

(c) 0.056 × 92 = 5.152

(d) 0.56 × 0.92 = 0.5152

4. लुप्त संख्या ज्ञात करें:

(a) 35 ÷ $\boxed{1000}$ = 0.035

(b) 832 ÷ $\boxed{100}$ = 8.32

(c) 2968 ÷ $\boxed{10000}$ = 0.2968

5. भागफल ज्ञात कीजिए:

(a) 23.5 ÷ 2.5 = 9.4

(b) 3.86 ÷ 0.25 = 15.44

(c) 296 ÷ 0.025 = 11840

(d) 999.8 ÷ 0.005 = 199960

6. 24 उपहारों की लागत = ₹ 525.6

प्रत्येक उपहार की लागत = 525.6 ÷ 24 = ₹ 21.9

प्रश्नावली-4.4

1. 210 ग्राम मूंगफली की चिक्की की कीमत = ₹ 70

तब 1 ग्राम मूंगफली की चिक्की की कीमत

$= \frac{70}{210} \approx$ ₹ 0.34

110 ग्राम आलू के चिप्स की कीमत = ₹ 33.25

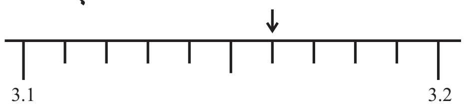
तब 1 ग्राम आलू के चिप्स की कीमत $= \frac{33.25}{110}$

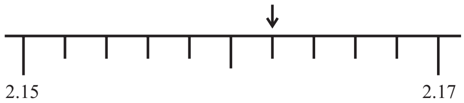
= ₹ 0.30

तुलना करने पर,

चूँकि ₹ 0.30 < ₹ 0.34, इसलिए आलू के चिप्स प्रति ग्राम सस्ते हैं।

2. तीर के निशान पर दशमलव संख्या लिखिए :





पहली संख्या रेखा: 3.1 से 3.2 के बीच 10 बराबर भाग है

प्रत्येक भाग $= \frac{(3.2 - 3.1)}{10} = 0.01$

तीर 7वें चिह्न पर → 3.1 + 7 × 0.01 = 3.17

अत: पहली संख्या रेखा: 3.17

दूसरी संख्या रेखा: 2.15 से 2.17 के बीच 10 बराबर भाग

प्रत्येक भाग $= \frac{(2.17 - 2.15)}{10} = 0.002$

तीर 5वें चिह्न पर → 2.15 + 5 × 0.002 = 2.160

अत: दूसरी संख्या रेखा: 2.16

3. केले का क्रय मूल्य = 3 किग्रा × ₹30 = ₹90

केले का विक्रय मूल्य = 35 × ₹5 = ₹175

लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य = ₹175 – 90

अत: श्यामला को ₹85 का लाभ हुआ।

4. प्रत्येक पुस्तक की मोटाई = 2.5 सेमी

शेल्फ की लंबाई = 160 सेमी

अधिकतम पुस्तकें जो अलमारी पर रखी जा सकती है $= 160 \div 2.5 = \frac{1600}{25} = 64$

64 × 2.5 = 160 सेमी → पूरी शेल्फ भर जाती है।

अत: 64 पुस्तकें रखी जा सकती हैं। कोई जगह शेष नहीं बचती।

5.

प्रश्न	उत्तर
5.5 किमी. = ...मी.	5500 मी.
35 सेमी. = ...मी.	0.35 मी.
14.5 सेमी. = ...मिमी.	145 मिमी.
68 ग्राम. = ...किग्रा.	0.068 किग्रा.
9.02 मी. = ... मिमी.	9020 मिमी.
125.5 मिली. = ...ली.	0.1255 ली.

6. दशमलव में बदलने पर

$6 + \frac{1}{4} = 6.25, 2 + \frac{1}{2} = 2.5$

$6.25 \div 2.5 = \frac{62.5}{25} = \frac{625}{250} = \frac{5}{2}$

अत: पहला भागफल 2.5 है।

$60 + \frac{1}{4} = 60.25, 3 + \frac{1}{2} = 3.5$

$60.25 \div 3.5 = \frac{6025}{350} = \frac{241}{14}$

$\frac{241}{14} = 17 + \frac{3}{14}, \frac{3}{14}$

= 0.2142857.... (आवर्ती दशमलव)

अत: दूसरा भागफल $\frac{241}{14} \approx 17.21$ है।

7. (a) $\square \times \square = 2.4$

तरीका 1: $1.2 \times 2 = 2.4$

तरीका 2: $0.8 \times 3 = 2.4$

तरीका 3: $0.6 \times 4 = 2.4$

अत: (a) उदाहरण: $1.2 \times 2 = 2.4$ और $0.8 \times 3 = 2.4$

(b) $\square \times \square = 14.5$

तरीका 1: $2.9 \times 5 = 14.5$

तरीका 2: $29 \times 0.5 = 14.5$

तरीका 3: $7.25 \times 2 = 14.5$

अत: (b) उदाहरण: $2.9 \times 5 = 14.5$ और $29 \times 0.5 = 14.5$

8. दिए गए उदाहरण $756 \div 36 = 21$ के आधार पर हल:

(a) $75.6 \div 3.6 = \frac{75.6}{3.6} = 21$

(b) $7.56 \div 0.36 = \frac{7.56}{0.36} = 21$

(c) $756 \div 0.36 = \frac{756}{0.36} = 2100$

(d) $75.6 \div 360 = \frac{75.6}{360} = \frac{756}{3600} = \frac{21}{100} = 0.21$

(e) $7560 \div 3.6 = \frac{7560}{3.6} = 2100$

(f) $7.56 \div 0.36 = \frac{7.56}{0.36} = 21$ (b के समान)

9. आधार 151737 = 41। दोनों में 10 का गुणज करने पर भागफल नहीं बदलता।

b↓ a→	1517	151.7	15.17	1.517	15170
37	41	4.1	0.41	0.041	410
3.7	410	41	4.1	0.41	4100
0.37	4100	410	41	4.1	4100
0.037	41000	4100	410	41	410000
370	4.1	0.41	0.041	0.0041	41

10. (a) अधिकतम गुणनफल:

$82.0 \times 5.4 = 442.8$

(या $54.0 \times 8.2 = 442.8$)

अत: (a) अधिकतम गुणनफल = 442.8

(b) न्यूनतम गुणनफल: $20.5 \times 0.4 = 8.2$

अत: (b) न्यूनतम गुणनफल = 8.2

(c) 150 से अधिक गुणनफल:

$85.4 \times 2.0 = 170.8$ (> 150)

अत: (c) $85.4 \times 2.0 = 170.8$

(d) 100 के सबसे निकट गुणनफल:

$20.5 \times 4.8 = 98.4$ (100 से अंतर = 1.6)

$40.8 \times 2.5 = 102.0$ (100 से अंतर = 2.0)

अत: (d) $20.5 \times 4.8 = 98.4$ (100 के सबसे निकट)

(e) 5 के सबसे निकट गुणनफल:

$8.2 \times 0.5 = 4.1$ (5 के सबसे निकट)

अत: (e) $8.2 \times 0.5 = 4.1$ (5 के सबसे निकट)

11. दिए गए व्यंजक और उनके अनुमानित मान:

(f) 7.9682 = 7.97

(c) $245.05 \div 7.9682 \approx 30.75$

(a) $245.05 \times 0.942368 \approx 230.9$

(e) 245.05 = 245.05

(d) $245.05 \div 0.942368 \approx 260.1$

(b) $245.05 \times 7.9682 \approx 1952.6$

विविध प्रश्नावली

1. गुणनफल ज्ञात कीजिए:

(a) $8 \times 0.4 = 3.2$

(b) $6 \times 0.07 = 0.42$

(c) $14.6 \times 5 = 73$

(d) $3.75 \times 8 = 30$

2. 1 ड्रेस के लिए कपड़े की लम्बाई
= 2.35 मीटर
4 ड्रेस के लिए कपड़े की लम्बाई
= 2.35 × 4 = 9.4 मीटर
अत: 4 ड्रेस के लिए कपड़े की लम्बाई 9.4 मी. है।

3. 1 नोटबुक की कीमत = ₹ 18.75
12 नोटबुक की कीमत = 18.75 × 12 = ₹ 225
अत: 12 नोटबुक की कीमत ₹ 225 है।

4. 1 सिक्के की मोटाई = 1.6 मिमी
25 सिक्के की मोटाई = 1.6 × 25 = 40 मिमी
सेमी में ऊँचाई = 40 ÷ 10 = 4 सेमी

5. (a) 24.6 ÷ 10 = 2.46
(b) 24.6 ÷ 100 = 0.246

6. रिबन की कुल लम्बाई = 6.3 मीटर
प्रत्येक टुकड़े की लम्बाई = 6.3 ÷ 7 = 0.9 मीटर

7. दशमलव रूप:
$$\frac{7}{20} = \frac{(7 \times 5)}{(20 \times 5)} = \frac{35}{100} = 0.35$$

8. भागफल:
(a) 15 ÷ 4 = 3.75
(b) 1.54 ÷ 0.375

9. चीनी की कुल मात्रा = 7.2 किग्रा
प्रत्येक बैग में चीनी का वजन = $\frac{7.2}{6}$ = 1.2 किग्रा
अत: प्रत्येक बैग में चीनी का वजन 1.2 किग्रा है।

10. दशमलव प्रसार:
$$\frac{3}{8} = 0.375$$
यह शांत (Terminating) दशमलव प्रसार है।

5. बिंदुओं को जोड़ना

अभ्यास–5.1
सांख्यिकीय प्रश्न वे होते हैं जिनके उत्तर में भिन्नता (Variability) होती है और डेटा एकत्र करना पड़ता है।

1. (नहीं, यह एक तथ्य है)
2. हाँ (हर छात्र का समय अलग होगा)
3. (नहीं, यह एक निश्चित माप है)
4. हाँ (सबकी पसंद अलग हो सकती है)
5. (आम तौर पर नहीं, यह जैविक तथ्य है)
6. हाँ (दिनों के हिसाब से संख्या बदल सकती है)

अभ्यास–5.2
1. सिमरन की कूद का औसत:
कुल योग = 12 + 20 + 15 + 8 + 25 + 10 = 90
कुल प्रयास = 6
औसत = $\frac{\text{कुल योग}}{\text{कुल प्रयास}}$ = 90 ÷ 6 = 15

2. स्वयं कीजिए

3. अली और जारा द्वारा पन्नों को पढ़ने का औसत:
अली द्वारा पढ़े गये पन्नों का योग = 10 + 15 + 12 + 20 + 18 = 75; औसत
$\frac{\text{पढ़े गये पन्नों का योग}}{\text{कुल दिनों की संख्या}}$ = 75 ÷ 5 = 15
जारा द्वारा पढ़े गये पन्नों का योग = 25 + 5 + 10 + 30 + 15 = 85; औसत
$\frac{\text{पढ़े गये पन्नों का योग}}{\text{कुल दिनों की संख्या}}$ = 85 ÷ 5 = 17
उत्तर: जारा का पढ़ने का औसत अधिक है।

4. लाइब्रेरी की किताबों का औसत:
= 120 + 145 + 110 + 160 + 155 = 690
औसत = $\frac{\text{किताबों की कुल संख्या}}{\text{कुल महीने}}$
= 690 ÷ 5 = 138
अत: प्रतिमाह ली गई किताबों की औसत संख्या 138 है।

5. औसत नामांकन:
= 1420 + 1490 + 1580 + 1650 + 1720 + 1800 = 9660
औसत = $\frac{\text{छात्रों की कुल संख्या}}{\text{कुल वर्ष}}$

= 9660 ÷ 6 = 1610

अतः औसत नामांकन 1610 है।

अभ्यास–5.3

1. डेटा: 5, 10, 15, 20, 100

माध्य = (5 + 10 + 15 + 20 + 100) ÷ 5

= 150

$\frac{\Sigma x}{n}\begin{pmatrix}\Sigma x = 150 \\ n = 5\end{pmatrix}$

$= \frac{50}{5}$

माध्यिका (बीच का पद (क्रम में)) = 15

2. 1. यहाँ कुल 4 पद हैं (n = 4)। चूँकि पदों की संख्या सम (Even) है, इसलिए माध्यिका बीच के दो पदों का औसत होगी।

2. प्रश्नानुसार माध्यिका = (दूसरा पद + तीसरा पद) ÷ 2

3. प्रश्न के अनुसार डेटा क्रमबद्ध है। यदि हम x को पहला पद मानें, तो दूसरा पद 10 और तीसरा पद 12 होगा।

माध्यिका = (10 + 12) ÷ 2

माध्यिका = 22 ÷ 2 = 11

अभ्यास–5.4

(1) आलू की माध्यिका कीमत ज्ञात करना

माध्यिका निकालने के लिए सबसे पहले कीमतों को बढ़ते क्रम में लिखना होता है।

ग्रीन बाजार:

कीमतें: 20, 25, 22, 30, 28

बढ़ता क्रम: 20, 22, 25, 28, 30

चूंकि यहाँ 5 पद हैं, तो बीच का पद (तीसरा) माध्यिका है। इस प्रकार माध्यिका ₹25 है।

ताजा बाजार:

कीमतें: 18, 40, 22, 25, 25

बढ़ता क्रम: 18, 22, 25, 25, 40

बीच का पद (तीसरा) माध्यिका है।

इस प्रकार माध्यिका = ₹ 225 है।

(2) पुस्तकों का डेटा (माध्य और माध्यिका)

यहाँ '—' का अर्थ है छात्र अनुपस्थित थे, इसलिए हम गणना में केवल मौजूद अंकों का उपयोग करेंगे।

डेटा: 3, 5, 0, 1, 4, 2, 0, 6, 2 (कुल 9 छात्रों का डेटा)

माध्य ज्ञात करना:

कुल योग = 3 + 5 + 0 + 1 + 4 + 2 + 0 + 6 + 2 = 23

छात्रों की संख्या = 9

माध्य = 23 ÷ 9 = 2.55 पुस्तकें

माध्यिका ज्ञात करना:

बढ़ता क्रम: 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6

बीच का पद (5वाँ पद) = 2 पुस्तकें

डेटा का वर्णन: अधिकतर छात्रों ने 2 पुस्तकें पढ़ी हैं। माध्य (2.55) माध्यिका (2) से थोड़ा अधिक है क्योंकि '6' जैसी बड़ी संख्या औसत को थोड़ा बढ़ा रही है।

(3) सूरजमुखी की ऊँचाई का डेटा

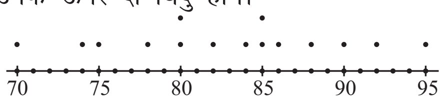
ऊँचाईयाँ (15 फूल): 80, 85, 75, 90, 82, 88, 70, 95, 85, 80, 84, 78, 86, 92, 74

बढ़ता क्रम:

70, 74, 75, 78, 80, 80, 82, 84, 85, 85, 86, 88, 90, 92, 95

डॉट प्लॉट (Dot Plot) :

डॉट प्लॉट में हम एक संख्या रेखा बनाकर प्रत्येक ऊँचाई के ऊपर एक बिंदु (dot) लगाते हैं। यहाँ 80 और 85 दो–दो बार आए हैं, तो उनके ऊपर दो बिंदु होंगे।



माध्य :

कुल योग = 70 + 74 + 75 + 78 + 80 + 80+ 82 + 84 + 85 + 85 + 86 + 88 + 90 + 92 + 95 = 1244

कुल फूल = 15

माध्य = 1239 ÷ 15 = 82.93 सेमी

माध्यिका:

15 पदों में बीच का पद 8वाँ पद होता है।

क्रम में 8वाँ पद = 84 सेमी

प्रश्नावली–5.1

1. गेंद को बल्ले पर उछाले जाने का आँकड़ा = 6, 2, 9, 5, 4, 6, 3, 5 (8 प्रयास)

योग = 6 + 2 + 9 + 5 + 4 + 6 + 3 + 5 = 40

मान = 40 ÷ 8 = 5

अत: औसत उछाल की संख्या = 5

2. स्वयं करें

3. स्वयं करें

4. निखिल का समय (सेकंड): 17, 18, 17, 16, 19, 17, 18; योग = 17 + 18 + 17 + 16 + 19 + 17 + 18 = 122

माध्य = 122 ÷ 7 = 17.43 सेकंड

सुनील का समय (सेकंड): 20, 18, 18, 17, 16, 16, 17; योग = 20 + 18 + 18 + 17 + 16 + 16 + 17 = 122

माध्य = 122 ÷ 7 = 17.43 सेकंड

अत: दोनों का औसत समय समान (17.43 सेकंड) है– कोई तेज नहीं दौड़ा।

5. नामांकन का क्रम: 1555, 1670, 1750, 2013, 2040, 2126

योग = 1555 + 1670 + 1750 + 2013 + 2040 + 2126 = 11154

कुल वर्ष = 6

माध्य = 11154 ÷ 6

अत: माध्य नामांकन = 1859 विद्यार्थी

6. यहाँपुर की कीमतें (₹/kg):

25, 24, 26, 28, 30, 35, 39, 43, 49, 56, 59, 44

आरोही क्रम: 24, 25, 26, 28, 30, 35, 39, 43, 44, 49, 56, 59

n = 12 (सम), माध्यिका (6ठाँ + 7वाँ मान) ÷ 2 = (35 + 39) ÷ 2 = 37

अत: यहाँपुर की माध्यिका = 37 ₹/kg

वहाँपुर की कीमतें (₹/kg):

19, 17, 23, 30, 38, 35, 42, 39, 53, 60, 52, 42

आरोही क्रम: 17, 19, 23, 30, 35, 38, 39, 42, 42, 52, 53, 60

n = 12 (सम), माध्यिका = (6ठाँ + 7वाँ मान) ÷ 2 = (38 + 39) ÷ 2 = 38.5

अत: वहाँपुर की माध्यिका = 38.5 ₹/kg

माध्यिका के अनुसार वहाँपुर थोड़ा महँगा है।

7. दिए गए मान (अनुपस्थित जिन्हें शामिल नहीं किया जाएगा):

0, 1, 0, 4, 8, 0, 0, 2, 1, 1, 5, 3, 4, 0, 0, 10, 25, 2, 2, 4

n = 20 (दो छात्र अनुपस्थित थे, उनके मान नहीं लिए)

योग = 0 + 1 + 0 + 4 + 8 + 0 + 0 + 2 + 1 + 1 + 5 + 3 + 4 + 0 + 0 + 10 + 25 + 2 + 2 + 4 = 72

माध्य = 72 ÷ 20 = 3.6

आरोही क्रम (20 मान) में रखने पर: 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 8, 10, 25

n = 20 (सम), माध्यिका (10वाँ + 11वाँ)/2 = (2 + 2)/2 = 2

अत: माध्य = 3.6, माध्यिका = 2

8. n = 29 पेड़

पेड़ों की ऊँचाइयों का आँकड़ा:

50, 45, 43, 52, 61, 63, 46, 55, 60, 55, 59, 56,56, 49, 54, 65, 66, 51, 44, 58, 60, 54, 52, 57, 61, 62, 60, 60, 67

योग = 50 + 45 + 43 + 52 + 61 + 63 + 46 + 55 + 60 + 55 + 59 + 56 + 49 + 54 + 65 + 66 + 51 + 44 + 58 + 60 + 54 + 52 + 57 + 61 + 62 + 60 + 60 + 67 =1621 फीट

माध्य = 1621 ÷ 29 = 55.9 फीट

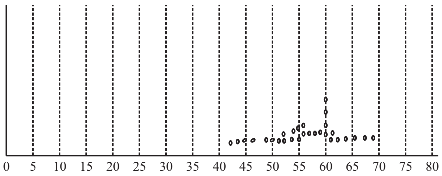
आरोही क्रम:

43, 44, 45, 46, 49, 50, 51, 52, 52, 54, 54, 55, 55, 56, 56, 57, 58, 59, 60, 60, 60, 60, 61, 61, 62, 63, 65, 66, 67

n = 29, माध्यिका = 15वाँ मान = 56 फीट

अत: माध्य = 55.9 फीट, माध्यिका = 56 फीट

औसत ऊँचाई (55.9 फीट) से कम ऊँचाई वाले पेड़ 43, 44, 45, 46, 49, 50, 51, 52, 52, 54, 54, 55, 55 = 13 पेड़ की माध्य और माध्यिका लगभग समान हैं–डेटा में कोई बड़ा विचलित मान नहीं है। पेड़ों की ऊँचाई 43 से 67 फीट के बीच है, अधिकांश 55–60 फीट में केंद्रित हैं।



9. दैनिक पानी के उपयोग का आँकड़ा 5.6, 8, 3.09, 12.9, 6.5, 12.1, 11.3, 20.5, 7.4 (n=9)
= 5.6 + 8 + 3.09 + 12.9 + 6.5 + 12.1 + 11.3 + 20.5 + 7.4 = 87.39

माध्य = 87.39 ÷ 9 = 9.71 लीटर

आरोही क्रम: 3.09, 5.6, 6.5, 7.4, 8, 11.3, 12.1, 12.9, 20.5

n = 9, माध्यिका = 5वाँ मान = 8 लीटर

(a) अधिकतम मान = 20.5 लीटर

माध्य हमेशा न्यूनतम और अधिकतम के बीच होता है।

माध्यिका भी हमेशा आँकड़ों के बीच ही होती है। अत: नहीं। माध्य ≈ 9.71 और माध्यिका = 8—दोनों 25-30 के बीच नहीं हो सकतीं।

(b) नहीं। माध्य और माध्यिका दोनों हमेशा डेटा के न्यूनतम और अधिकतम के बीच होती हैं।

10. लड़कों के वजन का आँकड़ा (किग्रा): 3.5, 4.1, 2.6, 3.2, 3.4, 3.8 (n=6)

योग = 3.5 + 4.1 + 2.6 + 3.2 + 3.4 + 3.8 = 20.6, माध्य = 20.6 ÷ 6 = 3.43 किग्रा

आरोही: 2.6, 3.2, 3.4, 3.5, 3.8, 4.1

माध्यिका = $\frac{3.4+3.5}{2}$ = 3.45 किग्रा

लड़कियों के वजन का आँकड़ा (किग्रा): 4.0, 3.1, 34, 3.7, 2.5, 3.4 (n=6)

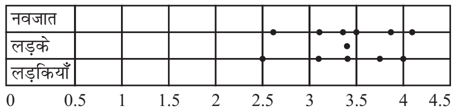
योग = 20.1, माध्य = 20.1 ÷ 6 = 3.35 किग्रा

आरोही: 2.5, 3.1, 3.4, 3.4, 3.7, 4.0

माध्यिका = $\frac{3.4+3.4}{2}$ = 3.40 किग्रा

अत: लड़कों का माध्य ≈ 3.43 किग्रा और लड़कियों का माध्य = 3.35 किग्रा

दोनों के माध्य लगभग समान हैं। लड़कों का माध्य थोड़ा अधिक है। परिसर लड़के 2.6–4.1 किग्रा और लड़कियाँ 2.5–4.0। डेटा में अधिक अंतर नहीं।



11. समग्र कक्षा: माध्य = 141.21, माध्यिका = 142.5

लड़के: माध्य = 142.05, माध्यिका = 143

लड़कियाँ: माध्य = 140.14, माध्यिका = 140

अवलोकन:

1. लड़कों का माध्य (142.05) लड़कियों के माध्य (140.14) से अधिक है।

2. इस कक्षा में लड़के, लड़कियों से औसतन लम्बे हैं—जो पहली कक्षा से विपरीत है।

3. लड़कों की ऊँचाई का माध्य, माध्यिका से कम है। लड़कियों की ऊँचाई का माध्य, माध्यिका से अधिक है।

12. सुमो पहलवानों (किग्रा) के वजनों का आँकड़ा: 295.2, 250.7, 234.1, 221.0, 200.9 (n=5)

योग = 1201.9, माध्य = 1201.9 ÷ 5 = 240.38 किग्रा

बैलेट नर्तक (किग्रा) के वजनों का आँकड़ा: 40.3, 37.6, 38.8, 45.5, 44.1, 48.2 (n=6)

योग = 254.5, माध्य = 254.5 ÷ 6 ≈ 42.42 किग्रा

अनुपात = 240.38 ÷ 42.42 ≈ 5.67

अत: एक सुमो पहलवान, एक बैलेट नर्तक से लगभग 5.5 से 6 गुना भारी है।

अभ्यास–5.5

(1) (a) गलत, क्योंकि डॉल हाउस ने 2024 में 31 हजार और 2025 में 30 हजार खिलौने बनाए।

(b) गलत, स्मार्ट एक्स ने 2023, 2024 और 2025 में 80,000 से अधिाक खिलौने बनाए हैं।

(c) गलत, डॉल हाउस का कुल उत्पादन = 30 + 31 + 30 = 91 हजार (91.000)

(d) सही, फन ब्रिक्स का औसत

$= \frac{40 + 42 + 45}{3} = \frac{127}{3} \approx 42.3$ हजार

यह लगभग 50,000 के आसपास माना जा सकता है।

(2) उन कंपनियों के नाम लिखिए जिन्होंने प्रत्येक वर्ष लगातार वृद्धि (बढ़ोतरी) दिखाई।

फन विक्स $\rightarrow$ 25 $\rightarrow$ 35 $\rightarrow$ 50

पहेली मैत्री $\rightarrow$ 40 $\rightarrow$ 42 $\rightarrow$ 45

स्पीड रेसकूद $\rightarrow$ 85 $\rightarrow$ 90 $\rightarrow$ 95

उत्तर: फन विक्स

पहेली मैत्री स्पीड रेसकूद

(3) 2023 में सभी कंपनियों द्वारा मिलाकर उत्पादित खिलौनों की कुल संख्या का अनुमान लगाइए।

2023 के आँकड़े:

फन विक्स = 25

रोबो टेंग = 60

डॉल हाउस = 30

स्मार्ट एक्स = 85

पहेली मैत्री = 40

योग–25 + 60 + 30 + 85 + 40 = 24025 + 60 + 30 + 85 + 40 = 24025 + 60 + 30 + 85 + 40 = 240

उत्तर: (b) लगभग 240 हजार खिलौने

अर्थात 2,40,000 खिलौने।

प्रश्नावली–5.2

1. (a) मापनी (Scale) = 1 इकाई = 16 किमी/घं.

(b) रोचक बातें:

पेरेग्राइन फाल्कन (322 किमी/घं.) सबसे तेज उड़ने वाला जीव है।

मानव (8 किमी/घं.) सूची में सबसे धीमा जमीनी प्राणी है।

सेलफिश (109 किमी/घं.) पानी में सबसे तेज है।

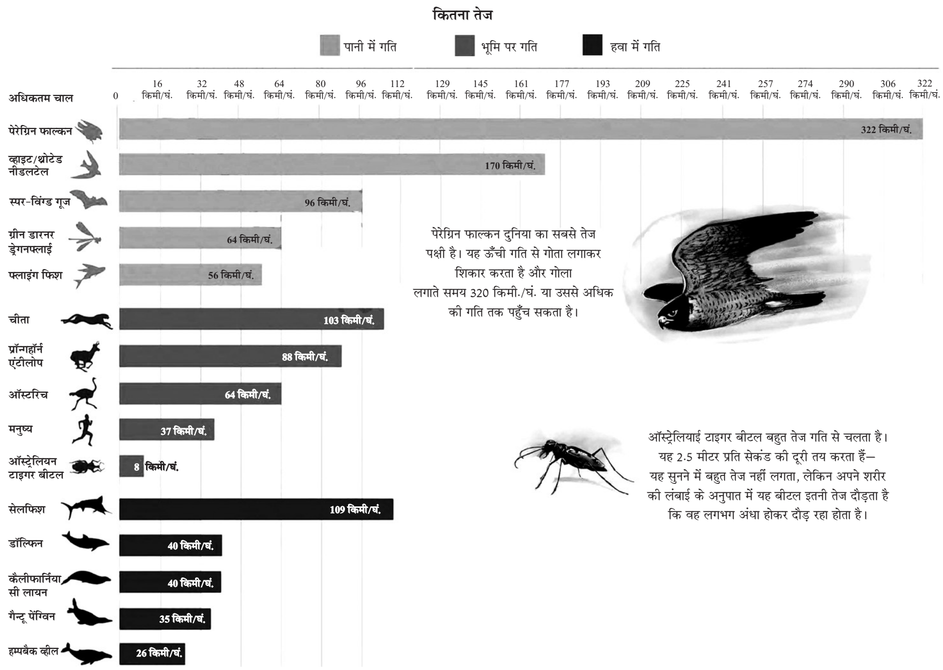
आस्ट्रेलियन टाइगर बीटल या आस्ट्रेलियाई टाइगर भृंग (64 किमी/घं.) जमीन पर तेज दौड़ती है।

(c) जोड़ी जहाँ एक की गति दूसरे की लगभग दोगुनी है: 2 × गैन्टू पेंग्विन (35 किमी/घं.) = शुतुरमुर्ग (64 किमी/घं.) = 2 × 35 ≈ 64

(d) सैलफिश (109 किमी/घं.) और हम्पेक व्हेल (26 किमी/घं.):

अनुपात = 109 ÷ 26 = 4.19 हाँ, लगभग 4 गुना तेज।

लेकिन सबसे तेज जलीय जीव—इस ग्राफ से नहीं कह सकते। अत: (d) सेलफिश लगभग 4 गुना तेज है, लेकिन यह ग्राफ विश्व के सभी जीवों का डेटा नहीं देता।



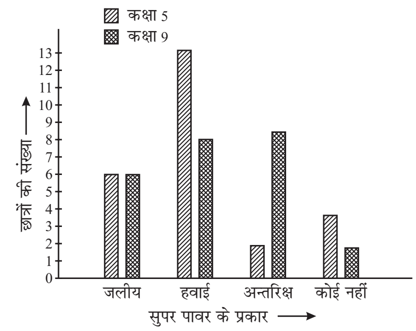
2. प्रतीक: w = जलीय (Aquatic), a = हवाई (Aerial), s = अंतरिक्ष (Space), n = कोई नहीं (None)

प्रश्नानुसार, सारणी बनाने पर

	w	*a*	*s*	*n*
ग्रेड 5	6	13	2	4
ग्रेड 9	6	8	9	2

डबल बार ग्राफ बनाने पर

एक इकाई = 1 विद्यार्थी

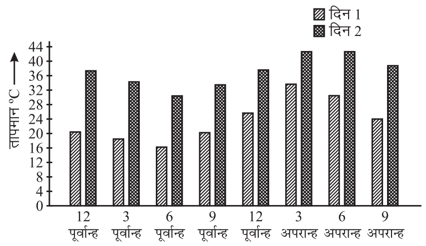


3. डेटा–दो दिनों का 8 समय-बिंदुओं पर तापमान के लिए डबल-बार ग्राफ

मापनी: 1 इकाई = 4°C

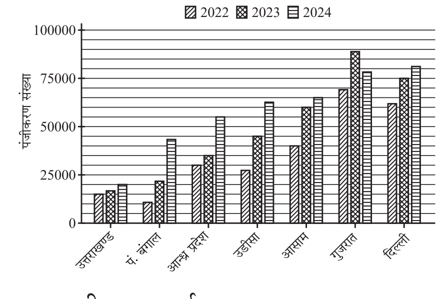
दिन 1 का तापमान परिसर: 16°C – 34 °C (अधिकतम दोपहर 3 बजे)

दिन 2 का तापमान परिसर: 30°C – 43°C (बहुत गर्म)



4. (a) गुजरात और दिल्ली का डेटा (हजारों में):

राज्य	2022	2023	2024
गुजरात	69,000	89,000	78,000
दिल्ली	62,000	74,000	81,000



(b) मापनी: 1 इकाई = 25,000 वाहन। X-अक्ष: राज्य, Y-अक्ष: पंजीकरण संख्या।

(c) 2022 से 2024 के बीच बदलाव:

उत्तराखंड: मामूली वृद्धि

पश्चिम बंगाल: दोगुने से अधिक वृद्धि

आंध्र प्रदेश: तेज वृद्धि

ओडिशा: वृद्धि और फिर स्थिरता

असम: तेज वृद्धि गुजरात: 2023 में चरम, 2024 में घटाव

दिल्ली: लगातार वृद्धि

(d) असम में 2022 से 2023 में अतिरिक्त पंजीकरण:

2023 ≈ 55,000, 2022 ≈ 27,000

अंतर ≈ 28,000 अतिरिक्त पंजीकरण

(e) पश्चिम बंगाल में वृद्धि:

2022 ≈ 12,000, 2024 ≈ 38,000

अनुपात = 43000 ÷ 9000 ≈ 4.7 गुना

(f) कथन: उत्तराखंड में 2023 और 2024 में बहुत कम नए पंजीकरण हुए यह सही नहीं है। अत: (f) उत्तराखंड में वृद्धि हुई है, लेकिन दंड छोटे हैं क्योंकि पूर्ण संख्या ही कम है। छोटे दंड = कम पंजीकरण। 'कम नए पंजीकरण' और 'कम वृद्धि' अलग बातें हैं।

प्रश्नावली–5.3

1. बिंदु आलेख के आधार पर:

लड़के: डेटा 3 से 6 तक फैला है (परिसर = 3)

लड़कियाँ: डेटा 0 से 6 तक फैला है (परिसर = 6)

(a) लड़कों का डेटा अधिक फैला है–असत्य

(b) लड़कों की माध्यिका (≈ 5) > लड़कियों की माध्यिका (≈4)–सत्य

(c) लड़कियों का माध्य > लड़कों का माध्य—लड़कियाँ 3-4 पर केंद्रित, लड़के 2-6 पर फैले, माध्य लगभग

बराबर—असत्य

(d) लड़कों के लिए जेबों की अधिकतम संख्या (5) > लड़कियों की अधिकतम संख्या (4)—सत्य

अत: सत्य कथन: (b) और (d)

2. (a) खिलाड़ी A का औसत:

$= \frac{14+16+10+10}{4} = 50 \div 4 = 12.5$

अत: (a) A का औसत = 12.5 अंक प्रति खेल

(b) खिलाड़ी C ने खेल 3 नहीं खेला—उसे 3 खेलों से भाग देंगे। C: 8 + 11 + 13 = 32, माध्य = 32: 3 = 10.67

B ने सभी 4 खेल खेले: 0 + 8 + 6 + 4 = 18, माध्य = 18 ÷ 4 = 4.5

अत: (b) C के लिए 3 से, B के लिए 4 से भाग देंगे।

कारण: C ने केवल 3 मैच खेले जो मैच खेला ही नहीं उसे शामिल नहीं करते।

(c) तुलना: A = 12.5, C = 10.67, B = 4.5

अत: (c) A सर्वश्रेष्ठ खिलाड़ी है।

3. समूह 1: 85, 76, 90, 85, 39, 48, 56, 95, 81, 75; (n=10)

योग = 730, माध्य = 730 ÷ 10 = 73

आरोही: 39, 48, 56, 75, 76, 81, 85, 85, 90, 95

माध्यिका = (76 + 81) ÷ 2 = 78.5

समूह 2: 68, 59, 73, 86, 47, 79, 90, 93, 86; (n=9)

योग: = 681, माध्य = 681 ÷ 9 = 75.67

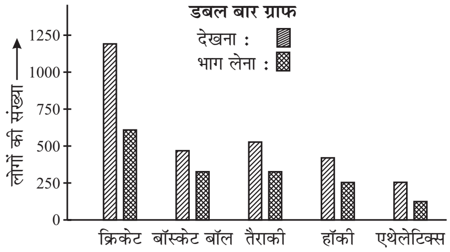
आरोही: 47, 59, 68, 73, 79, 86, 86, 90, 93

माध्यिका = 5वाँ मान = 79

अत: समूह 1: माध्य = 73, माध्यिका = 78.5। समूह 2: माध्य = 75.67, माध्यिका = 79

विश्लेषण: दोनों समूहों का प्रदर्शन लगभग समान है। समूह 2 का माध्य और माध्यिका दोनों थोड़े अधिक हैं। समूह एक विचलित मान है जो माध्य को नीचे खींचता है।

4.



मापनी: 1 इकाई = 250 लोग

अवलोकन: 1. हर खेल में देखने वाले, भाग लेने वालों से अधिक हैं। 2. क्रिकेट सबसे लोकप्रिय—देखने (1240) और भाग लेने (620) दोनों में।

3. एथलेटिक्स में सबसे कम रुचि।

4. बास्केटबॉल और तैराकी में भाग लेने वाले समान संख्या (320)। अत: क्रिकेट सबसे लोकप्रिय खेल है।

5. ऊँचाई: 106, 110, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110, 120, 115, 102, 115, 115, 109, 115, 101

बढ़ते क्रम में: 101, 102, 106, 109, 110, 110, 112, 115, 115, 115, 115, 115, 117, 120, 120, 123, 125

n = 17, माध्यिका = 9वाँ मान = 115 सेमी

115 से कम ऊँचाई के विद्यार्थी: 101, 102, 106, 109, 110, 110, 112 = 7 विद्यार्थी

115 से अधिक ऊँचाई के विद्यार्थी: 117, 120, 120, 123, 125 = 5 विद्यार्थी

ठीक 115 ऊँचाई के विद्यार्थी: 5 विद्यार्थी

अत: माध्यिका (115 सेमी) को विभाजन बिंदु मानें। 115 से कम वाले एक समूह में और 115 से अधिक दूसरे में।

आयु अनुमान: 'Telling Tall Tales' तालिका (2019) से—115 सेमी ऊँचाई लगभग 6-7 वर्ष की आयु से मेल खाती है।

6. स्वयं कीजिए।

7. एक अनुभाग में 15 लड़के + 15 लड़कियाँ = 30 विद्यार्थी

एक अनुभाग का माध्य = 154.2 सेमी

दूसरे अनुभाग के बारे में कोई जानकारी नहीं दी गई है।

अत: (d) दूसरे अनुभाग का माध्य निर्धारित नहीं किया जा सकता।

8. (a) अनुमानित मान (आलेख से):

न्यूयार्क = 280, टोक्यो = 160, लन्दन = 40

(b) (i) मुंबई = 86. मुंबई से अधिक इमारतें (86) वाले शहर: हॉन्गकॉन्ग (553), शेनझेन (367), न्यूयॉर्क (≈295), दुबई (251), ग्वांगझू (188), शंघाई (183), टोक्यो (≈170), कुआलालंपुर (154), चोंगकिंग (144), जकार्ता (112), बैंकॉक (110), सिंगापुर (95) = 12 शहर।

अत: (b) (i) कथन सत्य है।

(b) (ii) मुंबई से कम इमारतें (<86) वाले शहर: सियोल (82), टोरंटो (81), मेलबर्न (69), मियामी (58), इस्तांबुल (48), मॉस्को (46), लंदन (≈35) = 7 शहर

अत: (b) (ii) कथन सत्य है।

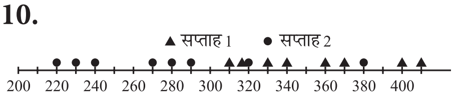
(b) (iii) 'विश्व की सबसे ऊँची इमारत हॉन्ग-कॉन्ग में है'

यह ग्राफ 'सबसे अधिक ऊँची इमारतों की संख्या' दिखाता है।

'सबसे ऊँची एक इमारत' (Burj Khalifa, दुबई) के बारे में जानकारी नहीं देता। अत: (b) (iii) कथन सत्य नहीं है।

9. यह प्रायोगिक गतिविधि है स्वयं मापें और तालिका भरें।

10.



$$\text{माध्य} = \frac{\text{मानों का योग}}{\text{मानों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{410+400+370+340+360+400+320+330+310+320+290+380+280+270+230+220+240}{17}$$

$$= \frac{5470}{17} = 321.76 \approx 321 \text{ से.}$$

माध्यिका: आँकड़ों को आरोही क्रम में लगाते हैं

220, 230, 240, 270, 280, 290, 310, 320, 320, 330, 340, 360, 370, 380, 400, 400, 410,

यहाँ n = 17 (विषम)

$\therefore$ माध्यिका = $\left(\frac{17+1}{2}\right)$वाँ पद = 9वाँ पद = 320 से.

11. स्वयं करें।

12. स्वयं करें।

13. स्वयं करें।

विविध प्रश्नावली

1. वह प्रश्न जिसका कोई एक निश्चित उत्तर न होकर डेटा के आधार पर कई उत्तर संभावित हों।

2. ''हमारी कॉलोनी के बच्चों की लंबाई क्या है?''

3. योग = 24; माध्य = 24 ÷ 6 = 4

4. क्रम: 6, 8, 10, 12, 14, 16; माध्यिका (10 + 12) ÷ 2 = 11

5. वह मान जो डेटा के अन्य मानों से बहुत अलग (बहुत छोटा या बहुत बड़ा) होता है।

6. यहाँ 25 आउटलायर है।

7. मध्यिका आउटलायर से कम प्रभावित होती है।

8. माध्य = 152.8। यहाँ 190 आउटलायर है, इसलिए माध्य उपयुक्त नहीं है।

9. यह डेटा के वितरण और दोहराव (Frequency) को बिंदुओं के माध्यम से दर्शाता है।

10. अलग–अलग श्रेणियों (Categories) के बीच तुलना करने के लिए।

11. दो अलग–अलग डेटा सेट की एक साथ तुलना करने के लिए।

12. नहीं, माध्य हमेशा न्यूनतम और अधिकतम मान के बीच होता है।

13. ताकि डेटा का सटीक केंद्र (बीच का पद) ज्ञात किया जा सके।

14. यह दर्शाता है कि डेटा एक–दूसरे से कितना अलग या फैला हुआ है।

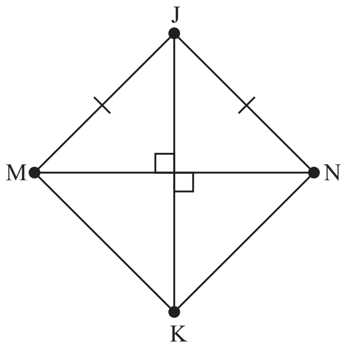
6. रचनाएँ और टाइलिंग

अभ्यास-6.1

1. चित्र में J तथा K बिंदु ऐसे लिए गए हैं कि JM = JN और KM = KN

अर्थात् बिन्दु J बिंदु M और N से समान दूरी पर है।

इसी प्रकार K बिंदु भी M और N से समान दूरी पर है।



हम जानते हैं कि जो बिंदु किसी रेखाखंड के दोनों सिरों से समान दूरी पर होते हैं, वे उस रेखाखंड के लंब समद्विभाजक पर स्थित होते हैं।

अत: J और K दोनों बिंदु MN के लंब समद्विभाजक पर स्थित हैं।

इसलिए JK रेखा, MN का लंब समद्विभाजक है।

अत: सिद्ध हुआ कि JK, MN का लंब समद्विभाजक है।

2. हाँ, 90° का कोण बनाने की एक अन्य विधि यह है–

पहले एक सीधी रेखा खींचिए।

रेखा पर एक बिंदु O लीजिए।

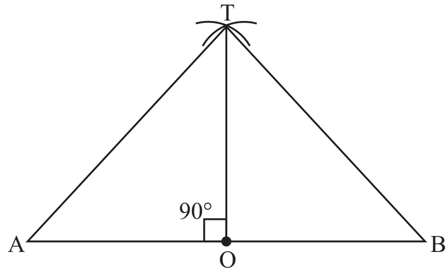
कंपास की सहायता से O के दोनों ओर समान दूरी पर दो बिंदु A और B बनाइए।

अब A और B को केंद्र मानकर समान त्रिज्या से ऊपर की ओर चाप खींचिए, जो एक बिंदु P पर मिलें।

O और P को मिलाइए।

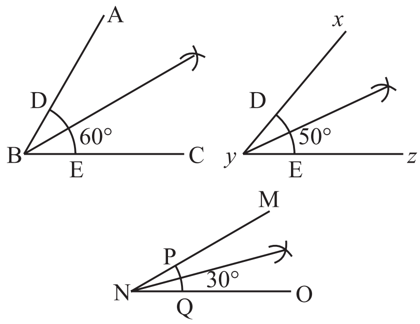
तब ∠POB या ∠POA = 90° होगा।

अत: इस प्रकार भी 90° का कोण बनाया जा सकता है।



अभ्यास-6.2

1. चरण (1) एक 60° का ∠ABC कोण (चाँदे की सहायता से) बनाएँ।



(2) B को केन्द्र मान कर एक चाप लगाएँ जो कोण को D, E बिन्दु पर काटता है।

(3) D और E को केन्द्र मानकर एक त्रिज्या से दो चाप लगाएँ जो एक दूसरे को x पर काटते हैं।

(4) Bx को मिलाएँ, रेखा Bx कोण को समद्वि भाजित करती है।

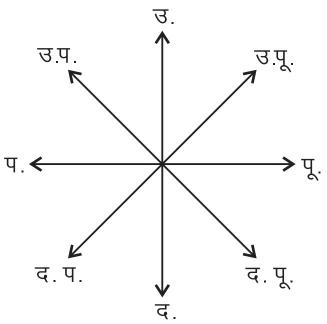
इसी प्रकार (ii) तथा (iii) को भी बनाएँ।

2. उत्तर और पश्चिम के बीच की दिशा को उत्तर–पश्चिम कहते हैं।

दक्षिण और पश्चिम के बीच की दिशा को दक्षिण–पश्चिम कहते हैं।

दक्षिण और पूर्व के बीच की दिशा को दक्षिण–पूर्व कहते हैं।

अर्थात्



3. हाँ, रेखा Dz अभी भी कोण समद्विभाजक होगी।

क्योंकि कोण समद्विभाजक बनाने में दोनों भुजाओं पर समान दूरी के बिंदु लिए जाते हैं और समान त्रिज्या के चाप खींचे जाते हैं।

जब ये चाप एक बिंदु D पर मिलते हैं, तब B और D को मिलाने वाली रेखा कोण को दो बराबर भागों में विभाजित करती है।

अत: रेखा Dz कोण समद्विभाजक होगी।

4. हाँ, हम 55.50° के कोण को समद्विभाजित कर सकते हैं।

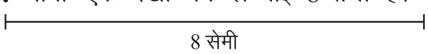
किसी कोण का समद्विभाजन करने पर वह दो बराबर भागों में विभाजित हो जाता है।

अत: $55.50° \div 2 = 27.75°$

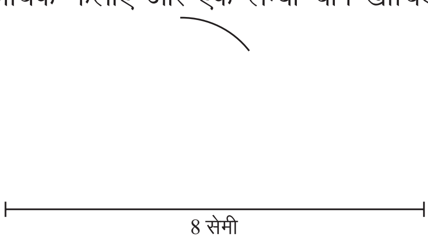
अत: 55.50° का समद्विभाजित कोण 27.75° है।

अभ्यास–6.3

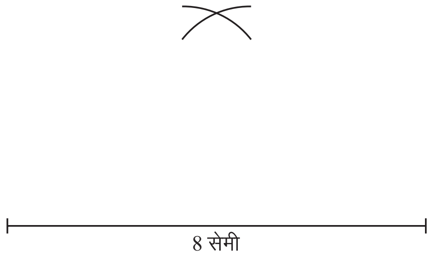
1. माना एक रेखा की लम्बाई 8 सेमी है।



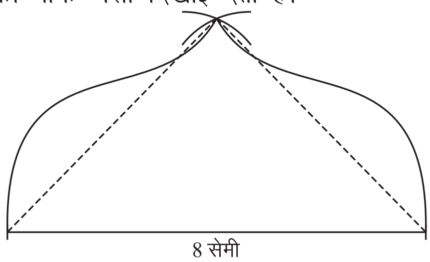
अपने परकार को बाईं ओर रखें, इसे आधे से अधिक फैलाएँ और एक लम्बा चाप खींचिए।



यही प्रक्रिया दाईं ओर से भी दोहराइए।



वह बिन्दु जहाँ से चाप एक-दूसरे को काटते हैं, वह मेहराब की नोक है। यह एक भाले की नोंक जैसा दिखाई देता है।



2. स्वयं कीजिए।

अभ्यास–6.4

1. चरण 1: स्केल की सहायता से 6 सेमी लंबी एक रेखा AB खींचिए।

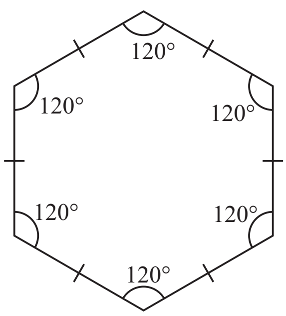
चरण 2: बिंदु A और बिंदु B पर चांदे (प्रोट्रैक्टर) की सहायता से 120° के कोण बनाइए।

चरण 3: कंपास में 6 सेमी खोलकर, A से 120° वाली रेखा पर अगला बिंदु F निर्धारित कीजिए।

इसी प्रकार B से 120° वाली रेखा पर बिंदु C निर्धारित कीजिए।

चरण 4: अब बिंदु C और F पर भी 120° के कोण बनाइए और आगे 6 सेमी की दूरी पर बिंदु D और E बनाइए।

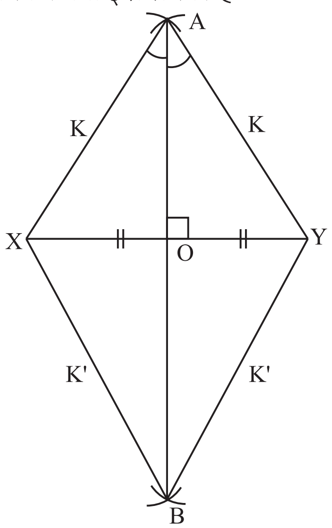
चरण 5: अंत में बिंदु D और E को जोड़ दीजिए।



निष्कर्षः इस प्रकार सभी भुजाएँ 6 सेमी की होंगी और एक नियमित षट्भुज प्राप्त होगा।

प्रश्नावली–6.1

1. इसकी रचना इस प्रकार है :



ΔABX और ΔABY में:

$AX = AY = K$

$BX = BY = K'$

$AB = AB$ (समान) (SSS नियम से) (i)

$\therefore \Delta ABX \cong \Delta ABY$

$\therefore \angle XAO = \angle YAO$ ...(i)

ΔAOX और ΔAOY (i) से

$AX = AY = K$

$\angle XAO = \angle YAO$.... (i से)

$OA = OA$ (समान)

$\therefore \Delta AOX, \cong \Delta AOY$ (SAS नियम से)

$\therefore OX = OY$

और $\angle AOX = \angle AOY$ ...(ii)

साथ ही, $\angle AOX + \angle AOY = 180^o$

$\therefore 2\angle AOX = 180^o$ (ii से)

$\Rightarrow \angle AOX = 90^o$

$\therefore OX = OY$ और $\angle AOX = \angle AOY = 90^o$

इसी प्रकार,

$\angle BOX = \angle BOY = 90°$

इसलिए हम कह सकते हैं

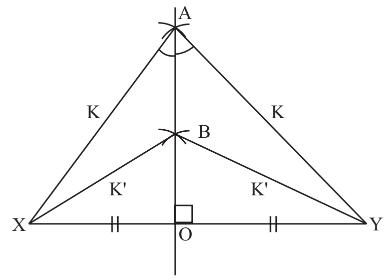
$Ax = BX$

$k = k'$

अतः xy के ऊपर और नीचे के चापों के लिए एक ही त्रिज्या होना आवश्यक है।

इस प्रकार, AB रेखा XY की लम्ब समद्विभाजक है।

2. इसकी रचना इस प्रकार है :



ΔABX और ΔABY में:

$AX = AY = K$

$BX = BY = K'$

$AB = AB$ (समान)

$\Delta ABX \cong \Delta ABY$

$\therefore \angle XAO = \angle YAO$

ΔAOX और ΔAOY में:

$AX = AY = K$

$\angle XAO = \angle YAO$

$OA = OA$ (समान)

$\therefore \Delta AOX \cong \Delta AOY$ (SAS नियम से)

साथ ही,

$\angle AOX + \angle AOY = 180^o$

$\Rightarrow 2\angle AOX = 180^o$

$\Rightarrow \angle AOX = 90^o$

$\Rightarrow OX = OY$

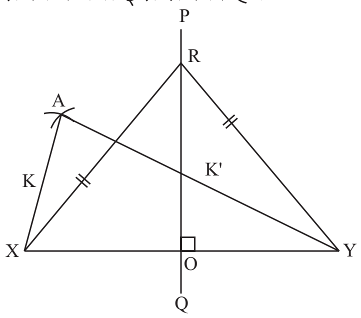
और $\angle AOX = \angle AOY = 90^o$

$\Rightarrow$ AB, XY का लम्ब समद्विभाजक है।

यहाँ दोनों चाप एक ही तरफ बनाए गए हैं।

अतः, XY के ऊपर और नीचे दोनों तरफ चाप बनाना आवश्यक नहीं है।

3. इसकी रचना इस प्रकार है :



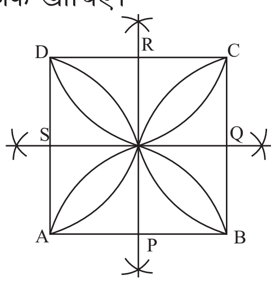
ΔROX और ΔROY में:
$OX = OY$
$\angle ROX = \angle ROY$ (प्रत्येक 90°)
$OR = OR$ (समान)
$\therefore \Delta ROX \cong \Delta ROY$ (SAS नियम से)
$\therefore RX = RY$ (दिया है)
अतः, लम्ब समद्विभाजक पर स्थित किसी भी बिंदु R के लिए, $RX = RY$
$\therefore$ लम्ब समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु X और Y से समान दूरी पर होता है।
क्योंकि $AX \neq AY$,
बिंदु A लम्ब समद्विभाजक पर नहीं है।
अतः, लम्ब समद्विभाजक बनाने के लिए दोनों चापों की त्रिज्या समान होना आवश्यक है।

4. इसकी रचना इस प्रकार है :

रचना के चरण—

(1) एक वर्ग ABCD बनाइए।

(2) चित्र में दिखाए अनुसार AB और CD के लंब समद्विभाजक खींचिए।

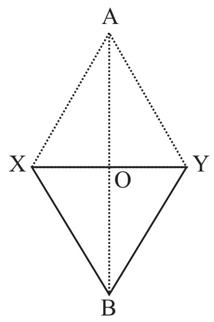


(3) चित्र में लंब समद्विभाजक वर्ग के बिंदुओं P, Q, R और S पर प्रतिच्छेद करते हैं।

(4) P, Q, R और S को केंद्र मानकर, AP के बराबर त्रिज्या लेकर वर्ग के अंदर अर्धवृत्त बनाइए।

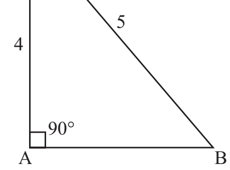
(5) सीमा (बाउंड्री) को रंग भरने पर और आवश्यक डिजाइन प्राप्त होती है।

5. दिए गए चित्र में,
XAY और XBY रस्सी की दो स्थितियाँ हैं, और बिंदु A तथा B रस्सी के मध्य बिंदु पर हैं।
ΔAXB और ΔAYB में:
$AX = AY$ तथा $BX = BY$



$AB = AB$ (समान)
$\therefore \Delta AXB \cong \Delta AYB$ (SSS नियम से)
$\therefore \angle XAO = \angle YAO$
फिर, ΔAXO और ΔAYO में:
$OX = OY$
$\angle XOA = \angle YOA$ (i)
$AO = AO$ (समान)
$\therefore \Delta AXO \cong \Delta AYO$ (SAS नियम से)
$\therefore \Delta XAO \cong \Delta YAO$ (i) से
साथ ही, $\angle XOA + \angle YOA = 180^o$
$\Rightarrow 2\angle XOA = 180^o$
$\Rightarrow \angle XOA = 90^o = \angle YOA$
$\therefore OX = OY$ और $\angle XOA = \angle YOA = 90^o$
अतः AB, XY का लम्ब समद्विभाजक है।

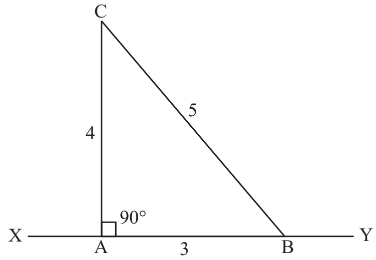
6. विधि : 3-4-5 का नियम—हम जानते हैं कि यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ 3 : 4 : 5 के अनुपात में हों, तो सबसे बड़ी भुजा के सामने वाला कोण 90° होता है।



ऊपर दिए गए चित्र में, त्रिभुज ABC की भुजाएँ 3 : 4 : 5 के अनुपात में हैं। ∠A सबसे बड़ी भुजा BC के सामने है।

प्राप्त त्रिभुज ΔABC में:

AB = 3 इकाई, AC = 4 इकाई, BC = 5 इकाई



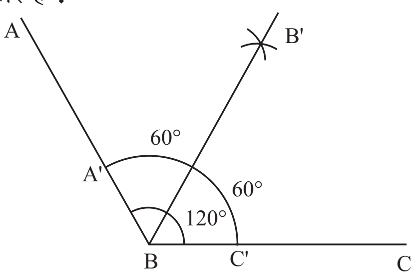
और सबसे बड़ी भुजा के सामने वाला कोण ∠A है।

अत: 3–4–5 सिद्धांत के अनुसार, ∠A = 90º

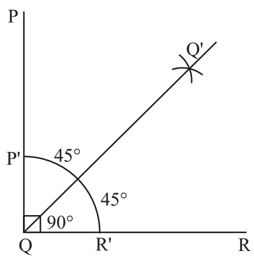
इस प्रकार, AC रेखा XY पर दिए गए बिंदु A पर लम्ब है।

7. मान लेते हैं कि कोण 120°, 90°, 80°, 60° हैं। इन सभी कोणों के समद्विभाजकों की रचना इस प्रकार है :

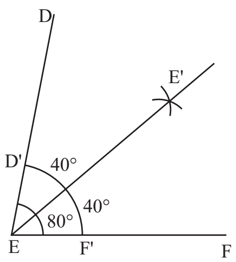
(i)



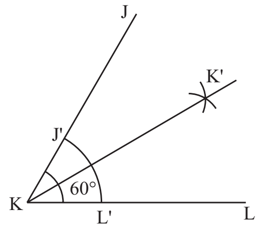
(ii)



(iii)



(iv)

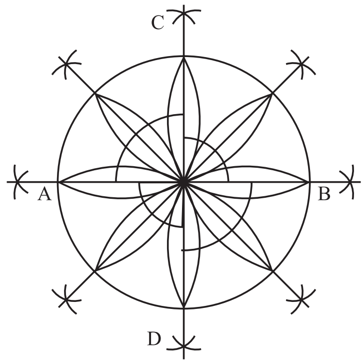


8. इसकी रचना इस प्रकार है :

रचना के चरण—

(1) एक रेखा AB खींचिए।

(2) A और B को केंद्र मानकर, समान त्रिज्या के चाप AB रेखा के ऊपर बनाइए।



(3) इन चापों को आपस में मिलने दें ताकि वे बिंदुओं C और D पर प्रतिच्छेद करें।

(4) C और D को मिलाइए।

(5) मान लें AB और CD क्रमश: O बिंदु पार प्रतिच्छेद करते हैं।

(6) चित्र में दिखाए अनुसार ∠BOC, ∠COA, ∠AOD और ∠DOB के समद्विभाजक खींचिए।

(7) O को केंद्र मानकर और दिए गए चित्र में एक पंखुड़ी (petal) की लंबाई के बराबर त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाइए।

(8) वृत्त के उन बिंदुओं को चिह्नित कीजिए जहाँ वह रेखाओं को काटता है।

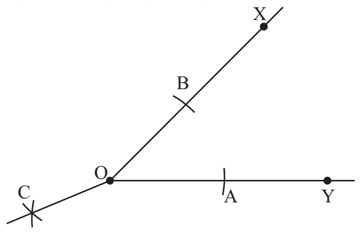
(9) इन बिंदुओं को केंद्र मानकर, दिए गए चित्र के अनुसार पंखुड़ियों बनाइए।

(10) अगले चरण में, अतिरिक्त रेखाओं और चापों को मिटा दीजिए।

इस प्रकार प्राप्त आकृति आवश्यक डिजाइन के अनुसार होगी।

9. $\angle XOY$ दिया गया कोण है।

ΔOAC और ΔOBC में: $OA = OB$



$AC = BC$ तथा $OC = OC$ (समान)

$\therefore \Delta OAC \cong \Delta OBC$ (SSS नियम से)

$\therefore \angle AOC = \angle BOC$

$\therefore 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - \angle BOC$

$\therefore \angle AOD = \angle BOD$

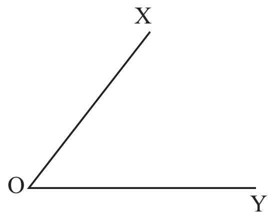
अत: OD, $\angle XOY$ का समद्विभाजक है और OC भी $\angle XOY$ का समद्विभाजक है।

10. कोण समद्विभाजन विधि से किसी भी कोण को आधा किया जा सकता है। इस विधि से हम निम्न कोण बना सकते हैं—

$22{\cdot}5^\circ, 112{\cdot}5^\circ, 67{\cdot}5^\circ, 135^\circ, 120^\circ, 105^\circ$

लेकिन, इस विधि से 65.5° का कोण नहीं बनाया जा सकता।

11. मान लें $\angle XOY$ दिया गया कोण है।



रचना के चरण—

(1) बिंदु O पर एक छोटा खूँटा लगाएँ।

(2) एक रस्सी लें और उसके एक सिरे पर एक लूप (loop) बनाइए।

(3) लूप को O पर बाँधकर रस्सी से किसी दूरी पर एक बिन्दु X चिन्हित करें।

अब रस्सी को O बिन्दु क्षैतिक रखें और रस्सी के दूसरे सिरे को y को बिन्दु चिन्हित करें।

(4) OX और OY लम्बाई पर A और B बिंदु O से बराबर दूरी पर चिन्हित करें।

(5) A और B पर छोटे खूँटे लगाएँ।

(6) एक दूसरी रस्सी लें और उसके दोनों सिरों पर लूप बनाइए।

(7) A और B पर खूँटों की मदद से रस्सी के लूप बाँध दें।

(8) इस रस्सी का मध्य बिंदु चिन्हित करें और उसी बिंदु पर रस्सी को पकड़ें।

(9) रस्सी के दोनों सिरों को तानकर रखें और उसका मध्य बिंदु M के रूप में चिन्हित करें।

(10) AM, BM और OM को मिलाएँ।

ΔOAM और ΔOBM में:

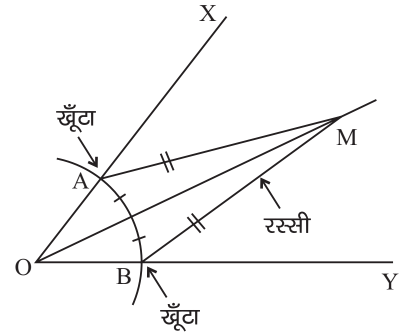
$OA = OB$ तथा $AM = BM$

$OM = OM$ (समान)

$\therefore \Delta OAM \cong \Delta OBM$

$\therefore \angle AOM = \angle BOM$

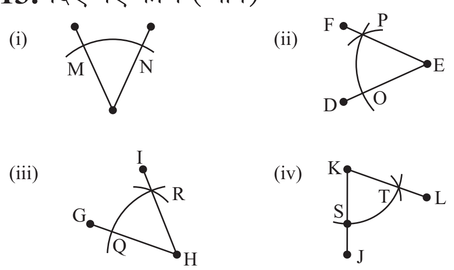
और $\angle XOM = \angle YOM$



अत: OM, दिए गए कोण $\angle XOY$ का समद्विभाजक है।

12. पता लगाइए : पृष्ठ संख्या-140 के प्रश्न-4 की तरह कीजिए।

13. दिए गए कोण (चाप)



इसी प्रकार कोण (i), (ii), (iii), (iv) बनाइए।

निर्माण के चरण (i) :

(1) AB की दिशा में एक रेखा A′B′ खींचे।

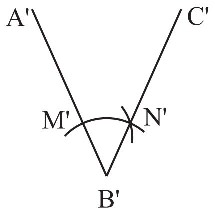
(2) A′ और B′ को केंद्र मानकर समान त्रिज्या के चाप खीचें।

(3)ये चाप AB और BC को क्रमश: M और N पर काटते हैं।

(4) यही चाप A′B′ को M′ पर काटेगा। अब M′N′ इस प्रकार चिन्हित करें कि MN = M′N′ हो।

(5) B और N′ को मिलाएँ।

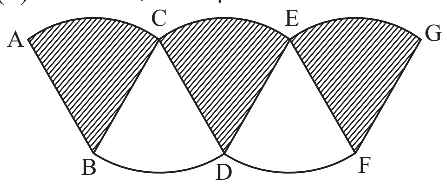
(6) ∠A′B′C′ आवश्यक कोण है।



शेष भी इसी प्रकार हल करें।

14. निर्माण के चरण—

(1) AB की दिशा में एक रेखा A′B′ खींचें।

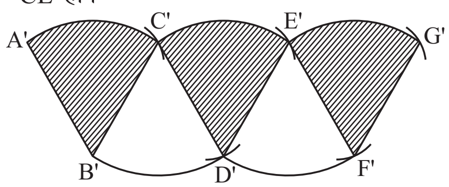


(2) केंद्र B′ लेकर A′B′ त्रिज्या का A′ से एक चाप खींचें ताकि A′C′=AC हो।

(3) B′ और C′ को मिलाएँ और इस क्षेत्र (sector) को छायांकित करें।

(4) अब C′ को केंद्र मानकर B′C′ त्रिज्या का चाप खींचें। B′ से एक चाप खींचें ताकि B′D′ = BD हो।

(5) फिर D′ को केंद्र मानकर CD’ त्रिज्या का चाप खींचें। C’ से एक चाप खींचें ताकि C′E′ = CE हो।

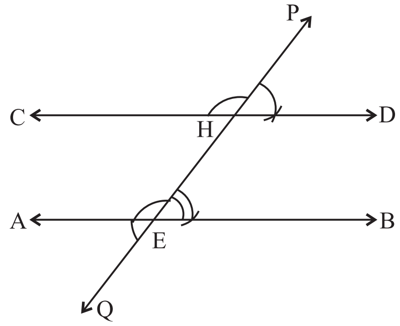


(6) D′ और E′ को मिलाएँ और इस भाग को छायांकित करें।

(7) इसी प्रकार, E′ और F′ को केंद्र मानकर इस प्रक्रिया को जारी रखें।

(8) बनाई गई आकृति से अतिरिक्त चाप (arcs) हटा दें। आवश्यक आकृति प्राप्त हो जाएगी।

15. यहाँ एक जोड़ी यानी 2 समान्तर रेखाओं की रचना इस प्रकार है।



यहाँ रेखाएँ AB और CD समांतर हैं।

∠PHD = ∠HEB {संगत कोण}

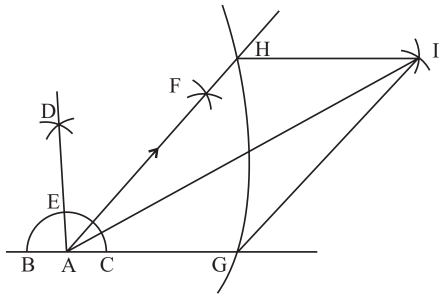
∠CHE = ∠AEQ {संगत कोण}

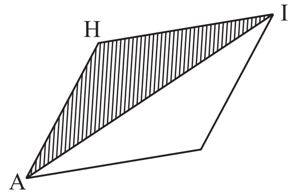
∠CHP = ∠AEH {संगत कोण}

∠DHE = ∠BEQ {संगत कोण}

16. दी गई आकृति में 8 समचतुर्भुज हैं। अत:, समचतुर्भुज की आसन्न भुजाओं के बीच का न्यूनकोण = 360/8=45°

इसकी रचना इस प्रकार है :

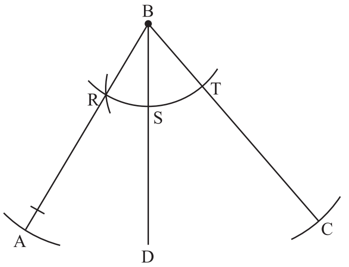




ट्रेसिंग पेपर की मदद से ऐसे 8 समचतुर्भुज बनाकर उन्हें जोड़ने पर आवश्यक आकृति प्राप्त होती है।

17. रचना के चरण—

(1) एक ऊर्ध्वाधर रेखा B′D′ खींचें AB और B′ को केंद्र मानकर समान त्रिज्या के चाप बनाइए।



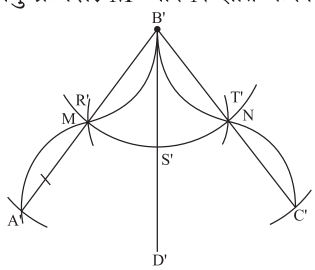
(2) चाप RS को मापें, फिर R' से एक चाप R′S′ इस प्रकार बनाइए कि R′S′ = RS हो।

(3) B′R′ को मिलाएँ और इस रेखा को बढ़ाएँ। B′A′ = BA रखें।

(4) कम्पास से चाप ST मापें, फिर S′ से चाप S′T′ इस प्रकार बनाइए कि S′T′ = ST हो।

(5) B′ और T′ को मिलाएँ और रेखा को बढ़ाएँ। B′C′ = BC रखें।

(6) कम्पास की सहायता से A′B′ और B′C′ के मध्य बिंदु क्रमश: M और N ज्ञात करें।



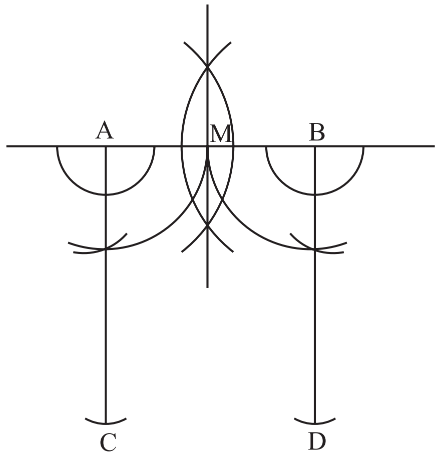
(7) रेखाओं A′M, MB, B′N और NC′ पर चित्र के अनुसार समान चाप बनाइए।

(8) अतिरिक्त रेखाएँ और चाप हटा दें, आवश्यक नुकीला मेहराब प्राप्त होगा। इसी प्रकार अलग. -अलग त्रिज्या केचाप लेकर विभिन्न मेहराब बनाएँ।

18. स्वयं कीजिए।

19. (a) रचना के चरण—

(1) एक रेखा खींचें और उस पर बिंदु A और B अंकित करें।



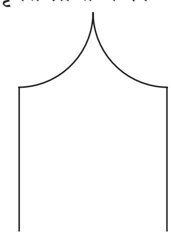
(2) बिंदु A और B से रेखा के नीचे लम्ब खींचें।

(3) बराबर लंबाई की रेखाएँ AC और BD खींचें।

(4) AB का मध्य बिंदु M ज्ञात करें।

(5) A और B को केंद्र तथा AM त्रिज्या लेकर चाप बनाइए (जैसा चित्र में दिखाया गया है)।

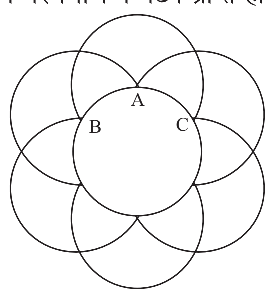
(6) अतिरिक्त रेखाएँ, चाप और अक्षर मिटाकर आवश्यक आकृति प्राप्त करें।



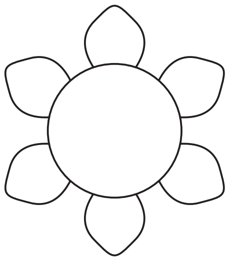
(b) रचना के चरण-

(1) एक वृत्त बनाइए।

(2) परिधि पर कोई बिंदु A लें और वृत्त की ही त्रिज्या का एक चाप वृत के बाहर बनाइए, जो परिधि को B और C पर छुए। B को केंद्र मानकर फिर से उसी त्रिज्या का चाप बनाइए। इस प्रक्रिया को दोहराने पर विभिन्न पैटर्न प्राप्त होंगे।



(3) अतिरिक्त चाप और अक्षर मिटाकर आवश्यक आकृति प्राप्त करें।



(c) रचना के चरण—

(1) एक वृत्त बनाइए।

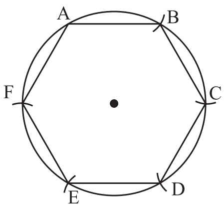
(2) परिधि पर कोई बिंदु A लें।

(3) केंद्र A और वृत्त की त्रिज्या लेकर चाप बनाइए, जो वृत्त को B पर काटे।

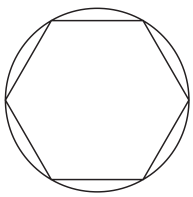
(4) B को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या से चाप बनाइए, जो वृत को C पर काटे।

(5) इसी प्रकार प्रक्रिया दोहराकर D, E, F बिंदु प्राप्त करें।

(6) AB, BC, CD, DE, EF और CA को मिलाएँ।



अतिरिक्त चाप और अक्षर मिटाकर आवश्यक आकृति प्राप्त करें।

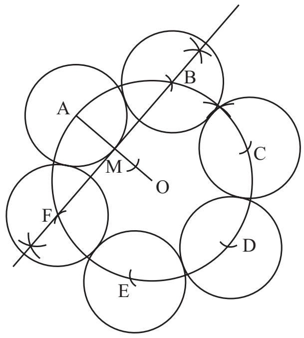


(d) रचना के चरण—

(1) वृत्त पर कोई बिंदु A लें।

(2) A को केंद्र मानकर वृत्त की ही त्रिज्या से चाप बनाइए, जो वृत्त को B पर काटे।

(3) B को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या से चाप बनाइए, जो वृत्त को C पर काटे।

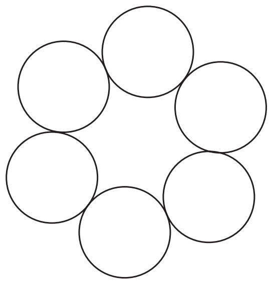


(4) इसी प्रकार D, E और F बिंदु प्राप्त करें।

(5) O और A को मिलाएँ तथा OA का मध्य बिंदु ज्ञात करें।

(6) मान लें M, OA का मध्य बिंदु है। A, B, C, D, E और F को केंद्र मानकर OM त्रिज्या से वृत्त बनाइए।

(7) अतिरिक्त रेखाएँ, चाप और अक्षर मिटाकर आवश्यक आकृति प्राप्त करें।



(e) रचना के चरण—

(1) एक वृत बनाइए और परिधि पर कोई बिंदु A लें।

(2) A को केंद्र मानकर OA त्रिज्या से चाप बनाइए, जो वृत्त को B पर काटे।

(3) B को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या से चाप बनाइए, जो वृत्त को C पर काटे।

(4) इसी प्रकार D, E और F बिंदु प्राप्त करें।

(5) O को केंद्र मानकर OA की दुगनी त्रिज्या से एक वृत बनाइए।

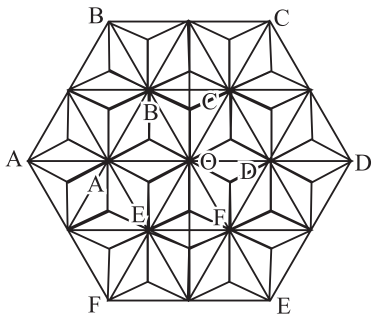
(6) O और A को मिलाकर A' तक बढ़ाएँ। इसी प्रकार अन्य रेखाओं को भी बढाएँ।

(7) चित्र के अनुसार रेखाओं को मिलाएँ।

(8) पहली, दूसरी, तीसरी और चौथी पंक्तियों में क्रमशः 5, 7, 7, 5 त्रिभुज होते हैं।

(9) प्रत्येक त्रिभुज के शीर्षों को उसके केंद्र से मिलाएँ।

(10) अतिरिक्त रेखाएँ, चाप और अक्षर मिटाकर आवश्यक आकृति प्राप्त करें।



20. रचना के चरण–

(1) एक वृत बनाइए।

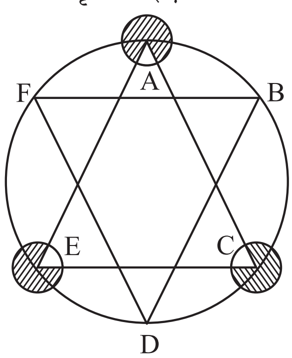
(2) वृत्त के ऊपर कोई बिंदु A लें और केंद्र A से वृत्त की त्रिज्या का चाप बनाइए, जो वृत्त को B पर काटे।

(3) B को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या से चाप बनाइए, जो वृत्त को C पर काटे।

(4) इसी प्रकार D, E और F बिंदु प्राप्त करें।

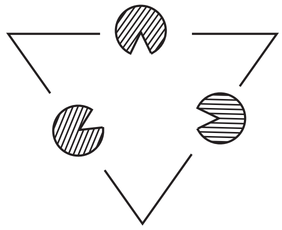
(5)AC, CE, EA, BD, DF और FB को मिलाएँ।

(6) तीन समान वृत बनाइए जिनमें खंड हों।

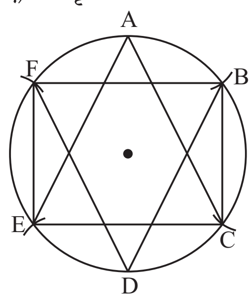


A, C और E पर भाग हटाया गया है, जैसा नीचे दिखाया गया है।

(7) अतिरिक्त चाप, वृत्त और अक्षर मिटा दें, आवश्यक आकृति प्राप्त हो जाएगी।



21. (1) एक वृत्त बनाइए। वृत्त के ऊपर कोई बिंदु A लें और केंद्र A से वृत्त की त्रिज्या का चाप बनाइए, जो वृत को B पर काटे।

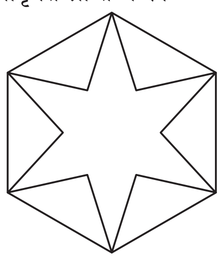


(3) B को केंद्र मानकर उसी त्रिज्या से चाप बनाइए, जो वृत्त को C पर काटे।

(4) इसी प्रक्रिया को दोहराकर D, E और F बिंदु प्राप्त करें।

(5) चित्र के अनुसार रेखाओं को मिलाएँ।

(6) अतिरिक्त चाप वृत और अक्षर मिटाकर आवश्यक आकृति प्राप्त करें।



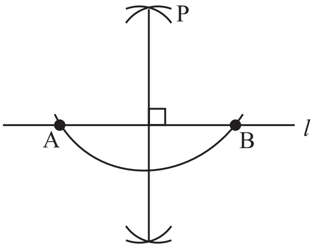
22. निर्माण के चरण–

(1) एक रेखा *l* खींचें और उसके बाहर एक बिंदु P लें।

(2) केंद्र P लेकर एक चाप बनाइए, जो रेखा *l* को A और B बिंदुओं पर काटे।

(3) A और B को केंद्र मानकर AB के ऊपर और नीचे समान त्रिज्या के चाप बनाइए।

(4) ये चाप C और D बिंदुओं पर मिलेंगे।



(5) CD को मिलाएँ। रेखा CD, रेखा *l* पर लम्ब है और बिंदु P से होकर गुजरती है।

अभ्यास–6.5

1. समतल को पूरी तरह ढकने वाले तीन नियमित बहुभुज (Regular Polygons) पाठ के अनुसार, केवल तीन नियमित बहुभुज ऐसे हैं जो एक समतल (plane) को बिना किसी खाली स्थान छोड़े या एक–दूसरे के ऊपर आए पूरी तरह ढक सकते हैं (इसे 'टेसेलेशन' या 'टाइलिंग' कहा जाता है):

समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle)

वर्ग (Square)

नियमित षट्भुज (Regular Hexagon)

इनके अलावा अन्य बहुभुज (जैसे पंचभुज) खाली स्थान छोड़ देते हैं।

2. मधुमक्खियाँ गोलाकार सेल (Round cells) इसलिए नहीं बनातीं क्योंकि:

यदि वे गोलाकार सेल बनाएँगी, तो उनके बीच में काफी खाली जगह बच जाएगी, जिससे छते की जगह बर्बाद होगी।

षट्भुज (Hexagon) का आकार सबसे कुशल होता है क्योंकि यह समतल को पूरी तरह ढक देता है (कोई जगह नहीं बचती) और इसमें कम मोम (wax) का उपयोग करके अधिकतम शहद जमा किया जा सकता है। यह आकार छत्ते को मजबूती भी प्रदान करता है।

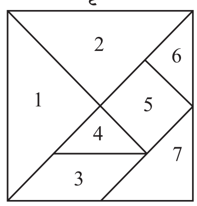
3. 'मैजिक टाइल' (Magic Tile) की विशेषता 2020 के दशक (विशेष रूप से 2023) में खोजे गए 'मैजिक टाइल', जिसे ''द हैट'' (The Hat) या ''आइंस्टीन टाइल'' (Einstein Tile) भी कहा जाता है. की मुख्य विशेषता यह है:

अनावर्ती टाइलिंग (Aperiodic Tiling): यह एक अकेला ऐसा आकार है जो एक समतल को पूरी तरह तो ढक सकता है, लेकिन यह कभी भी खुद को एक दोहराए जाने वाले पैटर्न (Repeating Pattern) में व्यवस्थित नहीं करता।

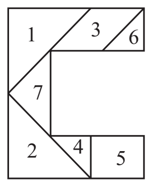
गणितज्ञ दशकों से ऐसे एक अकेले आकार की तलाश में थे जो बिना दोहराव के पूरी सतह को ढक सके, और इस 'हैट' टाइल की खोज ने इस रहस्य को सुलझा दिया।

प्रश्नावली–6.2

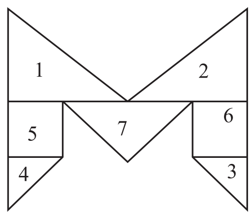
1. हम टैंग्राम के 7 टुकड़ों के 10 सेट तैयार करते हैं और उनसे निम्न आकृतियाँ बनाते हैं:



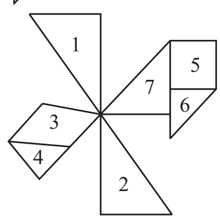
(i)



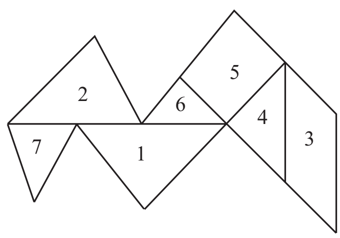
(ii)



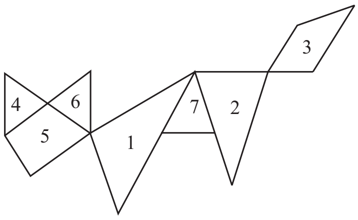
(iii)



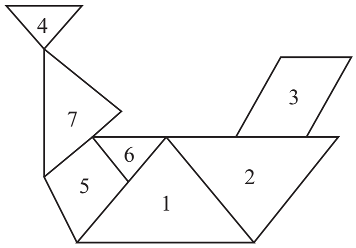
(iv)



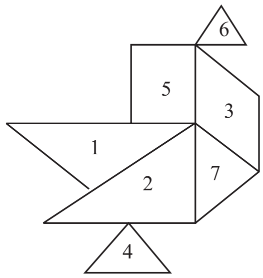
(v)



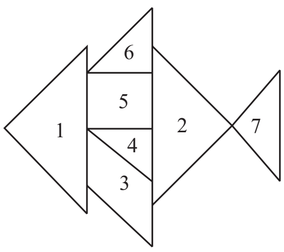
(vi)



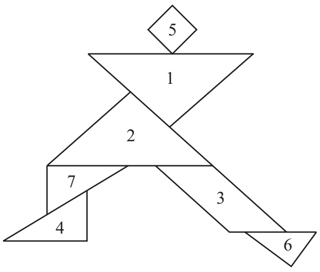
(vii)



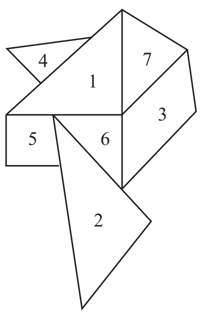
(viii)



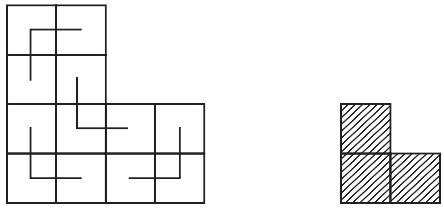
(ix)



(x)



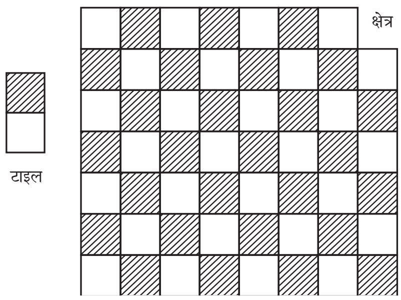
2. (a) दिए गए टाइल्स का उपयोग करके क्षेत्र को भरा जा सकता है। इस टाइलिंग में दिए गए आकार के 4 टाइल्स का उपयोग होगा।



(b) दिए गए टाइल का उपयोग करके–

दिया गया क्षेत्र निम्न चित्र के अनुसार भरा जा सकता है।

दिए गए क्षेत्र में:



30 भरे हुए (shaded) वर्ग हैं और 32 खाली (blank) वर्ग हैं। क्योंकि ये दोनों संख्याएँ समान नहीं हैं,

अत: दिए गए आकार के टाइल्स से इस क्षेत्र को पूरी तरह नहीं भरा जा सकता।

विविध प्रश्नावली

1. नहीं, दोनों अंतिम बिंदुओं से खींचे गए चाप के लिए समान त्रिज्या लेना आवश्यक नहीं है। लेकिन समान त्रिज्या लेने से रचना अधिक सटीक और सरल होती है।

2. लंब समद्विभाजक विधि से मध्यबिंदु मापना अधिक सटीक होता है क्योंकि इसमें किसी प्रकार की अनुमानित माप नहीं ली जाती, केवल ज्यामितीय रचना होती है।

3. यदि कोई बिंदु रेखाखंड के दोनों सिरों से समान दूरी पर है, तो वह बिंदु उस रेखाखंड के लंब समद्विभाजक पर स्थित होता है।

4. किसी रेखा पर 90° का कोण बनाने के लिए पहले रेखा पर एक बिंदु लिया जाता है, फिर उसके दोनों ओर समान दूरी पर चाप खींचे जाते हैं और उन चापों के मिलने वाले बिंदु को जोड़ दिया जाता है। इससे 90° का कोण बनता है।

5. 8 बराबर भागों में बाँटने पर प्रत्येक कोण = 360° + 8 = 45° होता है।

6. 45° का कोण बनाने के लिए पहले 90° का कोण बनाया जाता है, फिर उसका समद्विभाजन किया जाता है। इससे 45° प्राप्त होता है।

7. कोण द्विभाजन में दो सर्वांगसम त्रिभुज इसलिए बनते हैं क्योंकि दोनों त्रिभुजों में दो भुजाएँ और बीच का कोण समान होता है।

8. नहीं, कोण समद्विभाजक नहीं बदलता क्योंकि समान चाप खींचने से केवल रचना की प्रक्रिया बदलती है, परिणाम समान रहता है।

9. कम्पास और स्केल की सहायता से पहले एक बिंदु से समान दूरी पर चाप खींचकर, फिर उन बिंदुओं को जोड़कर समान्तर रेखाएँ बनाई जाती हैं।

10. 6 समबाहु त्रिभुज मिलकर एक नियमित षट्भुज बनाते हैं क्योंकि प्रत्येक त्रिभुज की भुजा समान होती है और वे मिलकर 360° पूरा करते हैं।

11. 5 × 7 के ग्रिड को 2 × 1 टाइल से पूरी तरह नहीं भर सकते क्योंकि कुल क्षेत्रफल 35 है जो 2 से पूरी तरह विभाजित नहीं होता।

12. काले और सफेद रंग से टाइलिंग की समस्याओं को हल करने में मदद मिलती है। क्योंकि इससे पैटर्न स्पष्ट दिखता है और समता आसानी से समझ आती है।

7. अज्ञात की खोज

अभ्यास–7.1

1. (a) $4p - 12 = 28$

$4p = 28 + 12$

$4p = 40$

$p = 40 \div 4 = 10$

(b) $7x = 4x$

$7x - 4x = 0$

$3x = 0$

$x = 0$

(c) $5k - 4 = 3k + 6$

$5k - 3k = 6 + 4$

$2k = 10$

$k = 10 + 2 = 5$

(d) $3(n + 5) - 10 = 2n - 2$

$3n + 15 - 10 = 2n - 2$

$3n + 5 = 2n - 2$

$3n - 2n = 2 - 5$

$n = -7$

(e) $\frac{x}{12} = 5$

$x = 5 \times 12$

$x = 60$

2. ऐसा समीकरण जो असंभव हो:

$x + 10 = x + 20$

x घटाने पर:

10 = 20 (गलत)

अत: कोई हल नहीं

अभ्यास–7.2

1. x = –5 वाले उदाहरण:

$x + 5 = 0$

$2x + 10 = 0$

$3x + 15 = 0$

2. (a) $4y = 120$

$y = 120 \div 4 = 30$

(b) $-10 = 3x - 1$

$3x = -9$

$x = -3$

(c) $15 - k = 2$

$k = 13$

(d) $2m + 10 = 20 - 3m$

$2m + 3m = 20 - 10$

$5m = 10$

$m = 2$

(e) $-6 + 2x = 4x + 6$

$2x - 4x = 6 + 6$

$-2x = 12$

$x = -6$

(f) $12 - 2z = 4z$

$12 = 6z$

$z = 2$

3. मान लें दहाई का अंक $= x$

सैकड़े का अंक $= x - 4$

इकाई का अंक $= x + 2$

$x + (x - 4) + (x + 2) = 13$

$3x - 2 = 13$

$3x = 15$

$x = 5$

संख्या = 152

उत्तर: 152

4. मान लें कुल भार $= x$

$x = \frac{x}{3} + 2$

$3x = x + 6$

$2x = 6$

$x = 3$

उत्तर: 3 kg

5. $3n + 2 = 17$

$3n = 15$

$n = 5$

अब:

(a) $6n + 4 = 6 \times 5 + 4 = 34$

(b) $3n - 5 = 15 - 5 = 10$

(c) $n + 10 = 15$

(d) $-n + 5 = 0$

6. माना संख्या x है। $\frac{x}{2} + 10 = x$

$2x = x + 20$

$2x - x = 20$

$x = 20$

प्रश्नावली-7.1

1. (a) $3x - 10 = 35$

$3x = 35 + 10$

$3x = 45$

$x = \frac{45}{3}$

अत: $x = 15$

जाँच $3(15) - 10 = 45 - 10 = 35$ = दायाँ पक्ष

(b) $5s = 3s$

$5s - 3s = 0$

$2s = 0$

अत: $s = 0$

जाँच: $5(0) = 0 = 3(0)$

(c) $3u - 7 = 2u + 3$

$3u - 2u = 3 + 7$

$u = 10$

अत: $u = 10$

जाँच: $3(10) - 7 = 23$ और $2(10) + 3 = 23 = 0$

(d) $4(m + 6) - 8 = 2m - 4$

$4m + 24 - 8 = 2m - 4$

$4m + 16 = 2m - 4$

$4m - 2m = -4 - 16$

$2m = -20$

$m = \frac{-20}{2}$

अत: $m = -10$

चाँच : $4(-10 + 6) - 8 = 4(-4) - 8 = -16 - 8$
$= 24 = 2(-10) - 4 = -24$

(e) $\frac{90}{15} = 6$

$u = 6 \times 15$

अत: $u = 90$

जाँच: $\frac{90}{15} = 6$ = दायाँ पक्ष

2. माना संख्या $= x$

$x + 4 = x + 5$

दोनों पक्षों से x घटाने पर– $4 = 5$

यह असत्य है।

अत: $x + 4 = x + 5$ ऐसा समीकरण है जिसका कोई हल नहीं है।

अन्य उदाहरण $2y + 3 = 2y + 7$, या $5 - z = 8 - z$ आदि।

3. स्वयं कीजिए।

4. (a) $y = 60 \div 2 = 30$

(b) $x = \frac{-8+3}{5} = \frac{-5}{5} = -1$

(c) $w = \frac{-15}{-53} = \frac{15}{53}$

(d) $z = 13 - 8 \quad = 5$

(e) $2k = 12 - 8$

$\Rightarrow \frac{12-8}{2} = \frac{4}{2} = 2$

(f) $7m - m = 3$

$\Rightarrow \quad 6m = -3$

$\Rightarrow \quad m = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$

(g) $3n - n = 10$

$\Rightarrow \quad n = \frac{10}{2} = 5$

5. मान लीजिए दहाई के स्थान का अंक x है

तब सैकड़े के स्थान का अंक $= x - 3$

इकाई का अंक $= x + 3$

तीनों अंकों का योग $= 15$

प्रश्नानुसार

$(x - 3) + x + (x + 3) = 15$

हल करने पर, $x = 5$

अत: बनी हुई संख्या (5 – 3) 5 (5 + 3) अथवा 258 है।

6. मान लीजिए ईंट का भार x किग्रा है।

प्रश्नानुसार,

$$x = \frac{x}{2} + 1$$

हल करने पर, $x = 2$

ईंट का भार 2 किग्रा है।

7. मान लीजिए संख्या x है।

प्रश्नानुसार

$$\frac{1}{4} \times x + 9 = x$$

हल करने पर

$$\frac{x+36}{4} = x$$

$$x + 36 = 4x$$

$$36 = 4x - x$$

$$3x = 36$$

$$x = 12$$

अत: संख्या 12 है।

8. $4k + 1 = 13 \Rightarrow 4k = 12$

$k = 3$

(a) $8k + 2 = 8(3) + 2 = 24 + 2 = 26$

(b) $4k = 4 \times 3 = 12$

(c) $k = 3$

(d) $4k - 1 = 4(3) - 1 = 12 - 1 = 11$

(e) $-k - 2 = -3 - 2 = -5$

प्रश्नावली–7.2

1. (a) $x = \frac{37+8}{5} = \frac{45}{5} = 9$

(b) $37 - (33 - x) = 35$

$37 - 33 + x = 35$

$x = 35 - 4$

$x = 31$

(c) b की भाँति कीजिए, उत्तर – 4 है।

2. दिया गया: रंजु की दैनिक मजदूरी = ₹750; ₹50 और ₹100 के नोट बराबर संख्या में मिलते हैं।

माना प्रत्येक प्रकार के नोटों की संख्या $= n$

$50n + 100n = 750 \Rightarrow 150n = 750$

$n = \frac{750}{150} = 5$

अत: रंजु के पास ₹50 के 5 नोट और ₹100 के 5 नोट हैं।

3. माना प्रत्येक काले धब्बों के पीछे x नीले धब्बे छिपे हुए हैं।

दिये गये कुल नीले धब्बे = 25

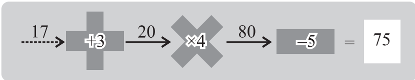
प्रश्नानुसार,

$3x + 4 = 25 \Rightarrow 3x = 25 - 4 \Rightarrow x = \frac{21}{3} = 7$

अत: प्रत्येक काले धब्बों के पीछे 7 नीले धब्बे छिपे हुए हैं।

4.

(i)



(b) (i) $3x - (x + 3) = 63$

(माना इनपुट x है।)

$\Rightarrow 3x - x - 3 = 63 \Rightarrow 3x - x = 63 + 3$

$\Rightarrow 2x = 66 \Rightarrow x = 66 \div 2 = 33$

$\Rightarrow x = 33$

अत: पहले इनपुट के लिए $x = 33$ (जब आउटपुट 63)

(ii) अब माना x है तब आउटपुट 227 है

तब समीकरण इस प्रकार है

$3x - x - 3 = 227$

$2x - 3 = 227 \rightarrow 2x = 230 \rightarrow x = 115$

अत: दूसरे इनपुट के लिए $x = 115$ (जब आउटपुट 227)

5. (i) माना इनपुट $= x$

$$\frac{\left(\frac{x}{3}\right)}{3} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{x}{9} = 5$$

$\Rightarrow x = 5 \times 9 = 45$

अत: मशीन 1 का इनपुट = 45

(ii) माना इनपुट $= x$

$(x - 4) - 4 = -11$

$x - 8 = -11$

$x = -11 + 8 = -3$

अत: मशीन 2 का इनपुट = –3

6. दिया गया: निश्चित शुल्क = ₹800,

प्रति किमी = ₹20, कुल = ₹2200

माना तय की गई दूरी = d किमी

$800 + 20d = 2200 \Rightarrow 20d = 2200 - 800$

$$\Rightarrow 20d = 1400 \Rightarrow d = \frac{1400}{20} = 70$$

अत: टैक्सी ने 70 किमी की दूरी तय की।

7. दिया गया: दो संख्याओं का योग = 76;

एक संख्या दूसरी की तीन गुनी है।

माना छोटी संख्या $= x$, बड़ी संख्या $= 3x$

$x + 3x = 76$

$\Rightarrow 4x = 76$

$$\Rightarrow x = \frac{76}{4} = 19$$

$3x = 3 \times 19 = 57$

अत: दोनों संख्याएँ 19 और 57 हैं।

8. दिया गया: कुल चौड़ाई = 34 सेमी; बॉर्डर की चौड़ाई = 3 सेमी प्रत्येक ओर छड़ की मोटाई = 2 सेमी

आकृति से: 2 सीमाएँ (3 सेमी + 3 सेमी = 6 सेमी) + कुछ छड़ें + कुछ अंतराल।

माना अंतराल = g सेमी; छड़ों की संख्या = 2 × 5, अंतरालों की संख्या = 6

$2 \times 3 + 5 \times 2 + 6 \times g = 34$

$6 + 10 + 6g = 34 \Rightarrow 6g = 34 - 16$

$$g = \frac{18}{6} = 3$$

अत: दो छड़ों के बीच की दूरी = 3 सेमी

9. दिया गया: जूस = मिल्कशेक - ₹15;

4 जूस + 7 मिल्कशेक = ₹600 माना

मिल्कशेक का मूल्य $= m$, तो जूस $= m - 15$

$\Rightarrow 4(m - 15) + 7m = 600$

$\Rightarrow 4m - 60 + 7m = 600$

$\Rightarrow 11m = 600 + 60 = 660$

$$\Rightarrow m = \frac{660}{11} = 60$$

जूस = 60 – 15 = 45

अत: मिल्कशेक का मूल्य = ₹60 और जूस का मूल्य = ₹45

10. दिया गया: $28p - 36 = 98$

$28p = 98 + 36 = 134$

$$p = \frac{134}{28} = \frac{67}{14}$$

(i) $14p - 19 = 14 \times \frac{67}{14} - 19 = 67 - 19 = 48$

(ii) $28p - 38 = 28 \times \frac{67}{14} - 19 = 134 - 19 = 96$

11. (a) $6x + 9 = 66$

दी गई विधि: $x + 9 = 11 \rightarrow x = 2$

गलती: $6x + 9 = 66$ में दोनों पक्ष 6 से भाग देने पर $x + \frac{9}{6} = 11$ होगा, $x + 9 = 11$ नहीं।

सही हल :

$6x + 9 = 66 \Rightarrow 6x = 66 - 9 = 57$

$x = \frac{57}{6} = \frac{19}{2}$

अत: $x = \frac{19}{2}$

(b) $14y + 24 = 36$

दी गई विधि: $7y + 12 = 18 \rightarrow 7y = 6 \rightarrow y = \frac{6}{7}$

जाँच: यह विधि सही है।

$14y + 24 = 36$ को 2 से भाग देने पर $7y + 12 = 18$ मिलता है।

अत: $y = \frac{6}{7}$ यह हल सही है।

(c) $4x - 5 = 9x + 8$

दी गई विधि: $4x = 9x + 8 \rightarrow 5 + 4x = 9x + 3 \rightarrow 5x = 3 \rightarrow x = \frac{-5}{3}$

गलती: $4x - 5 = 9x + 8$ में (–5) को दाईं ओर ले जाने पर $4x = 9x + 8 + 5 = 9x + 13$ होना चाहिए, $9x + 3$ नहीं।

सही हल :

$4x - 5 = 9x + 8 \Rightarrow 4x - 9x = 8 + 5 \Rightarrow -5x = 13$

$x = -\frac{13}{5}$

अत: $x = -\frac{13}{5}$

12. (i) त्रिभुज 1 (कोण: $y, y + 15, y + 15$) :

हम जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $= 180^o$

$y + (y + 15) + (y + 15) = 180$

$3y + 30 = 180 \Rightarrow 3y = 150 \Rightarrow y = 50$

कोण: $y = 50°, y + 15 = 65°, y + 15 = 65°$

अत: त्रिभुज 1 के कोण : $50°, 65°, 65°$

(ii) त्रिभुज 2 (कोण: $x, x - 10, x + 10$) :

$x + (x - 10) + (x + 10) = 180$

$3x = 180 \Rightarrow x = 60$

कोण: $x = 60^o, x - 10 = 50°, x + 10 = 70^o$

अत: त्रिभुज 2 के कोण : $60°, 50^o, 70^o$

13. $u = 6$ वाले 4 समीकरण लिखें

उदाहरण:

$u - 6 = 0$ (हल: $u = 6$)

$3u = 18$ (हल: $u = 6$)

$2u + 4 = 16$ (हल: $u = 6$)

$5u - 10 = 20$ (हल: $u = 6$)

अत: ये चार समीकरण हैं जिनका हल $u = 6$ है।

14. माना प्रथम व्यक्ति को दी गई राशि $= x$

दूसरे को $= 2x$

तीसरे को $= 3 \times 2x = 6x$

चौथे को $= 4 \times 6x = 24x$

कुल: $x + 2x + 6x + 24x = 132$

$33x = 132$

$x = \frac{132}{33} = 4$

अत: प्रथम व्यक्ति को दी गई राशि = 4

15. दिया गया: जिराफ की ऊँचाई = अपनी ऊँचाई का आधा + 2.5 मीटर

माना जिराफ की ऊँचाई = h मीटर

$$h = \frac{h}{2} + 2.5$$

$$\Rightarrow \quad h - \frac{h}{2} = \frac{h}{2} = 2.5$$

अत: जिराफ की ऊँचाई $2 \times 2.5 = 5$ मीटर

16. (a) nवें स्थान पर वर्गों की संख्या के लिस्ट मानक सूत्र

$T_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow \quad T_n = 4 + (n-1)3 \Rightarrow T_n = 3n + 1$

अत: $T_{11} = 3(11) + 1 = 34$ वर्ग

(b) nवें स्थान पर तीलियों की संख्या के लिए मानक सूत्र

$a_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow \quad a_n = 13 + (n-1)9$

$\Rightarrow \quad a_n = 13 + 9n - 9$

$\Rightarrow \quad a_n = 9n + 4$

अत: $a_{11} = 9(11) + 4 = 99 + 4 = 103$ तीलियाँ

(c) यदि तीलियों की कुल संख्या 925 हों तो

$9n + 4 = 85$

$\Rightarrow \quad 9n = 81$

$\Rightarrow \quad n = 9$

अत: 9वीं आकृति में 85 तीलियाँ हैं।

(d) छात्र इसी प्रकार, 85 के स्थान पर 150 लेकर हल करें।

17. माना संख्या = x

$x + 36 = 10x$

$36 = 10x - x$

$36 = 9x$

$x = \frac{36}{9} = 4$

अत: वह संख्या = 4

18. (a) $5(r+2) = 10$

$\Rightarrow \quad r + 2 = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow r = 2 - 2 = 0$

(b) $-3(u+2) = 2(u-1)$

$-3u - 6 = 2u - 2$

$-3u - 2u = -2 + 6$

$-5u = 4 \Rightarrow u = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$

(c) $2(7 - 2n) = -6$

$14 - 4n = -6$

$-4n = -6 - 14 = -20$

$n = \frac{-20}{(-4)} = 5$

(d) $2(x-4) = -16$

$x - 4 = \frac{-16}{2} = -8$

$x = -8 + 4 = -4$

(e) $6(x-1) = 2(x-1) - 4$

$6x - 6 = 2x - 2 - 4$

$6x - 6 = 2x - 6$

$6x - 2x = -6 + 6$

$4x = 0 \Rightarrow x = 0$

(f) $3 - 7s = 7 - 3s$

$-7s + 3s = 7 - 3$

$-4s = 4$

$s = -1$

(g) $2x + 1 = 6 - (2x - 3)$

$2x + 1 = 6 - 2x + 3$

$2x + 1 = 9 - 2x$

$2x + 2x = 9 - 1$

$4x = 8 \Rightarrow x = 2$

(h) $10 - 5x = 3(x-4) - 2(x-7)$

$10 - 5x = 3x - 12 - 2x + 14$

$10 - 5x = x + 2$

$-5x - x = 2 - 10$

$-6x = -8$

$x = \frac{-8}{(-6)} = \frac{4}{3}$

19. पथ पहेली (प्रारम्भ से अंत तक)

प्रारम्भ से: $8x = 20 + 3x \rightarrow 5x = 20 \rightarrow x = 4 \rightarrow$ नीचे जाएँ ($x = 4$)

$2x - 9 = -3 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3 \rightarrow$ नीचे जाएँ ($x = 3$)

$8m + 8 = -72 \rightarrow 8m = -80 \rightarrow m = -10 \rightarrow$ नीचे जाएँ ($m = -10$)

$-4 = 16 - 5k \rightarrow 5k = 16 + 4 = 20 \rightarrow k = 4$ $\rightarrow$ दाईं ओर जाएँ ($k = 4$)

$2x - 9 = 3 - x \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x = 4 \rightarrow$ दाईं ओर जाएँ ($x = 4$)

$30 = 4 - 50n \rightarrow 50n = 4 - 30 = -26 \rightarrow n = -13/25 \rightarrow$ अंत

अत: पथ: प्रारम्भ $\rightarrow x = 4 \rightarrow x = 3 \rightarrow m = -10 \rightarrow k = 4 \rightarrow x = 4 \rightarrow$ अंत

20. माना Iबच्चों की संख्या = x, गधों की संख्या = y

प्रश्नानुसार $x + y = 28$ (i)

और $2x + 4y = 80$ (ii)

समी. (i) और (ii) को हल करने पर

$2x + 2y = 28 \times 2$

$2x + 4y = 80$

$- \quad - \quad -$

$-2y = -24, \qquad y = 12$

y का मान समी. (i) में रखने पर

$x + y = 28$

$x = 28 - 12 = 16$

विविध प्रश्नावली

1. $3x - 10 = 35$

$3x = 45$

$x = 15$

2. $2y = 60$

$y = 30$

3. $3v - 7 = 2v + 3$

$3v - 2v = 3 + 7$

$v = 10$

4. $k + 8 = 12 - k$

$2k = 4 = 2$

5. $\frac{x}{4} + 9 = x$

$x = 12$

6. $\frac{x}{2} = x + 1$

$x = -2$

7. $5(r + 2) = 10$

$5r + 10 = 10 = 0$

8. $13 - z = 8$

$z = 5$

9. $x + y = 76$

$x = 3y$

$4y = 76$

$y = 19$

$x = 57$

10. $7m = m - 3$

$6m = -3$

$m = -\frac{1}{2}$

11. $3n = 10 + n$

$2n = 10n = 5$

12. $800 + 20x = 2200$

$20x = 1400$

$x = 70$ km

13. $2(x - 4) = -16$

$2x - 8 = -16$

$x = -4$

14. $10 - 5x = 3(x - 4) - 2(x - 7)$

$10 - 5x = 3x - 12 - 2x + 14$

$10 - 5x = x + 2$

$8 = 6x$

$x = \frac{4}{3}$

❑❑