CHAPTERWISE
SOLUTION

Based on **NCERT** Textbook

गणित

कक्षा

10

Student Advisor
(Editorial Team)

विषय-सूची

1.	वास्तविक संख्याएँ	3
2.	बहुपद	6
3.	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	10
4.	द्विघात समीकरण	24
5.	समान्तर श्रेणियाँ	30
6.	त्रिभुज	50
7.	निर्देशांक ज्यामिति	66
8.	त्रिकोणमिति का परिचय	73
9.	त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	84
10.	वृत्त	92
11.	वृत्तों से सम्बन्धित क्षेत्रफल	99
12.	पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	106
13.	सांख्यिकी	113
14.	प्रायिकता	133

© Publishers

All Rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form by any means, electronic or mechanical, including photocopying and recording, or by any information storage and retrieval system, except as may be expressly permitted in writing by the publisher.
Every care has been taken to minimise the mistakes regarding printing and other aspects of the book. However, there is always a scope of improvement. Any suggestion for further improvement of this book would be greatly acknowledged. Published and a product of Student Advisor Publication Pvt. Ltd. E-38, Industrial Area, Mathura (U.P.)

1 वास्तविक संख्याएँ

प्रश्नावली 1.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

हल : (i) $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 5 \times 7$

(ii) $156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13 = 2^2 \times 3 \times 13$

(iii) $3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17 = 3^2 \times 5^2 \times 17$

(iv) $5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$

(v) $7429 = 17 \times 19 \times 23$

प्रश्न 2. पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों के महत्तम समापवर्तक (H.C.F.) और लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = H.C.F. × L.C.M. है।

(i) 26 और 91 (ii) 510 और 92 (iii) 336 और 54

हल : (i) दी गई संख्याएँ 26 और 91 हैं।

$$26 = 2^1 \times 13^1 \;;\; 91 = 7^1 \times 13^1$$

26 और 91 के उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल $= (13)^1 = 13$ और 26 और 91 के अधिकतम घातांक में सभी अभाज्य गुणनखण्डों का गुणनफल $= 2 \times 7 \times 13 = 182$

अतः महत्तम समापवर्तक (H.C.F.) = 13 तथा लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) = 182

अब संख्याओं का गुणनफल $= 26 \times 91 = 2366$ और H.C.F. × L.C.M. $= 13 \times 182 = 2366$

अतः संख्याओं का गुणनफल = H.C.F. × L.C.M. **उत्तर**

(ii) दी गई संख्याएँ 510, 92 हैं।

$\therefore 92 = 2 \times 2 \times 23 = (2)^2 \times (23)^1$; $510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17 = (2)^1 \times (3)^1 \times (5)^1 \times (17)^1$

92 और 510 के उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल $= (2)^1 = 2$

अतः H.C.F. = 2 तथा 92 और 510 के अधिकतम घातांक में सभी अभाज्य गुणनखण्डों का गुणनफल $= (2)^2 \times (3)^1 \times (5)^1 \times (17)^1 \times (23)^1 = 23460$

अतः L.C.M. = 23460

अतः महत्तम समापवर्तक (H.C.F.) = 2 तथा लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) = 23460

अब संख्याओं का गुणनफल $= 92 \times 510 = 46920$

और H.C.F. × L.C.M. $= 2 \times 23460 = 46920$

अतः संख्याओं का गुणनफल = H.C.F. × L.C.M. **उत्तर**

(iii) दी गई संख्याएँ 336 और 54 हैं।

$336 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^4 \times 3^1 \times 7^1$

$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^3$

अब दोनों संख्याओं के उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल $= 2^1 \times 3^1 = 6$

$\therefore$ H.C.F. = 6

और दोनों संख्याओं के अधिकतम घातों में सभी अभाज्य गुणनखण्डों का गुणनफल $= 2^4 \times 3^3 \times 7 = 16 \times 27 \times 7 = 3024$

$\therefore$ L.C.M. = 3024

अतः महत्तम समापवर्तक (H.C.F.) = 6

और लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) = 3024

$\because$ संख्याओं का गुणनफल $= 54 \times 336 = 18144$

और H.C.F. × L.C.M. $= 6 \times 3024 = 18144$

अतः संख्याओं का गुणनफल = H.C.F. × L.C.M. **उत्तर**

प्रश्न 3. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णांकों के म. स. (H.C.F.) और ल. स. (L.C.M.) ज्ञात कीजिए :

(i) 12, 15 और 21 (ii) 17, 23 और 29 (iii) 8, 9 और 25

हल : (i) दी गई संख्याएँ 12, 15 और 21 हैं।

इनके अभाज्य गुणनखण्ड करने पर

$12 = 2 \times 2 \times 3 = (2)^2 \times 3$; $15 = 3 \times 5$ तथा $21 = 3 \times 7$

तीनों संख्याओं के उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल $= 3^1 = 3$

$\therefore$ H.C.F. = 3

तथा तीनों संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डों का (अधिकतम घातों में) गुणनफल $= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 4 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

$\therefore$ L.C.M. = 420

(ii) दी गई संख्याएँ 17, 23 और 29 हैं।

इनके अभाज्य गुणनखण्ड करने पर, $17 = 1 \times 17$, $23 = 1 \times 23$ तथा $29 = 1 \times 29$

उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल = 1

$\therefore$ H.C.F. = 1

अभाज्य गुणनखण्डों का (अधिकतम घातों में) गुणनफल $= 17 \times 23 \times 29 = 11339$

$\therefore$ L.C.M. = 11339

(iii) दी गई संख्याएँ 8, 9 और 25 के अभाज्य गुणनखण्ड करने पर, $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$; $9 = 3 \times 3 = 3^2$; $25 = 5 \times 5 = 5^2$

उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों का (न्यूनतम घातों में) गुणनफल = 1, अतः H.C.F. = 1

अभाज्य गुणनखण्डों का (अधिकतम घातों में) गुणनफल $= (2)^3 \times (3)^2 \times (5)^2 = 8 \times 9 \times 25 = 1800$,

$\therefore$ L.C.M. = 1800

प्रश्न 4. यदि H.C.F. (306, 657) = 9 तो है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$$\text{L.C.M.} = \frac{306 \times 657}{9} = 34 \times 657 = 22338$$

प्रश्न 5. जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है।

हल : माना किसी प्राकृत संख्या n के लिए 6^n अंक 0 पर समाप्त होती है। तब 6^n, 5 से विभाज्य होगा।

$\therefore$ $6^n = (2 \times 3)^n$

अत: स्पष्ट है कि 6^n के अभाज्य गुणनखण्डों में 2 या 3 के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य गुणनखण्ड नहीं है ।

$\therefore$ 6^n का कोई गुणनखण्ड 5 नहीं हो सकता है ।

अत: 6^n, अंक शून्य पर समाप्त नहीं हो सकती है। **उत्तर**

प्रश्न 6. व्याख्या कीजिए कि 7 × 11 × 13 + 13 और 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 + 5 भाज्य संख्याएँ क्यों हैं ?

हल : $7 \times 11 \times 13 + 13 = 13[7 \times 11 + 1] = 13(77 + 1)$
$= 13 \times 78 = 13 \times 2 \times 3 \times 13 = 2 \times 3 \times 13 \times 13$

$\because$ 2, 3 और 13 अभाज्य संख्याएँ हैं। अत: अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के अनुसार प्रत्येक भाज्य संख्या अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में गुणनखंडित की जा सकती है। अत: यह एक भाज्य संख्या है। इसी प्रकार

$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5 = 5[7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1] = 5(1008 + 1) = 5 \times 1009$

$\because$ 5 और 1009 अभाज्य संख्याएँ हैं। अत: अंकगणित की आधारभूत प्रमेय के अनुसार यह एक भाज्य संख्या है। **उत्तर**

प्रश्न 7. किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुन: प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे?

हल : सोनिया द्वारा मैदान का एक चक्कर लगाने में लगा समय = 18 मिनट, रवि द्वारा मैदान का एक चक्कर लगाने में लगा समय = 12 मिनट, वे पुन: प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे = L.C.M. (18, 12)

$\therefore$ 18 और 12 के अभाज्य गुणनखण्ड हैं : $18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times (3)^2$; $12 = 2 \times 2 \times 3 = (2)^2 \times 3$

$$\text{L.C.M.}(18, 12) = (2)^2 \times (3)^2 = 4 \times 9 = 36$$

अत: सोनिया और रवि प्रारम्भिक स्थान पर 36 मिनट बाद मिलेंगे।

प्रश्नावली 1.2

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है ?

हल : कल्पना कीजिए कि $\sqrt{5}$ अपरिमेय न होकर एक परिमेय संख्या है, तब $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ होना चाहिए जहाँ $q \neq 0$ तथा p व q सह अभाज्य पूर्णांक हैं। अर्थात् p और q में 1 के अतिरिक्त कोई अभाज्य गुणनखण्ड सार्वनिष्ठ नहीं है।

अब $\sqrt{5} = \frac{p}{q} \Rightarrow p = \sqrt{5}q$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, $p^2 = 5q^2$

अत: 5, p^2 को विभाजित करता है।

$\therefore$ 5, p को विभाजित करेगा।

माना कि $p = 5r \Rightarrow p^2 = 25r^2 \Rightarrow 5q^2 = 25r^2 \Rightarrow q^2 = 5r^2$

अत: 5, q^2 को विभाजित करता है।

$\therefore$ 5, q को विभाजित करता है।

$\because$ p 5 से विभाज्य है और q भी 5 से विभाज्य है।

$\therefore$ 5, p और q का सार्वनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड है (जो 1 के अतिरिक्त है)। यह एक विरोधाभास है क्योंकि हमारी कल्पना के अनुसार p और q में (1 के अतिरिक्त) कोई अभाज्य गुणनखण्ड सार्वनिष्ठ नहीं है।

$\therefore$ यह संकेत करता है कि हमारी कल्पना " $\sqrt{5}$ परिमेय संख्या है" गलत है। अत: $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इति सिद्धम्।

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : माना कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

तब $3 + 2\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ होना चाहिए जबकि $q \neq 0$ और p और q पूर्णांक हैं। अब $\frac{p}{q} = 3 + 2\sqrt{5} \Rightarrow \left(\frac{p}{q} - 3\right) = 2\sqrt{5}$

$\Rightarrow \frac{p - 3q}{2q} = \sqrt{5}$, चूँकि p और q पूर्णांक है। अत: $\frac{p - 3q}{2q}$ एक परिमेय संख्या है। अर्थात् $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या होगी। परन्तु $\sqrt{5}$ परिमेय नहीं, अपरिमेय संख्या है, तब यहाँ विरोधाभास है। इस विरोधाभास के कारण हमारी गलत कल्पना है। अत: दी गई संख्या $3 + 2\sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या है। **इति सिद्धम्**

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं : (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

हल : (i) माना $\frac{1}{\sqrt{2}}$ परिमेय संख्या है।

हम ऐसे दो पूर्णांक a और b प्राप्त करते हैं कि

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$ (जहाँ a और b सहअभाज्य पूर्णांक हैं, $b \neq 0$)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow b^2 = 2a^2$$

अत: b^2, 2 से विभाज्य है।

$\therefore$ b भी 2 से विभाज्य होगी।(प्रमेय 1·3 के अनुसार)

तब माना $b = 2c \Rightarrow b^2 = (2c)^2 \Rightarrow b^2 = 4c^2$

$\Rightarrow 2a^2 = 4c^2 \Rightarrow a^2 = 2c^2$

अत: a^2, 2 से विभाज्य है, या a, 2 से विभाज्य है।

अत: a और b दोनों 2 से विभाज्य हैं। परन्तु यह इस तथ्य का विरोध करता है कि a और b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है। अत: हमारी कल्पना गलत है।

$\therefore$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(ii) माना कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore$ हम ऐसे दो पूर्णांक a और $b(b \neq 0)$ प्राप्त कर सकते हैं कि : $7\sqrt{5} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{7b}$

$\because$ a, 7 और b सभी पूर्णांक हैं।

$\therefore$ $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore$ $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

जो इसका विरोध करता है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

$\therefore$ हमारी कल्पना गलत है।

अत: $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(iii) माना कि $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore$ हम ऐसे दो पूर्णांक a और b $(b \neq 0)$ प्राप्त कर सकते हैं कि

$$6+\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} - 6 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a-6b}{b}$$

$\because$ a, b और 6 सभी पूर्णांक हैं।

$\therefore$ $\frac{a-6b}{b}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore$ $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या होगी।

इससे इस तथ्य का विरोध होता है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। अत: हमारी कल्पना गलत है।

अत: $6+\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. 1600 के अभाज्य गुणनखंड कीजिए।

हल : अभाज्य गुणनखण्ड $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$

प्रश्न 2. अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा 176 तथा 275 का HCF ज्ञात कीजिए।

हल : $176 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 11$; $275 = 5 \times 5 \times 11$

HCF = 11

प्रश्न 3. दिया है कि म.स. (HCF) (135, 225) = 45, तो ल.स. (LCM) (135, 225) ज्ञात कीजिए।

हल : LCM$= \frac{135 \times 225}{45} = 675$

प्रश्न 4. छोटी-से-छोटी अभाज्य संख्या तथा छोटी-से-छोटी भाज्य संख्या का म.स. (HCF) क्या है?

हल : छोटी से छोटी अभाज्य संख्या 2 है और छोटी से छोटी भाज्य संख्या 4 है। अत: $2 = 2 \times 1$ तथा $4 = 1 \times 2 \times 2$

HCF = 2.

प्रश्न 5. दो पूर्णांक संख्याओं का HCF व LCM क्रमश: 12 और 36 हैं, यदि एक पूर्णांक 48 है, तो दूसरा पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

संकेत : LCM × HCF = दोनों संख्याओं का गुणनफल

प्रश्न 6. वह सबसे छोटी संख्या लिखिए जो 306 तथा 657 से पूर्णतया विभाजित हो।

संकेत : वह सबसे छोटी संख्या जो 306 तथा 657 से पूर्णतया विभाजित हो इसका (LCM) होगा।

प्रश्न 7. 1260 के अभाज्य गुणनखंडों को घातांक के रूप में लिखिए।

हल : $1260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

प्रश्न 8. 7650 के अभाज्य गुणनखंड को घातांकों के रूप में लिखिए।

हल : $7650 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 17$

प्रश्न 9. दो संख्याओं a और b के म.स. (HCF) और ल.स. (LCM) में सम्बन्ध को व्यक्त कीजिए।

हल : दो संख्याओं a और b का म.स. और ल.स. से सम्बन्ध $=$ HCF × LCM $= a \times b$.

प्रश्न 10. संख्या 140 को अभाज्य गुणनखंड के रूप में लिखिए।

हल : अभाज्य गुणनखण्ड $5313 = 3 \times 7 \times 11 \times 23$

$140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$

प्रश्न 11. संख्या 3825 के अभाज्य गुणनखंड कीजिए।

हल : अभाज्य गुणनखण्ड $3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$

प्रश्न 12. संख्या 20570 के अभाज्य गुणनखंड लिखिए।

हल : अभाज्य गुणनखण्ड $20570 = 2 \times 5 \times 11 \times 11 \times 17$

प्रश्न 13. दिया है कि म.स. (HCF) (945, 140) = 35 तो ल.स. (LCM) (945, 140) ज्ञात कीजिए।

हल : $\text{LCM} = \dfrac{945 \times 140}{35} = 3780$

प्रश्न 14. यदि दो संख्याओं 322 और 588 का महत्तम समापवर्तक 14 हो, तो इनका लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल : $\text{LCM} = \dfrac{322 \times 588}{14} = 13524.$

प्रश्न 15. संख्याओं 44 और 99 का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात कीजिए।

हल : संख्याओं के गुणनखण्ड $44 = 2 \times 2 \times 11$

$99 = 3 \times 3 \times 11 \Rightarrow \text{HCF} = 11$

प्रश्न 16. क्या दो संख्याओं का म.स. (HCF) = 15 तथा ल.स. (LCM) = 175 हो सकता है? कारण दीजिए।

हल : नहीं, क्योंकि किसी भी स्थिति में LCM, HCF का गुणज (Multiple) होना चाहिए, लेकिन 175, 15 से पूरी तरह विभाजित नहीं है, इसलिए यह संभव नहीं है।

प्रश्न 17. एक विद्यालय में कक्षा X में दो सेक्शन A और B हैं। सेक्शन A में 48 छात्र हैं तथा सेक्शन B में 60 छात्र हैं। विद्यालय की लाइब्रेरी में पुस्तकों की वह कम से कम संख्या ज्ञात कीजिए ताकि प्रत्येक सेक्शन में, समान तथा पूरी बाँटी जा सकें।

हल : पुस्तकों की कम से कम संख्या ज्ञात करने के लिए संख्याओं का (LCM) लेना होगा :

$\text{LCM} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 240$

प्रश्न 18. सिद्ध कीजिए कि $9\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : प्रश्नावली 1.2 प्रश्न-3 (ii) की भाँति हल करें।

प्रश्न 19. सिद्ध कीजिए $6 + \sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : प्रश्नावली 1.2 प्रश्न 3(iii) की भाँति हल करें।

प्रश्न 20. सिद्ध कीजिए $5\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : प्रश्नावली 1.2 प्रश्न 3(ii) की भाँति हल करें।

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. यदि p एक अभाज्य धनात्मक पूर्णांक संख्या है तो सिद्ध कीजिए $\sqrt{p}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : प्रश्नावली 1.2 प्रश्न 1 की भाँति हल करें।

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : प्रश्नावली 1.2 प्रश्न 3(i) की भाँति हल करें।

प्रश्न 3. पूर्णांक संख्याओं 94 और 404 का महत्तम समापवर्तक (HCF) एवं लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) ज्ञात कीजिए तथा सत्यापित कीजिए कि HCF × LCM = पूर्णांकों का गुणनफल।

हल : प्रश्नावली 1.2 प्रश्न 2 की भाँति हल करें।

प्रश्न 4. पूर्णांकों के युग्म 51, 119 का महत्तम समापवर्तक (HCF) और लघुतम समापवर्त्य (LCM) ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है।

संकेत : प्रश्नावली 1.2 प्रश्न 2 की भाँति हल करें।

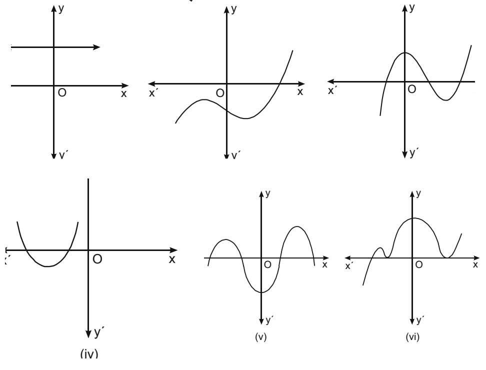
प्रश्न 5. एक आयताकार बरामदा 18 मी 72 सेमी लम्बा तथा 13 मी 20 सेमी चौड़ा है। इसमें समान विमाओं वाली वर्गाकार टाइलें लगानी हैं। इस प्रकार की टाइलों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए।

संकेत : टाइलों की संख्या $= \dfrac{\text{बरामदे का क्षेत्रफल}}{\text{एक टाइल का क्षेत्रफल}}$

2 बहुपद

प्रश्नावली 2.1

प्रश्न 1. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया है। प्रत्येक स्थिति में, $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।



उत्तर : (i) 0, (ii) 1 , (iii) 3, (iv) 2, (v) 4, (vi) 3

प्रश्नावली 2.2

प्रश्न 1. निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए :

(i) $x^2 - 2x - 8$ **(ii)** $4s^2 - 4s + 1$

(iii) $6x^2 - 3 - 7x$ **(iv)** $4u^2 + 8u$

(v) $t^2 - 15$ **(vi)** $3x^2 - x - 4$

हल : (i) दिया गया बहुपद $f(x) = x^2 - 2x - 8$

$= x^2 - (4 - 2)\,x - 8 = x^2 - 4x + 2x - 8$

$= x(x-4) + 2(x-4) = (x-4)(x+2)$

$\therefore x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$

बहुपद $f(x)$ के शून्यक ज्ञात करने के लिए $f(x)$ शून्य होगा।

$\Rightarrow f(x) = 0$

अत: यदि $x - 4 = 0$ हो, तो $x = 4$ या फिर $x + 2 = 0$ हो, तो $x = -2$। अत: बहुपद $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक $= 4$ और -2

बहुपद के गुणांकों और शून्यकों में सम्बन्ध :

$$\text{शून्यकों का योग} = 4 + (-2) = 2 = \frac{-(-2)}{1} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = 4 \times -2 = -8 = \frac{-8}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अत: बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के बीच सम्बन्ध सत्य है।

(ii) दिया हुआ बहुपद $= 4s^2 - 4s + 1$

$= (2s)^2 - 2(2s).1 + (1)^2 = (2s-1)^2$

बहुपद $f(x)$ के शून्यक ज्ञात करने के लिए $f(x)$ शून्य होगा।

$\Rightarrow (2s-1)^2 = 0$

यदि $(2s-1)^2 = 0 \Rightarrow 2s - 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$

यहाँ बहुपद के शून्यक समान हैं।

अत: बहुपद के शून्यक $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{2}$ हैं।

बहुपद के शून्यकों तथा गुणांकों में सम्बन्ध :

$$\text{शून्यकों का योग} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \frac{-(-4)}{4} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अत: बहुपद के शून्यकों और गुणांकों के मध्य सम्बन्ध सही है।

(iii) दिया गया बहुपद $f(x)$

$= 6x^2 - 3 - 7x = 6x^2 - 7x - 3 = 6x^2 - (9-2)x - 3$

$= 6x^2 - 9x + 2x - 3 = 3x(2x-3) + 1(2x-3)$

$= (2x-3)(3x+1)$

$\therefore$ बहुपद $6x^2 - 3 - 7x = (2x-3)(3x+1)$

बहुपद $6x^2 - 7x - 3$ के शून्यक ज्ञात करने के लिए $f(x)$ शून्य होगा।

$\Rightarrow f(x) = 0$

यदि $2x - 3 = 0$ हो, तो $2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

और यदि $3x + 1 = 0$ हो, तो $3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

अत: बहुपद के शून्यक $\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$ हैं।

बहुपद के शून्यकों तथा गुणांकों में सम्बन्ध :

$$\text{शून्यकों का योग} = \frac{3}{2} + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{9-2}{6} = \frac{7}{6} = \frac{-(-7)}{6} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{3}{2} \times \frac{-1}{3} = \frac{-1}{2} = \frac{-3}{6} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अत: बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के बीच सम्बन्ध सत्य है।

(iv) दिया गया बहुपद $f(u) = 4u^2 + 8u \Rightarrow f(u) = 4u(u+2)$

बहुपद $f(u)$ के शून्यक ज्ञात करने के लिए $f(u)$ शून्य होगा।

$\therefore \quad f(u) = 0 \Rightarrow \quad 4u(u+2) = 0$

$\Rightarrow u = 0$ या $u + 2 = 0 \Rightarrow u = 0$ या $u = -2$

अत: $f(u)$ के शून्यक 0 और -2 है।

बहुपद के शून्यकों तथा गुणांकों में सम्बन्ध :

$$\therefore \quad \text{शून्यकों का योग} = 0 + (-2) = -2$$

$$\frac{-8}{4} = -\frac{u \text{ का गुणांक}}{u^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{तथा शून्यकों का गुणनफल} = 0 \times (-2) = 0 = \frac{0}{4} = \frac{\text{अचर पद}}{u^2 \text{ का गुणांक}}$$

अत: बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के बीच सम्बन्ध सत्य है।

(v) दिया गया बहुपद $f(t) = t^2 - 15$ है।

बहुपद $f(t)$ के शून्यक ज्ञात करने के लिए $f(x)$ शून्य होगा।

$$t^2 = 15 \text{ या } t = \pm\sqrt{15}$$

अत: बहुपद $t^2 - 15$ के शून्यक $= +\sqrt{15}, -\sqrt{15}$

बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के मध्य सम्बन्ध :

$$\text{शून्यकों का योग} = \sqrt{15} - \sqrt{15} = 0 = \frac{-0}{1} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{और शून्यकों का गुणनफल} = \sqrt{15} \times -\sqrt{15} = -15$$

$= \frac{-15}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

अत: बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के मध्य सम्बन्ध सत्य है।

(vi) दिया गया बहुपद $f(x) = 3x^2 - x - 4$

$= 3x^2 - (4 - 3)x - 4 = 3x^2 - 4x + 3x - 4$

$= x(3x - 4) + 1(3x - 4) = (3x - 4)(x + 1)$

$\therefore \quad 3x^2 - x - 4 = (3x - 4)(x + 1)$

बहुपद $f(x)$ के शून्यक ज्ञात करने के लिए $f(x)$ शून्य होगा।

$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow (3x - 4)(x + 1) = 0$

यदि $3x - 4 = 0$ हो, तो $3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

या फिर $x + 1 = 0$ हो, तो $x = -1$

अत: बहुपद के शून्यक $\frac{4}{3}$ और -1 हैं।

बहुपद के शून्यकों तथा गुणांकों में सम्बन्ध :

शून्यकों का योग $= \frac{4}{3} + (-1) = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$

$= \frac{-(-1)}{3} = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= \frac{-4}{3} \times (-1) = \frac{-4}{3}$

$= \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

अत: बहुपद के गुणांकों और शून्यकों के बीच सम्बन्ध सत्य है।

प्रश्न 2. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमश: हैं :

(i) $\frac{1}{4}$ और -1 (ii) $\sqrt{2}$ और $\frac{1}{3}$ (iii) 0 और $\sqrt{5}$

(iv) 1 और 1 (v) $-\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{4}$ (vi) 4 और 1

हल : यदि द्विघात बहुपद $f(x)$ के शून्यक ज्ञात हो तो निम्न सूत्र द्वारा अभीष्ट बहुपद ज्ञात करते है

$f(x) = k\{x^2 -$ (शून्यकों का योग)x

$+$ शून्यकों का गुणनफल$\}$, जहाँ $k =$ एक वास्तविक संख्या

(i) माना $f(x)$ वह बहुपद है जिसके शून्यकों का योग $\frac{1}{4}$ और गुणनफल -1 हैं।

$\therefore \; f(x) = k\left[x^2 - \frac{1}{4}x - 1\right] = k\left(\frac{4x^2 - x - 4}{4}\right)$

$= \frac{k}{4}\left(4x^2 - x - 4\right) = K(4x^2 - x - 4)$

जहाँ $\left(\frac{k}{4} = K \text{ वास्तविक संख्या है।}\right)$

अत: अभीष्ट बहुपद $4x^2 - x - 4$ या $K(4x^2 - x - 4)$ है।

(ii) माना $f(x)$ वह द्विघात बहुपद है, जिसके शून्यकों का योग $\sqrt{2}$ और गुणनफल $\frac{1}{3}$ हैं।

$\therefore \; f(x) = k\left(x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{3}\right) = \frac{k}{3}(3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1)$

$= K(3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1)$ जहाँ $\frac{k}{3}$ एक अचर पद है/वास्तविक संख्या है।

अत: अभीष्ट बहुपद $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$

या $K(3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1)$ है। **उत्तर**

(iii) माना $f(x)$ वह द्विघात बहुपद है जिसके शून्यकों का योग 0 और गुणनफल $\sqrt{5}$ हैं।

$\therefore f(x) = k[x^2 - 0.x + \sqrt{5}] = k[x^2 + \sqrt{5}]$

अत: अभीष्ट बहुपद $x^2 + \sqrt{5}$ है। **उत्तर**

(iv) माना $f(x)$ वह द्विघात बहुपद है जिसके शून्यकों का योगफल 1 और गुणनफल 1 हैं।

$\therefore \; f(x) = k(x^2 - 1.x + 1) = k(x^2 - x + 1)$, जहाँ k अचर पद है। अत: अभीष्ट बहुपद $x^2 - x + 1$ है। **उत्तर**

(v) माना $f(x)$ वह द्विघात बहुपद है जिसके शून्यकों का योग $-\frac{1}{4}$ और गुणनफल $\frac{1}{4}$ हैं।

$\therefore \quad f(x) = k\left(x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{4}\right)$

$= k\left(x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{k}{4}(4x^2 + x + 1)$,

अत: अभीष्ट बहुपद $4x^2 + x + 1$ है। **उत्तर**

(vi) माना $f(x)$ वह द्विघात बहुपद है जिसके शून्यकों का योग 4 और गुणनफल 1 हैं।

$\therefore \; f(x) = k[x^2 - 4x + 1]$, (जहाँ k अचर पद है)

अत: अभीष्ट बहुपद $x^2 - 4x + 1$ है। **उत्तर**

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अति लघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यांकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 4 तथा – 1 है।

संकेत : x^2 – (शून्यांको का योग) + शून्यांको का गुणनफल = 0

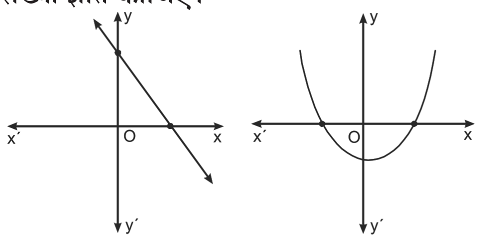
प्रश्न 2. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यांकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 1 तथा $\frac{1}{2}$ संख्याएँ हैं।

संकेत : x^2 – (शून्यांको का योग)x + शून्यांकों का गुणनफल

प्रश्न 3. यदि $(x - 5)$ बहुपद $x^3 - 3x^2 + kx - 10$ का एक गुणनखंड हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : $x = 5$ रखने पर $x^3 - 3x^2 - kx - 10 = 0, k = -8$

प्रश्न 4. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया गया है। प्रत्येक स्थिति में $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।



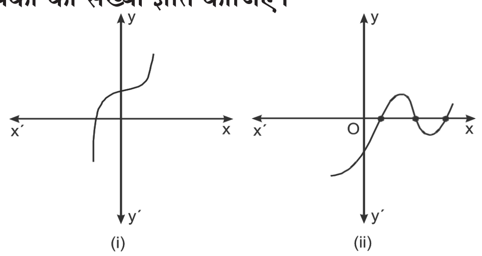
(i) (ii)

हल : शून्यक ज्ञात करने के लिए, ये देखेंगे कि बिन्दु x-अक्ष को कितने स्थान पर काटता है।

(i) ग्राफ x-अक्ष को एक बिन्दु पर काटता है। इसलिए शून्यक = **1**।

(ii) ग्राफ x-अक्ष को दो बिन्दुओं पर काटता है अतः शून्यक = **2**।

प्रश्न 5. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया गया है। प्रत्येक स्थिति में $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।



(i) (ii)

हल : (i) 1 क्योंकि ग्राफ x-अक्ष को एक बिन्दु पर काटता है।

(ii) 3 क्योंकि ग्राफ x-अक्ष को तीन बिन्दुओं पर काटता है।

प्रश्न 6. यदि α और β द्विघात बहुपद $f(x) = x^2 - px + q$ के शून्यक हैं, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

(क) $\alpha^2 + \beta^2$ **(ख)** $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

संकेत : (क) $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$

या $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

(ख) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ का मान $= \frac{(\beta+\alpha)}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{p}{q}$.

प्रश्न 7. द्विघात बहुपद $p(x) = 2x^2 - x - 6$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

संकेत : $p(x) = 2x(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(2x + 3)$

प्रश्न 8. द्विघात बहुपद $x^2 - 6x + 1$ के शून्यकों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : शून्यकों का गुणनफल $= \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1.$

प्रश्न 9. बहुपद $5x^2 + 2x - 3$ के शून्यकों का योग तथा गुणनफल ज्ञात कीजिए।

संकेतः योग $= \frac{-b}{a}$ = गुणनफल $= \frac{c}{a}$

प्रश्न 10. यदि द्विघात बहुपद समीकरण $4x^2 + (2k + 1)x - 9$ का एक शून्यक दूसरे का ऋणात्मक है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : माना एक शून्यक α है, तो प्रश्नानुसार, दूसरा शून्यक $-\alpha$ होगा।

शून्यकों का योग$= \frac{-b}{a} \Rightarrow \alpha + (-\alpha) = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{2}$

प्रश्न 11. $f(x) = x^2 - (\sqrt{3}+1)x + \sqrt{3}$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

संकेत : $f(x) = (x - \sqrt{3})(x - 1)$

बहुपद के शून्यक $\sqrt{3}$ और 1 हैं।

प्रश्न 12. यदि बहुपद $f(x) = x^2 - 8x + k$ के शून्यकों के वर्गों का योग 40 है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : शून्यकों का योग $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{-8}{1} = 8$

शून्यकों का गुणनफल $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{k}{1} = k$

$\therefore \quad \alpha^2 + \beta^2 = 40$

हम जानते है कि $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ हैं

प्रश्न 13. यदि α तथा β बहुपद $f(x) = 5x^2 - 7x + 1$ के शून्यक है, तो $\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. द्विघात बहुपद $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यक एवं गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

संकेत : शून्यांकों का योग $(\alpha + \beta) = 4 + (-2) = 2$

सूत्र से योग $= \frac{-b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$

तथा शून्यकों का गुणनफल $(\alpha\beta) = 4 \times (-2) = -8$

सूत्र से गुणनफल $\frac{c}{a} = \frac{-8}{1} = -8$ दोनों समान हैं।

प्रश्न 2. द्विघात बहुपद $x^2 + x - 2$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल : शून्यकों का योग $\alpha + \beta = (-2) + 1 = -1$

सूत्र से योग $\frac{-b}{a} = \frac{-1}{1} = -1$ दोनों समान हैं।

तथा शून्यकों का गुणनफल $\alpha\beta = (-2) \times (1) = -2$

सूत्र से $\frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$ दोनों समान हैं।

प्रश्न 3. द्विघात बहुपद $2x^2 - 8x + 6$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों एवं गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।

संकेत :

शून्यकों का योगफल : $\alpha + \beta = 1 + 3 = 4$

सूत्र से $\frac{-b}{a} = -\frac{(-8)}{2} = \frac{8}{2} = 4$

दोनों समान हैं। शून्यकों का गुणनफल $\alpha\beta = 1 \times 3 = 3$

सूत्र से $\frac{c}{a} = \frac{6}{2} = 3$

प्रश्न 4. $P(x) = 2x^2 - x - 6$ के शून्यक ज्ञात कीजिए तथा शून्यकों और गुणांकों के बीच के सम्बन्ध को सत्यापित कीजिए।

संकेत : शून्यकों का योगफल :

$$\alpha + \beta = 2 + \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

सूत्र से $\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2}$ दोनों समान हैं।

शून्यकों का गुणनफल $\alpha\beta = 2 \times \frac{(-3)}{2} = -3$

सूत्र से, $\frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3$

प्रश्न 5. यदि बहुपद $p(x) = 2x^2 + 5x + k$ के शून्यक α तथा β, सम्बन्ध $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = \frac{21}{4}$ को सन्तुष्ट करते हैं, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ = तथा $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

प्रथम में दी गई शर्त के अनुसार, $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = \frac{21}{4}$

हम जानते हैं कि, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

3 दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

प्रश्नावली 3·1

प्रश्न 1. निम्नलिखित समस्याओं में रैखिक समीकरण युग्मों का निर्माण कीजिए और उनके ग्राफीय विधि से हल ज्ञात कीजिए :

(i) कक्षा X के 10 विद्यार्थियों ने एक गणित की पहेली प्रतियोगिता में भाग लिया। यदि लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से 4 अधिक हो, तो प्रतियोगिता में भाग लेने वाले लड़के और लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

(ii) 5 पेंसिलों और 7 कलमों का कुल मूल्य ₹ 50 है, जबकि 7 पेंसिलों और 5 कलमों का कुल मूल्य ₹ 46 है। एक पेंसिल और एक कलम का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : (i) माना लड़कियों की संख्या x तथा लड़कों की संख्या y है।

$\therefore$ कुल संख्या $= x + y$

प्रश्नानुसार, $x + y = 10$

$\because$ लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से 4 अधिक है।

$\therefore$ $x = y + 4 \Rightarrow x - y = 4$

$\therefore$ रैखिक समीकरण युग्म :

$$x + y = 10 \quad \ldots(i)$$
$$x - y = 4 \quad \ldots(ii)$$

ज्यामितीय निरूपण : समीकरण (ii) से,

x के विभिन्न मानों के लिए y के मान निम्न होंगें :

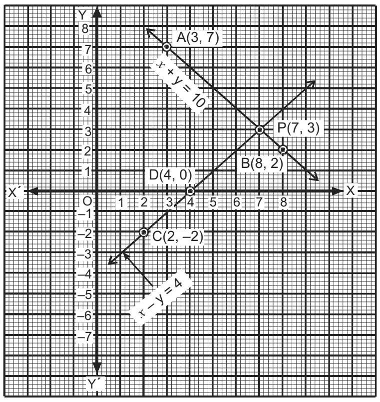
x	3	7	8
y	7	3	2

पुन: समीकरण (ii) से

x के विभिन्न मानों के लिए y के मान निम्न होंगें :

x	2	7	4
y	– 2	3	0

बिन्दुओं (3, 7), (7, 3) तथा (8, 2) का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $x + y = 10$ का आलेख रेखा AB प्राप्त होती है।



पुन: बिन्दुओं (2, – 2), (7, 3) तथा (4, 0) का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $x - y = 4$ का आलेख रेखा CD प्राप्त होती है। आलेख से स्पष्ट है कि दोनों रैखिक समीकरणों से प्राप्त सरल रेखाएँ बिन्दु $P(7, 3)$ पर प्रतिच्छेदित होती हैं।

$\therefore$ बिन्दु P (7, 3) आलेखीय स्थिति है।

अत: लड़कियों की संख्या $(x) = 7$

तथा लड़कों की संख्या $(y) = 3$ **उत्तर**

(ii) माना कि 1 पेंसिल का मूल्य ₹ x तथा 1 कलम का मूल्य ₹ y है।

प्रश्नानुसार, 5 पेंसिलों तथा 7 कलमों का मूल्य ₹ 50 है।

$$5x + 7y = 50$$

प्रश्नानुसार, 7 पेंसिलों तथा 5 कलमों का मूल्य ₹ 46 है।

$$7x + 5y = 46$$

$\therefore$ रैखिक समीकरण युग्म

$$5x + 7y = 50 \quad ...(i)$$
$$7x + 5y = 46 \quad ...(ii)$$

ज्यामितीय निरूपण : समीकरण (i) से,

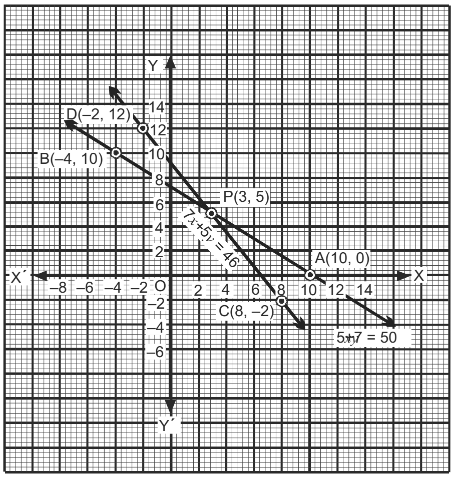
x के विभिन्न मानों के लिए y के मान निम्न होंगे :

x	– 4	3	10
y	10	5	0

समीकरण (ii) से

x के विभिन्न मानों के लिए y के मान निम्न होंगें :

x	– 2	3	8
y	12	5	– 2



बिन्दुओं (– 4, 10), (3, 5) तथा (10, 0) का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $5x + 7y = 50$ का आलेख रेखा AB प्राप्त होती है। पुन: बिन्दुओं (– 2, 12), (3, 5) तथा (8, – 2) का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $7x + 5y = 46$ का आलेख रेखा CD प्राप्त होती है।

आलेख से स्पष्ट है कि दोनों रैखिक समीकरणों से प्राप्त सरल रेखाएँ बिन्दु $P(3, 5)$ पर काटती हैं।

दिए हुए समीकरण-युग्म का अद्वितीय सार्व हल $x = 3$, $y = 5$ है। अत: एक पेन्सिल का मूल्य ₹ 3 और एक कलम का मूल्य ₹ 5 है। **उत्तर**

प्रश्न 2. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं, समांतर हैं अथवा संपाती हैं :

(i) $5x - 4y + 8 = 0$ तथा $7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$ तथा $18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$ तथा $2x - y + 9 = 0$

हल : (i) यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{7}; \frac{b_1}{b_2} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3};$

और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{8}{-9}$ यहाँ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

अत: दिए गए रैखिक समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं। **उत्तर**

(ii) यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}; \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$

और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

अत: दिए गए रैखिक समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ सम्पाती हैं। **उत्तर**

(iii) यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{6}{2} = 3; \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-1} = 3$

और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{10}{9}$ यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

अत: दिए गए रैखिक समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ एक-दूसरे के समान्तर हैं। **उत्तर**

प्रश्न 3. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म संगत हैं या असंगत हैं :

(i) $3x + 2y = 5; 2x - 3y = 7$

(ii) $2x - 3y = 8; 4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7; 9x - 10y = 14$

(iv) $5x - 3y = 11; -10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8; 2x + 3y = 12$

हल : (i) दिया गया रैखिक समीकरण-युग्म है :

$3x + 2y = 5$ या $3x + 2y - 5 = 0$

और $2x - 3y = 7$ या $2x - 3y - 7 = 0$

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}$ और $\frac{b_1}{b_2} = -\frac{2}{3}$ अत: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$\therefore$ रैखिक समीकरण युग्म का एक अद्वितीय हल है।

अत: दिया हुआ रैखिक समीकरण युग्म संगत है। **उत्तर**

(ii) दिया गया समीकरण युग्म

$2x - 3y = 8$ या $2x - 3y - 8 = 0$ ...(i)

और $4x - 6y = 9$ या $4x - 6y - 9 = 0$ ...(ii)

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$ और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-9} = \frac{8}{9}$

$\because \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ दिए गए समीकरण युग्म का कोई हल नहीं है।

अत: दिया गया रैखिक समीकरण युग्म असंगत है। **उत्तर**

(iii) दिया गया समीकरण युग्म : $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$

या $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y - 7 = 0$ ...(i)

और $9x - 10y = 14$ या $9x - 10y - 14 = 0$ ...(ii)

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{3}{2}}{9} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{6}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{\frac{5}{3}}{-10} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{-10} = \frac{1}{-6}$

और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-7}{-14} = \frac{1}{2}$ यहाँ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

समीकरण युग्म का एक अद्वितीय हल है।

अत: दिया गया समीकरण युग्म संगत है। **उत्तर**

(iv) दिया गया समीकरण युग्म :

$5x - 3y = 11$ या $5x - 3y - 11 = 0$ ...(i)

और $-10x + 6y = -22$ या $-10x + 6y + 22 = 0$ ...(ii)

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{-10} = \frac{-1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$

और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-11}{22} = \frac{-1}{2}$ तथा $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

समीकरण युग्म सम्पाती है। दिए गए समीकरण युग्म के अनन्त हल हैं। अत: दिया गया रैखिक समीकरण युग्म संगत है। **उत्तर**

(v) दिया गया रैखिक समीकरण युग्म है :

$\frac{4}{3}x + 2y = 8$ या $\frac{4}{3}x + 2y - 8 = 0$ .... (i)

और $2x + 3y = 12$ और $2x + 3y - 12 = 0$ ... (ii)

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}; \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{3}; \frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-12} = \frac{2}{3}$

$\because \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ सम्पाती होंगी।

अत: दिया गया रैखिक समीकरण युग्म संगत है। **उत्तर**

प्रश्न 4. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों में से कौन-से युग्म संगत/असंगत है, यदि संगत है तो ग्राफीय विधि से हल कीजिए।

(i) $x + y = 5, 2x + 2y = 10$

(ii) $x - y = 8, 3x - 3y = 16$

(iii) $2x + y - 6 = 0, 4x - 2y - 4 = 0$

(iv) $2x - 2y - 2 = 0, 4x - 4y - 5 = 0$

हल : (i) दिया गया रैखिक समीकरण युग्म :

$$x + y = 5 \quad \text{या} \quad x + y - 5 = 0 \quad \ldots(1)$$

$$2x + 2y = 10 \text{ या } 2x + 2y - 10 = 0 \quad \ldots(2)$$

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}; \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$ और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$

$\because \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ सम्पाती होंगी।

अत: दिया गया रैखिक समीकरण युग्म संगत है।

आलेखीय विधि : समीकरण (1) से,

x के विभिन्न मानों के लिए y के मान निम्न होंगें :

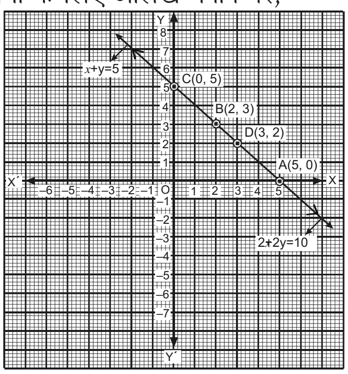
x	5	2	0
y	0	3	5

समीकरण (2) से,

x के विभिन्न मानों के लिए y के मान निम्न होंगें :

x	5	3	0
y	0	2	5

दोनों सारणियों के लिए आलेख बनाने पर,



आलेख से यह स्पष्ट है कि दिया गया रैखिक समीकरण युग्म सम्पाती रेखाएँ हैं। अत: इनके अपरिमित रूप से अनेकों हल हैं। **उत्तर**

(ii) दिया गया रैखिक समीकरण युग्म :

$$x - y = 8 \quad \text{या} \quad x - y - 8 = 0 \quad \ldots(1)$$

$$3x - 3y = 16 \text{ या } 3x - 3y - 16 = 0 \quad \ldots(2)$$

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}$

$\because \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ दिये गये समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होगा।

अत: दिया गया रैखिक समीकरण युग्म असंगत है। **उत्तर**

(iii) यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$ यहाँ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$\therefore$ दिए गए समीकरण युग्म का एक अद्वितीय हल होगा।

अत: समीकरण युग्म संगत है।

आलेखीय विधि : समीकरण (1) से,

x के विभिन्न मानों के लिए y के मान निम्न होंगें :

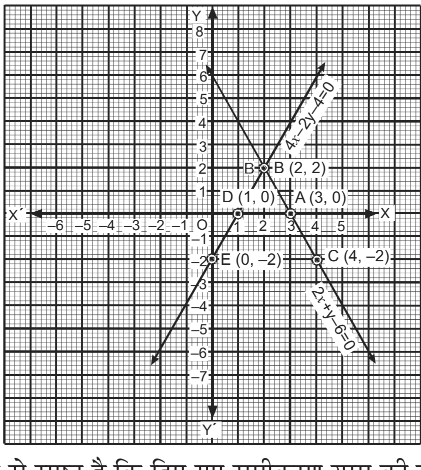
x	3	2	4
y	0	2	– 2

समीकरण (ii) से,

x के विभिन्न मानों के लिए y के मान निम्न होंगें :

x	1	2	0
y	0	2	– 2

दोनों सारणियों के लिए आलेख बनाने पर,



आलेख से स्पष्ट है कि दिए गए समीकरण युग्म की दो सरल रेखाएँ बिन्दु $B(2, 2)$ पर काटती हैं।

$$x = 2, y = 2$$

अतः दिए गए समीकरण युग्म के अद्वितीय हल हैं। **उत्तर**

(iv) यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$

$\because \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

$\therefore$ दिए गये समीकरण युग्म का कोई हल नहीं है।

अतः दिया गया रैखिक समीकरण युग्म असंगत है। **उत्तर**

प्रश्न 5. एक आयताकार बाग, जिसकी लम्बाई चौड़ाई से 4 मीटर अधिक है, का अर्द्धपरिमाप 36 मीटर है। बाग की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना आयताकार बाग की लम्बाई x मीटर और चौड़ाई y मीटर है।

दिया है, लम्बाई, चौड़ाई से 4 मीटर अधिक है।

$x = y + 4$ या $x - y = 4$

आयताकार बाग का परिमाप $= 2(x + y)$ मीटर

आयताकार बाग का अर्द्धपरिमाप $= \frac{1}{2} \times$ परिमाप

$= \frac{1}{2} \times 2(x + y) = (x + y)$ मीटर

परन्तु दिया है अर्द्ध परिमाप = 36 मीटर

$\therefore \quad x + y = 36$

$\therefore$ रैखिक समीकरण युग्म

$x - y = 4$ ...(i)

और $x + y = 36$ ...(ii)

ज्यामितीय विधि द्वारा हल :

समीकरण (i) से

x के विभिन्न मानों के लिए y के मान निम्न होंगें :

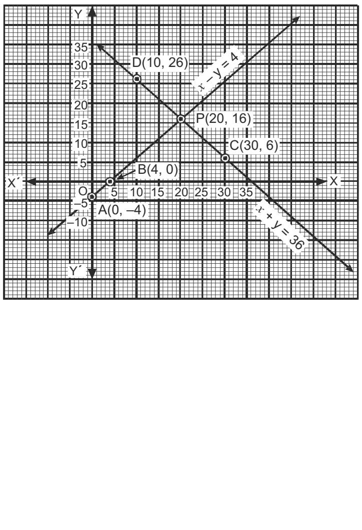
x	0	4	20
y	– 4	0	16

समीकरण (ii) से

x के विभिन्न मानों के लिए y के मान निम्न होंगें :

x	30	20	10
y	6	16	26

दोनों सारणियों के लिए आलेख बनाने पर,



आलेख से स्पष्ट है कि रैखिक समीकरणों का युग्म बिन्दु $P(20, 16)$ पर काटता है।

$\therefore \quad x = 20, y = 16$

अतः बाग की लम्बाई = 20 मीटर

तथा चौड़ाई = 16 मीटर

प्रश्न 6. एक रैखिक समीकरण $2x + 3y - 8 = 0$ दी गई है। दो चरों में एक ऐसी और रैखिक समीकरण लिखिए ताकि प्राप्त युग्म का ज्यामितीय निरूपण जैसा कि :

(i) प्रतिच्छेदी रेखाएँ हों। (ii) समान्तर रेखाएँ हों।

(iii) सम्पाती रेखाएँ हों।

हल : दिया गया रैखिक समीकरण $2x + 3y - 8 = 0$

व्यापक रैखिक समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ से तुलना करने पर, $a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = -8$

(i) जब समीकरण युग्म, प्रतिच्छेद करती हुई रेखाएँ निरूपित करता है तो शर्त— $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow \frac{2}{a_2} \neq \frac{3}{b_2}$

अर्थात् a_2 का मान 2 अथवा 0 नहीं होना चाहिए और b_2 का मान 3 अथवा 0 नहीं होना चाहिए।

जहाँ $a_2 \neq 2$ तथा $b_2 \neq 3$ और $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ है।

अतः सम्भावित रैखिक समीकरण $3x + 2y - 7 = 0$ है। **उत्तर**

(ii) जब समीकरण युग्म समान्तर रेखाएँ निरूपित करता है, तो शर्त $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ या $\frac{2}{a_2} = \frac{3}{b_2} \neq \frac{-8}{c_2}$

$\because \quad \frac{2}{a_2} = \frac{3}{b_2} \Rightarrow \frac{a_2}{b_2} = \frac{2}{3}$

अर्थात् a_2 और b_2 का मान 2 : 3 में होना चाहिए।

माना $a_2 = 2k$ तथा $b_2 = 3k$, जहाँ k एक स्थिरांक है।

$\because \frac{3}{b_2} \neq \frac{-8}{c_2} \Rightarrow \frac{3}{3k} \neq \frac{-8}{c_2} \Rightarrow c_2 \neq -8k$

अभीष्ट समीकरण $2kx + 3ky - mk = 0; m \neq -8$

अतः सम्भावित रैखिक समीकरण $2x + 3y - 12 = 0$ है। **उत्तर**

(iii) जब समीकरण युग्म सम्पाती रेखाएँ निरूपित करता है तो शर्त $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{2}{a_2} = \frac{3}{b_2} = \frac{-8}{c_2} = \frac{1}{k}$

$\Rightarrow a_2 = 2k, b_2 = 3k$ और $c_2 = -8k$

अतः अभीष्ट समीकरण $2kx + 3ky - 8k = 0$, जहाँ k एक आनुपातिक स्थिरांक है। अतः सम्भावित रैखिक समीकरण $4x + 6y - 16 = 0$ हैं। **उत्तर**

प्रश्न 7. समीकरणों $x - y + 1 = 0$ और $3x + 2y - 12 = 0$ का ग्राफ खींचिए। X-अक्ष और इन रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए और त्रिभुजाकार पटल को छायांकित कीजिए।

हल : दिया गया समीकरण युग्म है : $x - y + 1 = 0$ ... (1)

$3x + 2y - 12 = 0$ ...(2)

समीकरण (1) से x के विभिन्न मानों के लिए y के मान निम्न होंगें :

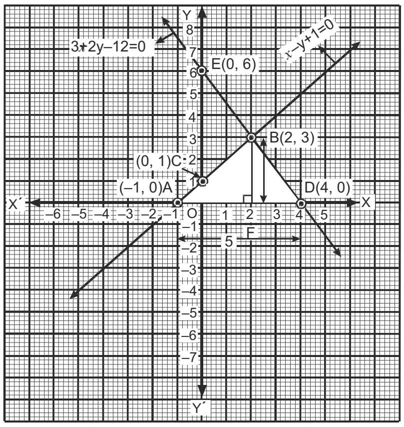
x	– 1	2	0
y	0	3	1

बिन्दुओं $A(-1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(0, 1)$ को ग्राफ पेपर पर आलेखित कर और उनको मिलाकर रेखा खींचने पर हमें समीकरण $x - y + 1 = 0$ का आलेख प्राप्त होता है।

समीकरण (2) से

x के विभिन्न मानों के लिए y के मान निम्न होंगें :

x	4	2	0
y	0	3	6



बिन्दुओं $D(4, 0)$, $B(2, 3)$ और $E(0, 6)$ को आलेखित कर समीकरण $3x + 2y - 12 = 0$ को निरूपित करने वाली रेखा प्राप्त होती है। दोनों रेखाएँ बिन्दु $B(2, 3)$ पर काटती हैं। X-अक्ष पर ΔBAD छायांकित भाग प्राप्त होता है। जिसके शीर्ष $B(2, 3)$, $A(-1, 0)$ तथा $D(4, 0)$ प्राप्त होते हैं। **उत्तर**

प्रश्नावली 3·2

प्रश्न 1. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए :

(i) $x + y = 14$, $x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$, $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$, $9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$, $0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$, $\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

हल : (i) दिया गया रैखिक समीकरण युग्म $x + y = 14$ ...(i)

तथा $x - y = 4$ ...(ii)

समीकरण (i) से, $\Rightarrow x = 14 - y$

x का यह मान समीकरण (ii) में प्रतिस्थापित करने पर,

$(14 - y) - y = 4 \Rightarrow 14 - y - y = 4$

$\Rightarrow -2y = 4 - 14 = -10$

$\therefore\ y = \frac{-10}{-2} = 5$

y का मान समीकरण (i) में रखने पर, $x + 5 = 14$

$\Rightarrow x = 14 - 5 = 9$

अत: रैखिक समीकरण युग्म का हल $x = 9$ तथा $y = 5$ **उत्तर**

(ii) दिया गया रैखिक समीकरण युग्म

$s - t = 3$ ...(i) तथा $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$ ...(ii)

समीकरण (i) से, $s = 3 + t$

s का यह मान समीकरण (ii) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$\frac{3+t}{3} + \frac{t}{2} = 6 \Rightarrow \frac{2(3+t)+3t}{6} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{6+2t+3t}{6} = 6 \Rightarrow 5t + 6 = 36$$

$$\Rightarrow 5t = 36 - 6 = 30$$

$$\therefore t = \frac{30}{5} = 6$$

समीकरण (i) में t का मान रखने पर,

$s - 6 = 3 \ \therefore\ s = 3 + 6 = 9$

अत: रैखिक समीकरण युग्म का हल

$s = 9$ और $t = 6$ **उत्तर**

(iii) दिया गया रैखिक समीकरण युग्म

$3x - y = 3$ ...(i) तथा $9x - 3y = 9$ ...(ii)

समीकरण (i) से, $y = 3x - 3$

y का यह मान समीकरण (ii) में प्रतिस्थापित करने पर,

$9x - 3(3x - 3) = 9 \Rightarrow 9x - 9x + 9 = 9 \Rightarrow 9 = 9$

यह कथन x के सभी मानों के लिए सत्य है। फिर भी हम x का कोई विशेष मान हल के रूप में प्राप्त नहीं करते। इसलिए

y का भी कोई मान प्राप्त नहीं कर सकते हैं।

इस प्रकार की स्थिति तभी पैदा होती है जब दोनों समीकरण एक जैसे हों। अत: समीकरण (i) व (ii) के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। **उत्तर**

(iv) दिया गया रैखिक समीकरण युग्म :

$$0.2x + 0.3y = 1.3 \quad ...(i)$$

और $$0.4x + 0.5y = 2{\cdot}3 \quad ...(ii)$$

समीकरण (i) से, $\frac{2}{10}x + \frac{3}{10}y = \frac{13}{10}$

$\Rightarrow \quad 2x + 3y = 13 \quad ...(iii)$

समीकरण (ii) से, $\frac{4}{10}x + \frac{5}{10}y = \frac{23}{10}$

$\Rightarrow \quad 4x + 5y = 23 \quad ...(iv)$

समीकरण (iii) से, $2x = 13 - 3y \Rightarrow x = \frac{13-3y}{2}$

x का यह मान समीकरण (iv) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$4\left(\frac{13-3y}{2}\right) + 5y = 23$$

$\Rightarrow 2(13 - 3y) + 5y = 23 \Rightarrow 26 - 6y + 5y = 23$

$\Rightarrow -y = 23 - 26 = -3$

$\therefore \; y = 3$, समीकरण (iii) में रखकर सरल करने पर,

$2x + 3 \times 3 = 13 \Rightarrow 2x + 9 = 13 \Rightarrow 2x = 13 - 9$

$\Rightarrow \quad 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$

अत: दिये गये रैखिक समीकरण युग्म का हल

$x = 2$ और $y = 3$ **उत्तर**

(v) दिया गया रैखिक समीकरण युग्म

$\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$ ...(i) तथा $\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$ ...(ii)

समीकरण (i) से, $\sqrt{2}x = -\sqrt{3y}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y \quad ...(iii)$

x का मान समीकरण (ii) में रखने पर,

$$\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y\right) - \sqrt{8}y = 0$$

$\Rightarrow \quad \frac{-3}{\sqrt{2}}y - \sqrt{8}y = 0 \Rightarrow y\left(\frac{-3}{\sqrt{2}} - \sqrt{8}\right) = 0$

$\therefore \quad y = 0$

y का मान समीकरण (iii) में रखने पर,

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times 0 = 0 \Rightarrow x = 0$$

अत: दिये गये रैखिक समीकरण युग्म का हल

$x = 0$ तथा $y = 0$ **उत्तर**

(vi) दिया गया रैखिक समीकरण युग्म

$$\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2 \Rightarrow \frac{9x-10y}{6} = -2$$

$\Rightarrow \quad 9x - 10y = -12 \quad ...(i)$

और $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6} \Rightarrow \frac{2x+3y}{6} = \frac{13}{6}$

$\Rightarrow 2x + 3y = \frac{13}{6} \times 6 \Rightarrow 2x + 3y = 13 \quad ...(ii)$

समीकरण (i) से, $9x = 10y - 12$ या $x = \frac{10y-12}{9}$

x का यह मान समीकरण (ii) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$2\left[\frac{10y-12}{9}\right] + 3y = 13$$

$\Rightarrow \frac{20y-24}{9} + 3y = 13 \Rightarrow \frac{20y-24+27y}{9} = 13$

$\Rightarrow \quad 20y - 24 + 27y = 13 \times 9$

$\Rightarrow \quad 47y = 117 + 24 = 141$

$\therefore \quad y = \frac{141}{47} = 3$

समीकरण (i) में $y = 3$ रखने पर,

$$9x - 10 \times 3 = -12$$

$\Rightarrow \quad 9x - 30 = -12$

$\Rightarrow 9x = -12 + 30 = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{9} = 2$

अत: दिए गये रैखिक समीकरण युग्म का हल $x = 2$ और $y = 3$ हैं। **उत्तर**

प्रश्न 2. $2x + 3y = 11$ और $2x - 4y = -24$ को हल कीजिए और इससे 'm' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $y = mx + 3$ हो।

हल : दिया गया रैखिक समीकरण युग्म :

$$2x + 3y = 11 \quad ...(i)$$

$$2x - 4y = -24 \quad ...(ii)$$

समीकरण (i) से, $2x = 11 - 3y \Rightarrow x = \frac{11-3y}{2}$ ...(iii)

x का यह मान समीकरण (ii) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$2\left(\frac{11-3y}{2}\right)-4y=-24$$

$\Rightarrow 11-3y-4y=-24 \Rightarrow -7y=-24-11=-35$

$\therefore\ y=\frac{-35}{-7}=5$

y का यह मान समीकरण (iii) में रखने पर,

$$x=\frac{11-3\times5}{2}=\frac{11-15}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

x और y के मान दिये गये समीकरण $y = mx + 3$ में रखने पर,

$$5=m\times-2+3$$

$\Rightarrow 5=-2m+3 \Rightarrow 2m=3-5=-2$

सरल करने पर $m=-1$

अत: दिए गए रैखिक समीकरण का हल

$x=-2,\ y=5$ और $m=-1$ **उत्तर**

प्रश्न 3. निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरण युग्म बनाइए और उनके हल प्रतिस्थापन विधि द्वारा ज्ञात कीजिए :

(i) दो संख्याओं का अन्तर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

(ii) दो संपूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18º अधिक है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

(iii) एक क्रिकेट टीम के कोच ने 7 बल्ले तथा 6 गेंदें ₹ 3,800 में खरीदीं। बाद में, उसने 3 बल्ले तथा 5 गेंदें ₹ 1,750 में खरीदीं। प्रत्येक बल्ले और प्रत्येक गेंद का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(iv) एक नगर में टैक्सी के भाड़े में एक नियत भाड़े के अतिरिक्त चली गई दूरी पर प्रति किमी के हिसाब से भाड़ा सम्मिलित किया जाता है। 10 किमी दूरी के लिए भाड़ा ₹ 105 है तथा 15 किमी के लिए भाड़ा ₹ 155 है। नियत भाड़ा तथा प्रति किमी भाड़ा क्या है? एक व्यक्ति को 25 किमी यात्रा करने के लिए कितना भाड़ा देना होगा?

(v) यदि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में 2 जोड़ दिया जाए, तो वह $\frac{9}{11}$ हो जाती है। यदि अंश और हर दोनों में 3 जोड़ दिया जाए, तो वह $\frac{5}{6}$ हो जाती है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

(vi) पाँच वर्ष बाद जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु से तीन गुनी हो जाएगी। पाँच वर्ष पूर्व जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु की सात गुनी थी। उनकी वर्तमान आयु क्या है?

हल : (i) माना एक संख्या x तथा दूसरी संख्या y है।

$\because$ एक संख्या दूसरी संख्या की 3 गुनी है।

$\Rightarrow \qquad x=3y \qquad$ ...(i)

यहाँ x, y से बड़ा है। दोनों संख्याओं का अन्तर 26 है।

$\therefore \qquad x-y=26 \qquad$ ...(ii)

समीकरण (i) से x का मान समीकरण (ii) में प्रतिस्थापित करने पर, $3y-y=26 \Rightarrow 2y=26 \Rightarrow y=\frac{26}{2} \Rightarrow y=13$

समीकरण (i) में $y = 13$ रखने पर, $x = 3\times13 = 39$

अत: अभीष्ट संख्याएँ $x = 39$ और $y = 13$ **उत्तर**

(ii) माना बड़ा कोण x° तथा छोटा कोण y° है।

कोण x° और y° एक-दूसरे के संपूरक हैं।

$\therefore \qquad x+y=180^\circ \qquad$ ...(i)

बड़ा कोण छोटे कोण से 18º अधिक है।

$\therefore \qquad x=y+18^\circ \qquad$ ...(ii)

समीकरण (ii) से x का मान समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर,

$\Rightarrow y+18^\circ+y=180^\circ \Rightarrow 2y+18^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow 2y=180^\circ-18^\circ=162^\circ \therefore y=\frac{162}{2}=81^\circ$

y का यह मान समीकरण (ii) में रखने पर,

$$x=81^\circ+18^\circ=99^\circ$$

अत: बड़ा कोण 99º और छोटा कोण 81º है। **उत्तर**

(iii) माना एक बल्ले का मूल्य ₹ x तथा एक गेंद का मूल्य ₹ y है।

$\therefore$ 7 बल्लों का मूल्य = ₹ $7x$ और 6 गेंदों का मूल्य = ₹ $6y$

प्रश्नानुसार, $7x+6y=3800$ ...(i)

पुन: 3 बल्लों का मूल्य = ₹ $3x$

और 5 गेंदों का मूल्य = ₹ $5y$

प्रश्नानुसार, $3x+5y=1750$ ...(ii)

समीकरण (i) से, $7x=3800-6y$

$\Rightarrow x=\frac{3800-6y}{7}$ ...(iii)

x का यह मान समीकरण (ii) में प्रतिस्थापित करने पर

$$3\left[\frac{3800-6y}{7}\right]+5y=1750$$

$\Rightarrow \frac{11400-18y+35y}{7}=1750$

$\Rightarrow 11400-18y+35y=1750\times7$

$\Rightarrow 11400+17y=12250$

$\Rightarrow \quad 17y = 12250 - 11400 = 850$

$\therefore \quad y = \frac{850}{17} = 50$

y का यह मान समीकरण (iii) में प्रतिस्थापित करने पर

$$x = \frac{3800 - 6\times50}{7} = \frac{3800 - 300}{7}$$

$\Rightarrow \quad x = \frac{3500}{7} = 500$

अत: एक बल्ले का मूल्य = ₹ 500
और एक गेंद का मूल्य = ₹ 50 **उत्तर**

(iv) मान लीजिए टैक्सी का निश्चित किराया = ₹ x
और एक किमी यात्रा का किराया = ₹ y
पहली शर्त के अनुसार, $x + 10y = 105$ ...(i)
दूसरी शर्त के अनुसार, $x + 15y = 155$ ...(ii)
समीकरण (i) से, $x = 105 - 10y$ ...(iii)
x का यह मान समीकरण (ii) में प्रतिस्थापित करने पर,
$105 - 10y + 15y = 155 \Rightarrow 5y = 155 - 105 = 50$

$\therefore \quad y = \frac{50}{5} = 10$

y का यह मान समीकरण (iii) में रखने पर,
$x = 105 - 10 \times 10 \Rightarrow x = 105 - 100 = 5$
अत: टैक्सी का निश्चित किराया = ₹ 5
और प्रति किमी यात्रा का किराया = ₹ 10
साथ ही 25 किमी यात्रा का किराया
$= x + 25y = 5 + 25 \times 10$
$= 5 + 250 = 255$ रुपये। **उत्तर**

(v) माना भिन्न का अंश x तथा हर y है।

तब भिन्न $= \frac{x}{y}$

भिन्न के अंश व हर में 2 जोड़ने पर भिन्न $\frac{x+2}{y+2}$ होगी।

प्रश्नानुसार, $\frac{x+2}{y+2} = \frac{9}{11}$ हल करने पर,

$\Rightarrow \quad x = \frac{(9y-4)}{11}$ ...(i)

भिन्न के अंश व हर में 3 जोड़ने पर भिन्न $\frac{x+3}{y+3}$ होगी।

प्रश्नानुसार, $\frac{x+3}{y+3} = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow 6(x + 3) = 5(y + 3) \Rightarrow 6x + 18 = 5y + 15$
$\Rightarrow 6x - 5y = 15 - 18 \Rightarrow 6x - 5y = -3$ ...(ii)

समीकरण (i) से x का मान समीकरण (ii) में प्रतिस्थापित करने पर, $6 \times \left(\frac{9y-4}{11}\right) - 5y = -3$

हल करने पर, $y = 9$
y का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$\Rightarrow \quad x = \frac{9\times9-4}{11} = \frac{81-4}{11} = \frac{77}{11}$

$\therefore \quad x = 7$

$\therefore$ रैखिक समीकरण युग्म का हल : $x = 7, y = 9$

अत: भिन्न $= \frac{7}{9}$ **उत्तर**

(vi) माना जैकब की वर्तमान आयु x वर्ष है।
और उसके पुत्र की वर्तमान आयु y वर्ष है।
5 वर्ष बाद जैकब की आयु = $(x + 5)$ वर्ष तथा 5 वर्ष बाद पुत्र की आयु = $(y + 5)$ वर्ष
प्रश्नानुसार, 5 वर्ष के बाद जैकब की आयु = 3 × (5 वर्ष बाद उसके पुत्र की आयु) $x + 5 = 3 \times (y + 5)$
$\Rightarrow x + 5 = 3y + 15 \Rightarrow x = 3y + 15 - 5$
$\Rightarrow \quad x = 3y + 10$ ...(i)
5 वर्ष पूर्व जैकब की आयु = $(x - 5)$ वर्ष और 5 वर्ष पूर्व उसके पुत्र की आयु = $(y - 5)$ वर्ष
प्रश्नानुसार, 5 वर्ष पूर्व जैकब की आयु = 7 × (5 वर्ष पूर्व उसके पुत्र की आयु)
$x - 5 = 7 \times (y - 5) \Rightarrow x - 5 = 7y - 35$
$\Rightarrow x - 7y = -35 + 5 \Rightarrow x - 7y = -30$ ...(ii)
समीकरण (i) से x का मान समीकरण (ii) में प्रतिस्थापित करने पर, $(3y + 10) - 7y = -30$

हल करने पर, $y = \frac{-40}{-4} = 10$

y का यह मान समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर,
$x = 3 \times 10 + 10 \Rightarrow x = 30 + 10 = 40$
अत: जैकब की वर्तमान आयु = 40 वर्ष
तथा उसके पुत्र की वर्तमान आयु = 10 वर्ष। **उत्तर**

प्रश्नावली 3·3

प्रश्न 1. निम्न समीकरणों के युग्म को विलोपन विधि तथा प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए। कौन-सी विधि अधिक उपयुक्त है?

(i) $x + y = 5$ **और** $2x - 3y = 4$
(ii) $3x + 4y = 10$ **और** $2x - 2y = 2$
(iii) $3x - 5y - 4 = 0$ **और** $9x = 2y + 7$
(iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ **और** $x - \frac{y}{3} = 3$

हल : (i) दिया गया रैखिक समीकरण युग्म :

$$x + y = 5 \quad ...(i)$$
$$2x - 3y = 4 \quad ...(ii)$$

विलोपन विधि : समीकरण (i) व (ii) में x का गुणांक समान करने के लिए समीकरण (i) में 2 से गुणा करने पर,

$$2x + 2y = 10 \quad ...(iii)$$

अब समीकरण (iii) में से समीकरण (ii) घटाने पर

$$\begin{array}{r} 2x + 2y = 10 \\ 2x - 3y = 4 \\ - \quad + \quad\quad - \\ \hline 5y = 6 \end{array}$$

$$\therefore \quad y = \frac{6}{5}$$

y का यह मान समीकरण (i) में रखने पर, $x + \frac{6}{5} = 5$

$$\Rightarrow \quad x = 5 - \frac{6}{5} = \frac{25-6}{5} = \frac{19}{5}$$

$$\therefore \quad x = \frac{19}{5}$$

अत: समीकरण युग्म का हल $x = \frac{19}{5}$, $y = \frac{6}{5}$ है। **उत्तर**

प्रतिस्थापन विधि : समीकरण (i) से,

$$\Rightarrow y = 5 - x \quad ...(iii)$$

y का यह मान समीकरण (ii) में रखने पर,

$$2x - 3(5 - x) = 4 \Rightarrow 2x - 15 + 3x = 4$$
$$\Rightarrow \quad 5x = 4 + 15 = 19$$
$$\therefore \quad x = \frac{19}{5}$$

x का यह मान समीकरण (iii) में रखने पर,

$$y = 5 - \frac{19}{5} = \frac{25-19}{5} = \frac{6}{5}$$

अत: रैखिक समीकरण युग्म का हल $x = \frac{19}{5}$, $y = \frac{6}{5}$ **उत्तर**

- विलोपन विधि अधिक उपयुक्त है।

(ii) दिया गया रैखिक समीकरण युग्म :

$$3x + 4y = 10 \quad ...(i)$$
$$2x - 2y = 2 \quad ...(ii)$$

विलोपन विधि : समी. (i) को 2 से तथा समी. (ii) को 3 से गुणा करने पर,

$$6x + 8y = 20 \quad ...(iii)$$
$$6x - 6y = 6 \quad ...(iv)$$

अब समी. (iii) में से समी. (iv) को घटाने पर,

$$\begin{array}{r} 6x + 8y = 20 \\ 6x - 6y = 6 \\ - \quad + \quad\quad - \\ \hline 14y = 14 \end{array}$$

$$\therefore \quad y = \frac{14}{14} = 1$$

समीकरण (i) में $y = 1$ रखने पर,

$$3x + 4(1) = 10$$

$$\Rightarrow 3x = 10 - 4 = 6 \quad x = \frac{6}{3} = 2$$

अत: रैखिक समीकरण युग्म का हल : $x = 2$ तथा $y = 1$

प्रतिस्थापन विधि : समीकरण (ii) से,

$\Rightarrow 2x = 2 + 2y \Rightarrow 2x = 2\,(1 + y) \Rightarrow x = 1 + y$ ...(iii)

x का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$\therefore\ 3(1 + y) + 4y = 10$

$\Rightarrow 3 + 3y + 4y = 10 \Rightarrow 3 + 7y = 10$

$\Rightarrow 7y = 10 - 3 \Rightarrow 7y = 7$

$\therefore\ y = \frac{7}{7} = 1$

y का यह मान समीकरण (iii) में रखने पर,

$$x = 1 + 1 \Rightarrow x = 2$$

अत: रैखिक समीकरण युग्म का हल : $x = 2$ और $y = 1$ **उत्तर**

- विलोपन विधि अधिक उपयुक्त है।

(iii) दिया हुआ समीकरण युग्म :

$3x - 5y - 4 = 0$ और $9x = 2y + 7$

या $\quad 3x - 5y = 4 \quad ...(i)$

और $\quad 9x - 2y = 7 \quad ...(ii)$

विलोपन विधि : समीकरण (i) में 2 से तथा समी. (ii) में 5 से गुणा कर घटाने पर,

$$\begin{array}{r} 6x - 10y = 8 \\ 45x - 10y = 35 \\ - \quad\quad + \quad\quad - \\ \hline -39x = -27 \end{array}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-27}{-39} = \frac{9}{13}$$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$$3 \times \frac{9}{13} - 5y = 4 \Rightarrow -5y = 4 - \frac{27}{13}$$

$$\Rightarrow -5y = \frac{52-27}{13} = \frac{25}{13}$$

$$\therefore y = \frac{25}{13 \times -5} = -\frac{5}{13}$$

अत: रैखिक समीकरण युग्म का हल :

$$x = \frac{9}{13} \text{ और } y = -\frac{5}{13}$$

प्रतिस्थापन विधि : समीकरण (ii) से,

$$x = \frac{2y+7}{9} \quad \text{...(iii)}$$

x का यह मान समीकरण (i) में रखने पर,

$$3\left(\frac{2y+7}{9}\right) - 5y = 4$$

हल करने पर,

$$\Rightarrow y = \frac{-5}{13}$$

y का यह मान समीकरण (iii) में रखने पर,

$$x = \frac{2 \times \left(-\frac{5}{13}\right) + 7}{9} = \frac{\frac{-10}{13} + 7}{9}$$

$$\Rightarrow x = \frac{81}{13 \times 9} = \frac{9}{13}$$

अत: रैखिक समीकरण युग्म का हल :

$$x = \frac{9}{13} \text{ तथा } y = -\frac{5}{13}$$

उत्तर

● विलोपन विधि अधिक उपयुक्त है।

(iv) दिया गया रैखिक समीकरण युग्म :

$$\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1 \Rightarrow \frac{3x+4y}{6} = -1$$

$$\Rightarrow \quad 3x + 4y = -6 \quad \text{...(i)}$$

और $$x - \frac{y}{3} = 3 \Rightarrow \frac{3x - y}{3} = 3$$

$$\Rightarrow \quad 3x - y = 9 \quad \text{...(ii)}$$

विलोपन विधि : समीकरण (i) में से समी. (ii) को घटाने पर,

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= -6 \\ 3x - \ y &= 9 \\ - \quad + \quad &\quad - \end{aligned}$$

$$5y = -15$$

$$\therefore \quad y = -\frac{15}{5} = -3$$

y का मान समीकरण (ii) में रखने पर,

$$3x - (-3) = 9$$

$$\Rightarrow 3x + 3 = 9 \Rightarrow 3x = 9 - 3 = 6$$

$$\therefore \quad x = \frac{6}{3} = 2$$

$$x = 2$$

अत: दिये गये रैखिक समीकरण युग्म का हल $x = 2$ और $y = -3$ है।

प्रतिस्थापन विधि : समीकरण (ii) से, $y = 3x - 9$

y का यह मान समी. (i) में प्रतिस्थापित करने पर

$$3x + 4(3x - 9) = -6$$

$$\Rightarrow 3x + 12x - 36 = -6 \Rightarrow 15x = -6 + 36 = 30$$

$$\therefore \quad x = \frac{30}{15} = 2$$

x का यह मान समी. (ii) में प्रतिस्थापित करने पर :

$$3 \times 2 - y = 9 \Rightarrow 6 - y = 9 \Rightarrow y = 6 - 9$$

$$\therefore \quad y = -3$$

अत: दिये गये रैखिक समीकरण युग्म का हल $x = 2$ और $y = -3$ हैं।

उत्तर

● विलोपन विधि अधिक उपयुक्त है ।

प्रश्न 2. निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके हल (यदि उनका अस्तित्व हो) विलोपन विधि से ज्ञात कीजिए :

(i) यदि हम अंश में 1 जोड़ दें तथा हर में से 1 घटा दें, तो भिन्न 1 में बदल जाती है। यदि हम हर में 1 जोड़ दें, तो यह $\frac{1}{2}$ हो जाती है। वह भिन्न क्या है ?

(ii) पाँच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की आयु की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात्, नूरी की आयु सोनू की आयु की दो गुनी हो जाएगी। नूरी और सोनू की आयु वर्तमान आयु कितनी है?

(iii) दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 9 है। इस संख्या का नौ गुना, संख्या के अंकों को पलटने से बनी संख्या का दो गुना है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

(iv) मीना ₹ 2000 निकालने के लिए एक बैंक गई। उसने खजांची से ₹ 50 तथा ₹ 100 के नोट देने के लिए कहा। मीना ने कुल 25 नोट प्राप्त किए। ज्ञात कीजिए कि उसने ₹ 50 और ₹ 100 के कितने-कितने नोट प्राप्त किए?

(v) किराये पर पुस्तकें देने वाले किसी पुस्तकालय का प्रथम तीन दिनों का एक नियत किराया है तथा उसके बाद प्रत्येक अतिरिक्त दिन का अलग किराया है। सरिता ने सात दिनों तक एक पुस्तक रखने के लिए ₹ 27 अदा किए, जबकि सूसी ने एक पुस्तक पाँच दिनों तक रखने के 21 रु. अदा किए। नियत किराया तथा प्रत्येक अतिरिक्त दिन का किराया ज्ञात कीजिए।

हल : (i) माना कि भिन्न का अंश x तथा हर y है।

अत: भिन्न = $\frac{x}{y}$

यदि भिन्न के अंश में 1 जोड़ा जाए और हर में से 1 घटाया जाए तो भिन्न $\frac{x+1}{y-1}$ हो जाएगी।

प्रश्नानुसार, $\frac{x+1}{y-1} = 1$

$x + 1 = y - 1 \Rightarrow x - y = -1 - 1$

$\Rightarrow x - y = -2$ ...(i)

यदि भिन्न के हर में एक जोड़ा जाए तो भिन्न $\frac{x}{y+1}$ हो जाएगी।

प्रश्नानुसार, $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - y = 1$ ...(ii)

समीकरण (i) में 2 से गुणा करके समीकरण (ii) को घटाने पर,

$$2x - 2y = -4$$
$$2x - y = 1$$
$$- \quad + \quad -$$
$$-y = -5$$

$\therefore$ $y = 5$

y का यह मान समीकरण (i) में रखने पर,

$x - 5 = -2$

$\Rightarrow$ $x = -2 + 5 = 3$

अत: भिन्न $\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{3}{5}$ **उत्तर**

(ii) माना कि नूरी की वर्तमान आयु = x वर्ष
तथा सोनू की वर्तमान आयु = y वर्ष
5 वर्ष पहले नूरी की आयु = $(x - 5)$ वर्ष
तथा 5 वर्ष पहले सोनू की आयु = $(y - 5)$ वर्ष

प्रश्नानुसार, $x - 5 = 3(y - 5) \Rightarrow x - 5 = 3y - 15$

$\Rightarrow x - 3y = -15 + 5 \Rightarrow x - 3y = -10$ ...(i)

10 वर्ष बाद नूरी की आयु = $(x + 10)$ वर्ष
और 10 वर्ष बाद सोनू की आयु = $(y + 10)$ वर्ष

प्रश्नानुसार, $x + 10 = 2(y + 10)$

$\Rightarrow x + 10 = 2y + 20 \Rightarrow x - 2y = 20 - 10$

$\Rightarrow x - 2y = 10$ ...(ii)

समीकरण (i) में से समी. (ii) को घटाने पर,

$$x - 3y = -10$$
$$x - 2y = 10$$
$$- \quad + \quad -$$
$$-y = -20$$

$\therefore$ $y = 20$

y का यह मान (ii) में प्रतिस्थापित करने पर,

$x - 2 \times 20 = 10 \Rightarrow x - 40 = 10 \Rightarrow x = 10 + 40$

$\therefore$ $x = 50$

अत: नूरी की वर्तमान आयु = 50 वर्ष
तथा सोनू की वर्तमान आयु = 20 वर्ष **उत्तर**

(iii) माना कि इकाई का अंक = x
तथा दहाई का अंक = y

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = $10y + x$

पहली शर्त के अनुसार, $x + y = 9$ ...(i)

अंकों को पलटने पर, इकाई का अंक = y
दहाई का अंक = x

$\therefore$ संख्या = $10x + y$

प्रश्नानुसार, संख्या का 9 गुना
= अंकों के पलटने पर प्राप्त संख्या का दो गुना

$\therefore$ $(10y + x) \times 9 = (10x + y) \times 2$

$\Rightarrow 90y + 9x = 20x + 2y \Rightarrow 90y + 9x - 20x - 2y = 0$

$\Rightarrow 88y - 11x = 0 \Rightarrow 11x = 88y$

$\therefore$ $x = 8y$ ...(ii)

समीकरण (ii) से प्राप्त x का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$8y + y = 9 \Rightarrow 9y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{9} = 1$

y का यह मान समीकरण (ii) में रखने पर, $x = 8 \times 1$

$\Rightarrow x = 8$

$\therefore$ संख्या = $10y + x = 10 \times 1 + 8 = 10 + 8 = 18$

अत: अभीष्ट संख्या = 18 **उत्तर**

(iv) माना ₹ 50 मूल्य वाले नोटों की संख्या = x
तथा ₹ 100 मूल्य वाले नोटों की संख्या = y

प्रश्नानुसार, कुल नोटों की संख्या 25 है।

$\therefore$ $x + y = 25$ ...(i)

$\because$ 50 वाले नोटों का मूल्य = $50 \times x$ = ₹ $50x$

और ₹ 100 वाले नोटों का मूल्य = $100 \times y$ = ₹ $100y$

$\therefore$ कुल नोटों का मूल्य = ₹ $50x + 100y$ = ₹ $50(x + 2y)$

प्रश्नानुसार, $50(x + 2y) = 2000$

$\Rightarrow\ x + 2y = \dfrac{2000}{50} = 40$ ...(ii)

समीकरण (ii) में से समीकरण (i) को घटाने पर,

$(x + 2y) - (x + y) = 40 - 25 \Rightarrow x + 2y - x - y = 15$

$\therefore\ y = 15$

y का मान समीकरण (i) में रखने पर, $x + 15 = 25$

$\therefore\ x = 25 - 15 = 10$

अत: मीना ने ₹ 50 मूल्य वाले 10 नोट और ₹ 100 मूल्य वाले 15 नोट प्राप्त किए। **उत्तर**

(v) माना प्रथम 3 दिनों तक पुस्तकालय का नियत किराया ₹ x है तथा इसके बाद प्रत्येक अतिरिक्त दिन का किराया ₹ y है।

7 दिनों में एक पुस्तक का किराया = प्रथम 3 दिन का किराया + 4 अतिरिक्त दिन का किराया = ₹ $(x + 4y)$

परन्तु सरिता ने 7 दिन का किराया ₹ 27 चुकाया

$\therefore\ x + 4y = 27$ ...(i)

5 दिनों में एक पुस्तक का किराया

= प्रथम 3 दिन का नियत किराया + 2 दिन का अतिरिक्त किराया

= ₹$(x + 2y)$

परन्तु सूसी ने 5 दिन का किराया ₹ 21 चुकाया

$\therefore\ x + 2y = 21$ ...(ii)

समीकरण (i) में से समीकरण (ii) को घटाने पर

$(x + 4y) - (x + 2y) = 27 - 21$

$\Rightarrow\ x + 4y - x - 2y = 6 \Rightarrow 2y = 6$

$\therefore\ y = \dfrac{6}{2} = 3$

y का यह मान समीकरण (ii) में रखने पर,

$\Rightarrow x + 2 \times 3 = 21 \Rightarrow x + 6 = 21 \Rightarrow x = 21 - 6$

$\therefore\ x = 15$

अत: पुस्तकालय की किसी पुस्तक का प्रथम 3 दिन का नियत किराया = ₹ 15 और उसके बाद प्रत्येक अतिरिक्त दिन का किराया = ₹ 3। **उत्तर**

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. रैखिक युगपत समीकरण $3x + 2y - 5 = 0$; $4x + 7y - 11 = 0$ के हल की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

संकेत : जाँच कीजिए अद्वितीय हल के लिए $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

प्रश्न 2. रैखिक युगपत समीकरण $2x + 7y = 11$; $x - 3y = 5$ के $x = 2$ तथा $y = 1$ मान पर हल की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

संकेत : दिये मानों पर हल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 3. रैखिक समीकरण युग्म $9x + 3y + 12 = 0$; $18x + 6y + 24 = 0$ के हल संगत है या असंगत।

संकेत : जाँच कीजिए हल के लिए $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ है,

प्रश्न 4. रैखिक समीकरण युग्म $x + 2y - 5 = 0$; $2x + 4y - 10 = 0$ के $x = 1, y = 2$ मान पर हल की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

संकेत : प्रश्न 2 की भाँति हल कीजिए।

प्रश्न 5. निम्नलिखित समीकरण युग्म के सम्पाती रेखाओं को व्यक्त करने के लिए k का मान ज्ञात कीजिए।

$$3x - y + 8 = 0;\ 6x + ky = -16$$

संकेत : जाँच कीजिए $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

प्रश्न 6. k के किस मान के लिए समीकरण युग्म

$$4x - 3y = 9,\ 2x + ky = 11$$

का कोई हल नहीं है—

संकेत :

कोई हल नहीं होने के लिए $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ शर्त की जाँच

प्रश्न 7. निम्नलिखित समीकरण निकाय के बारे में ज्ञात कीजिए कि क्या निकाय का अद्वितीय हल है या कोई हल नहीं है या अनंत हल हैं।

$$3x - 4y = -7;\ 3x - 4y = -9$$

संकेत : चूँकि $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ तब निकाय का कोई हल नहीं है।

प्रश्न 8. C के किस मान के लिए समीकरण युग्म $Cx - y = 2$ तथा $6x - 2y = 3$ के अनंत हल होंगे।

संकेत : अनन्त हल के लिए शर्त : $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

प्रश्न 9. निम्नलिखित समीकरण निकाय के बारे में बताइए कि निकाय का एक अद्वितीय हल है या अपरिमित रूप से

अनेक हल हैं : $2x + y = 5; 3x + 2y = 8$

संकेत : जाँच कीजिए

$$\text{यहाँ } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

के निकाय का एक अद्वितीय हल है।

प्रश्न 10. रैखिक समीकरण युग्म $x + 3y = 8$ और $x + y = 2$ का कोई एक अद्वितीय हल ज्ञात कीजिए।

संकेत : हल करने पर x और y के मान ज्ञात करें।

प्रश्न 11. यदि समीकरणों $kx - 2y = 3$ तथा $3x + y = 5$ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेदी रेखाओं को निरूपित करती हैं, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : विशिष्ट हल के लिए रेखाएँ समांतर नहीं होनी चाहिए :

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \text{ या } \frac{k}{3} \neq \frac{-2}{1} \neq 6$$

प्रश्न 12. k के किस मान के लिए निम्न समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे—

$2x + 3y = 7$ और $(k + 2)x - 3(1 - k)y = 5k + 1$

संकेत : अपरिमित हल के लिए जाँच कीजिए :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

प्रश्न 13. k का मान ज्ञात कीजिए ताकि निम्न समीकरण युग्म का कोई हल नहीं हो—

$$(3k + 1)x + 3y - 2 = 0$$
$$(k^2 + 1)x + (k - 2)y - 5 = 0$$

संकेत : कोई हल नहीं के लिए,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \text{ या } \frac{3k+1}{(k^2+1)} = \frac{3}{(k-2)}$$

प्रश्न 14. सुमित की आयु उसके बेटे की आयु की तीन गुनी है। पाँच वर्षों के बाद उसकी आयु अपने बेटे की आयु की ढाई गुना हो जाएगी। इस समय सुमित की आयु कितनी वर्ष है।

संकेत : माना सुमित की वर्तमान आयु $= x$ वर्ष

बेटे की वर्तमान आयु $= y$ वर्ष

समीकरण $x = 3y$ तथा $x + 5 = 2.5(y + 5)$

प्रश्न 15. एक पिता की आयु अपने दो बच्चों की आयु के योग के तीन गुने के समान है। 5 वर्ष के पश्चात् उसकी आयु बच्चों की आयु के योग के दुगुने के समान होगी। पिता की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : माना पिता की आयु $= x$ वर्ष

दोनों बच्चों की आयु का योग $= y$ वर्ष

प्रश्नानुसार, समीकरण, $x = 3y$ तथा $x + 5 = 2(y + 10)$

प्रश्न 16. k का मान ज्ञात कीजिए यदि समीकरण निकाय $2x + 3y = 7$, $(k + 1)x + (2k - 1)y = 4k + 1$ के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

संकेत : अपरिमित हल के लिए— $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ मान रखने पर

$$\frac{2}{(k+1)} = \frac{3}{(2k-1)} = \frac{7}{(4k+1)}$$

प्रश्न 17. k के किन मानों (किस मान) के लिए निम्न समीकरणों के युग्म का एक अद्वितीय हल है—

$$x + 2y = 5 \text{ और } 3x + ky + 15 = 0$$

संकेत :

अद्वितीय हल के लिए, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ मान रखने पर

प्रश्न 18. c का मान ज्ञात कीजिए, यदि समीकरण निकाय $cx + 3y + (3 - c) = 0$, $12x + cy - c = 0$ के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

संकेत : अपरिमित हल के लिए, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ मान रखने पर

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. ग्राफीय निरूपण द्वारा हल कीजिए कि निम्न समीकरण युग्मों का कोई हल नहीं है, अद्वितीय हल है अथवा अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

$$3x + 4y = 32; 6x + 8y = 24$$

संकेत : प्रश्नावली–3.1 का प्रश्न–4 (iv) की भाँति हल कीजिए।

प्रश्न 2. 7 रबड़ और 5 पेन्सिलों का कुल मूल्य ₹ 58 है, जबकि 5 रबड़ और 6 पेन्सिलों का कुल मूल्य ₹ 56 है। इस समस्या को बीजगणितीय रूप में व्यक्त कर ग्राफ विधि से हल कीजिए।

संकेत : प्रश्नावली–3.1 का प्रश्न–4 (iii) की भाँति हल कीजिए।

प्रश्न 3. 5 सेबों और 3 संतरों का कुल मूल्य ₹ 35 है जबकि 2 सेबों और 4 संतरों का कुल मूल्य ₹ 28 है। इस समस्या को बीजगणितीय रूप में व्यक्त कर ग्राफ विधि से हल कीजिए।

संकेत : प्रश्नावली–3.1 का प्रश्न–1 (ii) की भाँति हल कीजिए।

प्रश्न 4. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को आलेखीय विधि से हल कीजिए तथा उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिये जहाँ इनके द्वारा निरूपित रेखाएँ y-अक्ष को काटती हैं—

$3x + 2y = 12; 5x - 2y = 4$

संकेत : प्रश्नावली–3.1 का प्रश्न–1 (ii) की भाँति हल कीजिए।

प्रश्न 5. निम्नलिखित रैखिक समीकरण युग्म को ग्राफीय विधि से हल कीजिए एवं हल की प्रकृति बताइए।

$$x + y = 3; 3x - 2y = 4$$

संकेत : प्रश्नावली–3.1 का प्रश्न–4 (i) की भाँति हल कीजिए।

● ●

4 द्विघात समीकरण

प्रश्नावली 4·1

प्रश्न 1. जाँच कीजिए कि क्या निम्न द्विघात समीकरण हैं :
(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$, (ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$
(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$, (iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$, (v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$
(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$, (vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$
(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

हल : (i) दिया गया समीकरण है : $(x+1)^2 = 2(x-3)$
$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x - 6 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 2x + 6 = 0$
$\Rightarrow x^2 + 7 = 0$
$\because$ उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 2 है।
अत: दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण है।

(ii) दिया गया समीकरण है : $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$
$\Rightarrow x^2 - 2x = -6 + 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 2x + 6 = 0$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$
$\because$ उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 2 है।
अत: दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण है।

(iii) दिया गया समीकरण

$$(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$$
$$\Rightarrow x(x+1) - 2(x+1) = x(x+3) - 1(x+3)$$
$$\Rightarrow x^2 + x - 2x - 2 = x^2 + 3x - x - 3$$
$$\Rightarrow x^2 + x - 2x - 2 - x^2 - 3x + x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow -3x + 1 = 0$$

$\because$ उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 1 है।
अत: समीकरण, द्विघात समीकरण नहीं है।

(iv) दिया गया समीकरण $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$
$\Rightarrow 2x^2 + x - 6x - 3 = x^2 + 5x$
$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 - x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x^2 - 10x - 3 = 0$
$\because$ उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 2 है।
अत: समीकरण द्विघात समीकरण है।

(v) दिया गया समीकरण $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x - x + 3 = x^2 - x + 5x - 5$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 = x^2 + 4x - 5$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 - x^2 - 4x + 5 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 11x + 8 = 0$$

$\because$ उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 2 है।
अत: दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण है।

(vi) दिया गया समीकरण $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$
$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 = x^2 + 4 - 4x$
$\Rightarrow x^2 + 3x + 1 - x^2 - 4 + 4x = 0 \Rightarrow 7x - 3 = 0$
$\because$ उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 1 है।
अत: दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण नहीं है।

(vii) दिया गया समीकरण $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$

$$\Rightarrow x^3 + (2)^3 + 3 \times x \times 2\,(x+2) = 2x^3 - 2x$$
$$\Rightarrow x^3 + 8 + 6x^2 + 12x = 2x^3 - 2x$$
$$\Rightarrow x^3 + 8 + 6x^2 + 12x - 2x^3 + 2x = 0$$
$$\Rightarrow -x^3 + 6x^2 + 14x + 8 = 0$$

$\because$ यहाँ x की उच्चतम घात 3 है।
अत: यह एक द्विघात समीकरण नहीं है।

(viii) दिया गया समीकरण $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - (2)^3 - 3 \times x \times 2\,(x-2)$$
$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 8 - 6x^2 + 12x$$
$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 1 - x^3 + 8 + 6x^2 - 12x = 0$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 13x + 9 = 0$$

$\because$ उक्त समीकरण में चर x की अधिकतम घात 2 है।
अत: दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित स्थितियों को द्विघात समीकरणों के रूप में निरूपित कीजिए :
(i) एक आयताकार भूखण्ड का क्षेत्रफल 528 मीटर² है। क्षेत्र की लम्बाई (मीटरों में) चौड़ाई के दुगने से एक अधिक है। हमें भूखण्ड की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करनी हैं।
(ii) दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 306 है। हमें पूर्णांकों को ज्ञात करना है।
(iii) रोहन की माँ उससे 26 वर्ष बड़ी है। उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल अब से तीन वर्ष पश्चात् 360 हो जाएगा। हमें रोहन की वर्तमान आयु ज्ञात करनी है।
(iv) एक रेलगाड़ी 480 किमी की दूरी समान चाल से तय करती है। यदि इसकी चाल 8 किमी/घण्टा कम होती, तो वह उसी दूरी को तय करने में 3 घण्टे अधिक लेती। हमें रेलगाड़ी की चाल ज्ञात करनी है।

हल : (i) माना भूखण्ड की चौड़ाई x मीटर है।
$\because$ भूखण्ड की लम्बाई, उसकी चौड़ाई के दुगुने से 1 मीटर अधिक है।

∴ भूखण्ड की लम्बाई = (2 × चौड़ाई) + 1

= (2 × x + 1) = ($2x$ + 1) मीटर

∵ आयताकार भूखण्ड का क्षेत्रफल

= ल. × चौ. = ($2x$ + 1) × x = ($2x^2 + x$) वर्ग मीटर

दिया है : भूखण्ड का क्षेत्रफल = 528 वर्ग मीटर

∴ $2x^2 + x = 528$ या $2x^2 + x - 528 = 0$

अत: अभीष्ट द्विघात समीकरण : $2x^2 + x - 528 = 0$ **उत्तर**

(ii) माना पहला धन पूर्णांक x है तथा दूसरा क्रमागत धन पूर्णांक $x + 1$ है, अत: पूर्णांकों का गुणनफल= $x \times (x + 1) = x^2 + x$

प्रश्नानुसार, $x^2 + x = 306$; $x^2 + x - 306 = 0$

अत: अभीष्ट द्विघात समीकरण : $x^2 + x - 306 = 0$ **उत्तर**

(iii) माना रोहन की वर्तमान आयु = x वर्ष तथा उसकी माँ उससे 26 वर्ष बड़ी है।

∴ रोहन की माँ की वर्तमान आयु = (x + 26) वर्ष

तीन वर्ष बाद रोहन की आयु = (x + 3) वर्ष

तथा तीन वर्ष बाद रोहन की माँ की आयु

= (x + 26) + 3 = (x + 29) वर्ष

∴ रोहन और उसकी माँ की आयु का गुणनफल

= (x + 3) (x + 29) वर्ष

प्रश्नानुसार, $\Rightarrow (x + 3)(x + 29) = 360$

$\Rightarrow x^2 + 29x + 3x + 87 = 360 \Rightarrow x^2 + 32x + 87 - 360 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 32x - 273 = 0$

अत: अभीष्ट द्विघात समीकरण : $x^2 + 32x - 273 = 0$ **उत्तर**

(iv) माना रेलगाड़ी की चाल x किमी/घण्टा है। निर्धारित दूरी = 480 किमी। रेलगाड़ी द्वारा लिया गया समय

$$= \frac{\text{तय की गई दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{480}{x} \text{ घण्टे}$$

यदि रेलगाड़ी की चाल 8 किमी/घण्टा कम हो अर्थात् चाल (x – 8) किमी/घण्टा होती तो रेलगाड़ी द्वारा 480 किमी दूरी चलने में लगा समय = $\frac{480}{x-8}$ घण्टे

$$\Rightarrow \frac{480}{x-8} - \frac{480}{x} = 3 \Rightarrow \frac{480x - 480(x-8)}{x(x-8)} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{480x - 480x + 3840}{x^2 - 8x} = 3$$

$\Rightarrow 3x^2 - 24x = 3840 \Rightarrow 3x^2 - 24x - 3840 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 - 8x - 1280) = 0 \Rightarrow x^2 - 8x - 1280 = 0$

अत: अभीष्ट द्विघात समीकरण : $x^2 - 8x - 1280 = 0$ **उत्तर**

प्रश्नावली 4·2

प्रश्न 1. गुणनखण्ड विधि से निम्न द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए :

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

(iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$ (v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

हल : (i) दिया गया द्विघात समीकरण है : $x^2 - 3x - 10 = 0$

हल करने पर

यहाँ या तो $(x - 5) = 0$ या फिर $(x + 2) = 0$

यदि $x - 5 = 0$ हो तो $x = 5$ और

यदि $x + 2 = 0$ हो तो $x = -2$

अत: द्विघात समीकरण के मूल 5 या – 2 है। **उत्तर**

(ii) दिया गया द्विघात समीकरण है : $2x^2 + x - 6 = 0$

हल करने पर

यहाँ या तो $(x + 2) = 0$ या फिर $(2x - 3) = 0$

यदि $x + 2 = 0$ हो, तो $x = -2$ यदि $2x - 3 = 0$ हो, तो

$\Rightarrow 2x = 3$ या $x = \frac{3}{2}$ **उत्तर**

(iii) दिया गया द्विघात समीकरण है : $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

हल करने पर

यहाँ या तो $(\sqrt{2}x + 5) = 0$ या फिर $(x + \sqrt{2}) = 0$

यदि $\sqrt{2}x + 5 = 0$ हो, तो

$$\sqrt{2}x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{\sqrt{2}}$$

यदि $x + \sqrt{2} = 0$ हो, तो $x = -\sqrt{2}$

अत: द्विघात समीकरण के मूल $-\frac{5}{\sqrt{2}}$ या $-\sqrt{2}$ होंगे। **उत्तर**

(iv) दिया गया द्विघात समीकरण है :

$$2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow \frac{16x^2 - 8x + 1}{8} = 0$$

$\Rightarrow 16x^2 - 8x + 1 = 0 \Rightarrow 16x^2 - 4x - 4x + 1 = 0$

$\Rightarrow 4x(4x - 1) - 1(4x - 1) = 0 \Rightarrow (4x - 1)(4x - 1) = 0$

अर्थात् $4x - 1 = 0$ या $4x - 1 = 0$

$\therefore x = \frac{1}{4}$ या $x = \frac{1}{4}$

अत: द्विघात समीकरण के मूल $\frac{1}{4}$ या $\frac{1}{4}$ अर्थात् दोनों मूल समान होंगे। **उत्तर**

(v) दिया गया द्विघात समीकरण है : $100x^2 - 20x + 1 = 0$
हल करने पर
या $x = \frac{1}{10}$ या $x = \frac{1}{10}$
अत: द्विघात समीकरण के दोनों मूल समान होंगे। **उत्तर**

प्रश्न 2. (i) जॉन और जीवंती दोनों के पास कुल मिलाकर 45 कंचे हैं। दोनों पाँच-पाँच कंचे खो देते हैं। अब उनके पास कंचों की संख्या का गुणनफल 124 है। हम जानना चाहेंगे कि प्रारम्भ में उनके पास कितने-कितने कंचे थे ?
(ii) एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ खिलौने निर्मित करता है। प्रत्येक खिलौने का मूल्य (₹ में), 55 में से एक दिन में निर्मित खिलौनों की संख्या को घटाने से प्राप्त संख्या के बराबर है। किसी दिन कुल निर्माण लागत ₹ 750 थी। हम उस दिन निर्माण किए गए खिलौनों की संख्या ज्ञात करना चाहेंगे।

हल : (i) माना प्रारम्भ में जॉन के पास x कंचे थे।
दोनों के पास कुल मिलाकर 45 कंचे थे।
$\therefore$ जीवंती के पास प्रारम्भ में कंचों की संख्या $= (45 - x)$
जब जॉन 5 कंचे खो देता है, तो उसके पास कंचों की संख्या $= (x - 5)$ इसी प्रकार, जब जीवंती 5 कंचे खो देती है, तो उसके पास शेष कंचों की संख्या $= (45 - x - 5) = (40 - x)$
अब कंचों की संख्या का गुणनफल $= (x - 5)(40 - x)$
$= 40x - x^2 - 200 + 5x = -x^2 + 45x - 200$
परन्तु प्रश्नानुसार, $-x^2 + 45x - 200 = 124$
हल करने पर
या तो $x - 36 = 0$ या फिर $x - 9 = 0$
यदि $x - 36 = 0$ तो $x = 36$ और यदि $x - 9 = 0$ तो $x = 9$
अत: जॉन के पास कंचों की संख्या = 36 अथवा 9
तब स्पष्ट है कि यदि जॉन के पास 36 कंचे हैं, तो जीवन्ती के पास 9 कंचे होंगे। और यदि जॉन के पास 9 कंचे हैं, तो जीवंती के पास 36 कंचे होंगे। अत: उनके पास कंचों की संख्या (9, 36) अथवा (36, 9)। **उत्तर**

(ii) माना उस विशेष दिन x खिलौने निर्मित किए गए।
$\therefore$ प्रत्येक खिलौने का मूल्य = ₹ $(55 - x)$
$\therefore$ उस दिन निर्मित सभी x खिलौनों की लागत
= ₹ $x(55 - x)$ = ₹ $(55x - x^2)$
परन्तु प्रश्नानुसार, उस दिन की निर्माण लागत ₹ 750 थी।
$\Rightarrow 55x - x^2 = 750 \Rightarrow 55x - x^2 - 750 = 0$
हल करने पर
$\therefore$ $x = 30$ या $x = 25$
अत: उस दिन निर्मित खिलौनों की संख्या 30 या 25 है। **उत्तर**

प्रश्न 3. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योग 27 हो और गुणनफल 182 हो।

हल : माना कि पहली संख्या x है। दिया है, दोनों संख्याओं का योग 27 है। $\therefore$ दूसरी संख्या $= 27 - x$
दिया है, संख्याओं का गुणनफल $= x(27 - x) = 27x - x^2$
प्रश्नानुसार, $27x - x^2 = 182 \Rightarrow -x^2 + 27x - 182 = 0$
हल करने पर
अर्थात् या तो $x - 13 = 0$ या फिर $x - 14 = 0$
$\therefore$ $x = 13, 14$
अत: दो संख्याएँ 13 और 14 हैं। **उत्तर**

प्रश्न 4. दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 365 हो।

हल : माना कि पहला धनात्मक पूर्णांक x है
तथा दूसरा क्रमागत धनात्मक पूर्णांक $(x + 1)$ होगा।
प्रश्नानुसार, $(x^2) + (x + 1)^2 = 365$
हल करने पर
$\Rightarrow x = -14$ या $x = 13$
$\because$ हमें धनात्मक पूर्णांक चाहिए।
इसलिए $x = -14$ सम्भव नहीं है।
$\therefore$ $x = 13$
$\therefore$ दूसरा धनात्मक पूर्णांक $= 13 + 1 = 14$
अत: दो अभीष्ट क्रमागत धनात्मक पूर्णांक 13 और 14 हैं। **उत्तर**

प्रश्न 5. एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई इसके आधार से 7 सेमी कम है। यदि कर्ण 13 सेमी हो, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि समकोण त्रिभुज का आधार $= x$ सेमी
इसलिए, समकोण त्रिभुज की ऊँचाई (लम्ब) $= (x - 7)$ सेमी
दिया है, समकोण त्रिभुज का कर्ण = 13 सेमी
पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार, $(\text{आधार})^2 + (\text{लम्ब})^2 = (\text{कर्ण})^2$
$(x)^2 + (x - 7)^2 = (13)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + 49 - 14x = 169$
हल करने पर
$\Rightarrow x = 12$ या $x = -5$
$\because$ त्रिभुज की लम्बाई कभी ऋणात्मक नहीं हो सकती।
इसलिए हम $x = -5$ को छोड़ देते हैं।
$\therefore x = 12$; अत: समकोण त्रिभुज का आधार = 12 सेमी
समकोण त्रिभुज की ऊँचाई (लम्ब) $= (12 - 7)$ सेमी = 5 सेमी।
अत: त्रिभुज की अन्य दो भुजाएँ 5 सेमी और 12 सेमी हैं। **उत्तर**

प्रश्न 6. एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ बर्तनों का निर्माण करता है। एक विशेष दिन यह देखा गया कि प्रत्येक नग की निर्माण लागत (₹ में) उस दिन के निर्माण किए बर्तनों की संख्या के दुगने से 3 अधिक थी। यदि उस दिन की

कुल निर्माण लागत ₹ 90 थी, तो निर्मित बर्तनों की संख्या और प्रत्येक नग की लागत ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि एक विशेष दिन में निर्मित बर्तनों की संख्या x थी।

$\because$ प्रत्येक नग की लागत निर्मित बर्तनों की संख्या के दुगने से 3 अधिक थी।

$\therefore$ प्रत्येक नग की लागत = ₹ $(2x + 3)$

तब उस दिन निर्मित सभी बर्तनों की लागत

= ₹ $x \times (2x + 3)$ = ₹ $(2x^2 + 3x)$

प्रश्नानुसार, उस दिन की कुल निर्माण लागत = ₹ 90

$\therefore 2x^2 + 3x = 90 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 90 = 0$

हल करने पर,

यदि $2x + 15 = 0$ हो, तो $2x = -15 \Rightarrow x = -\frac{15}{2}$

और यदि $x - 6 = 0$ हो, तो $x = 6$

$\because$ बर्तनों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती है। अत: $x = -\frac{15}{2}$ को छोड़ देते हैं।

$\therefore x = 6$ अर्थात् निर्मित बर्तनों की संख्या = 6

तब प्रत्येक नग की लागत = ₹ $(2x + 3)$

= ₹ $(2 \times 6 + 3)$ = ₹ $(12 + 3) = 15$

अत: निर्मित बर्तनों की संख्या 6 तथा प्रत्येक नग की लागत ₹ 15 है। **उत्तर**

प्रश्नावली 4·3

प्रश्न 1. निम्न द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। यदि मूलों का अस्तित्व हो, तो उन्हें ज्ञात कीजिए :

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

हल : (i) दिया गया समीकरण है : $2x^2 - 3x + 5 = 0$

उक्त समीकरण की तुलना व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर, $a = 2, b = -3$ तथा $c = 5$

विविक्तकर $(D) = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5$

$= 9 - 40 = -31 < 0$

अत: दी गई द्विघात समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है। **उत्तर**

(ii) प्रश्न-(i) की भाँति हल करें,

उत्तर $\frac{2}{\sqrt{3}}$ व $\frac{2}{\sqrt{3}}$ हैं।

(iii) प्रश्न-(i) की भाँति हल करें,

उत्तर $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ व $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ हैं।

प्रश्न 2. निम्न प्रत्येक द्विघात समीकरण में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हों :

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

हल : (i) विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

$= k^2 - 4 \times 2 \times 3 = k^2 - 24$

समीकरण के मूल बराबर तब होंगे, जब विविक्तकर $D = 0$ हो

अर्थात् $k^2 - 24 = 0 \Rightarrow k^2 = 24$

$\Rightarrow k = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$

अत: मूल बराबर होने के लिए $k = \pm 2\sqrt{6}$ होना चाहिए।

(ii) विविक्तकर $D = b^2 - 4ac = (-2k)^2 - 4 \times k \times 6$

$= 4k^2 - 24k = 4k(k - 6)$

समीकरण के मूल बराबर तब होंगे, जब विविक्तकर $D = 0$ हो अर्थात् $4k(k - 6) = 0 \Rightarrow k = 0$ या $k - 6 = 0$

$\Rightarrow k = 0$ या $k = 6$

अत: समीकरण के बराबर होने के लिए $k = 6$ होना चाहिए क्योंकि $k = 0$ प्रतिबन्धित होता है। **उत्तर**

प्रश्न 3. क्या एक ऐसी आम की बगिया बनाना सम्भव है जिसकी लम्बाई, चौड़ाई से दुगनी हो और उसका क्षेत्रफल 800 मी² हो ? यदि है, तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि एक आयताकार बगिया की चौड़ाई = x मी

$\therefore$ आयताकार बगिया की लम्बाई = $2x$ मी

आयताकार बगिया का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= $[2x \times x]$ मी² = $2x^2$ मी²

प्रश्नानुसार, $2x^2 = 800 \Rightarrow x^2 = \frac{800}{2} = 400$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{400} = \pm 20$

$\because$ आयताकार बगिया की लम्बाई ऋणात्मक नहीं हो सकती इसलिए हम $x = -20$ को छोड़ देते हैं।

$\therefore x = 20$

$\therefore$ आयताकार बगिया की चौड़ाई = 20 मी और आयताकार बगिया की लम्बाई = (2×20) मी = 40 मी **उत्तर**

प्रश्न 4. क्या निम्न स्थिति सम्भव है ? यदि है, तो उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए। दो मित्रों की आयु का योग 20 वर्ष है। चार वर्ष पूर्व उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल 48 था।

हल : माना कि पहले मित्र की आयु = x वर्ष

$\because$ दोनों की आयु का योग 20 वर्ष है।

दूसरे मित्र की आयु = $(20 - x)$ वर्ष

चार वर्ष पूर्व, पहले मित्र की आयु = $(x - 4)$ वर्ष

$\therefore$ दूसरे मित्र की आयु = $(20 - x - 4)$ वर्ष

= $(16 - x)$ वर्ष

और उनका गुणनफल $= (x-4)(16-x)$

$= 16x - x^2 - 64 + 4x = -x^2 + 20x - 64$

प्रश्नानुसार, $-x^2 + 20x - 64 = 48$

$\Rightarrow -x^2 + 20x - 64 - 48 = 0$

$\Rightarrow -x^2 + 20x - 112 = 0$ ...(1)

$\therefore$ विविक्तकर $(D) = b^2 - 4ac$

$= (20)^2 - 4 \times (-1) \times (-112)$

$= 400 - 448 = -48 < 0$

$\because$ मूल वास्तविक नहीं होंगे।

इसलिए x का कोई भी मान द्विघात समीकरण (1) को सन्तुष्ट नहीं कर सकता है।

अत: दी गई स्थिति सम्भव नहीं है। **उत्तर**

प्रश्न 5. क्या परिमाप 80 मी तथा क्षेत्रफल 400 मी² के एक पार्क को बनाना सम्भव है ? यदि है, तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

संकेत : माना आयताकार पार्क की लम्बाई $= x$ मी

एवं चौड़ाई $= y$ मी

$\therefore$ आयताकार पार्क का परिमाप $= 2(x + y)$ मी

और आयताकार पार्क का क्षेत्रफल $= xy$ मी²

प्रश्नानुसार, $2(x + y) = 80$ तथा $xy = 400$

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल ज्ञात करने का श्रीधर आचार्य सूत्र लिखिए।

संकेत : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, जहाँ $x \neq 0$

प्रश्न 2. द्विघात समीकरण $4y^2 - 12y + 9 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल : $4y^2 - 12y - 9 = 0$ के मूल $b^2 - 4ac$

यहाँ $a = 4, b = -12, c = -9$ हैं

$D = (-12)^2 - 4 \times 4 \times (-9) = 144 + 144 = 288$

मूल वास्तविक और असमान हैं।

प्रश्न 3. द्विघात समीकरण $2x^2 - 4x + 3 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल : $2x^2 - 4x + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 16 - 24$

$D = -8 \Rightarrow D < 0$

कोई वास्तविक मूल नहीं (काल्पनिक)

प्रश्न 4. दर्शाइए कि द्विघात समीकरण $2x^2 - 6x + 3 = 0$ के मूल वास्तविक और भिन्न-भिन्न होंगे।

हल : समीकरण $2x^2 - 6x + 3 = 0$; $a = 2, b = -6, c = 3$

$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(2)(3) = 36 - 24 = 12$

$\because D > 0$

मूल वास्तविक और भिन्न-भिन्न हैं।

प्रश्न 5. जाँच कीजिए कि क्या समीकरण $x^2 + 2\sqrt{x} - 3$ एक द्विघात समीकरण है।

हल : द्विघात समीकरण का मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$

दिया गया समीकरण : $x^2 + 2\sqrt{x} - 3 = 0$

यहाँ x की घात $\sqrt{x}$ है जो 1 नहीं हैं।

अत: यह द्विघात समीकरण नहीं है।

प्रश्न 6. जाँच कीजिए कि क्या समीकरण $x + \dfrac{3}{x} = x^2$ एक द्विघात समीकरण है।

हल : $x + \dfrac{3}{x} = x^2 \Rightarrow x^2 + 3 = x^3 \Rightarrow x^3 - x^2 - 3 = 0$

यह एक घन समीकरण है (घात 3)

अत: यह द्विघात समीकरण नहीं है।

प्रश्न 7. क्या समीकरण $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2$ एक द्विघातीय व्यंजक है।

संकेत : नहीं,

प्रश्न 8. समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के विविक्तकर का व्यापक रूप लिखकर मूलों की प्रकृति समझाइए।

हल : विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$

(i) यदि $D > 0 \rightarrow$ मूल वास्तविक और भिन्न-भिन्न

(ii) यदि $D = 0 \rightarrow$ मूल वास्तविक और समान

(iii) यदि $D < 0 \rightarrow$ मूल काल्पनिक और असमान

प्रश्न 9. दो संख्याओं के वर्गों का अन्तर 45 है तथा छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का चार गुना है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

संकेत : माना बड़ी संख्या $= x$ छोटी संख्या $= y$

समीकरण $x^2 - y^2 = 45$ .... (i)

$y^2 = 4x$ .... (ii)

y^2 का मान समी (ii) से (i) में रखरे पर, $x^2 - 4x = 45$

$x^2 - 4x - 45 = 0; (x - 9)(x + 5) = 0$

$x = 9$ या $x = -5$

समी. (ii) में x का मान रखने पर

$y^2 = 4x \Rightarrow y^2 = 4 \times 9 \Rightarrow y^2 = 36$

$y = \pm 6$

$x = -5$ रखने पर, $y^2 = 4 \times -5 \Rightarrow y^2 = -20$ (असंभव)

अत: संख्याएँ 9 और 6 (या और – 6)

प्रश्न 10. यदि द्विघात समीकरण $kx^2 + 5x + 3k$ के शून्यकों का योग उनके गुणनफल के बराबर हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : **प्रश्नानुसार :** $\alpha + \beta = \alpha\beta$

$$\frac{-5}{k} = 3 \Rightarrow -5 = 3k \Rightarrow k = \frac{-5}{3}$$

प्रश्न 11. 16 को दो भागों में इस प्रकार विभाजित कीजिए कि बड़े भाग के वर्ग का दो गुना छोटे भाग के वर्ग से 164 अधिक हो।

संकेत : माना बड़ा भाग$= x$ छोटा भाग $= 16 - x$

समीकरण, $2x^2 = (16 - x)^2 + 164$

प्रश्न 12. यदि द्विघात समीकरण $Px^2 - 2\sqrt{5}Px + 15$ के दो समान मूल हों, तो P का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : समान मूलों के लिए $D = 0$; $b^2 - 4ac = 0$

$$(-2\sqrt{5}P)^2 - 4 \times (P)(15) = 0$$

प्रश्न 13. श्रीधरआचार्य सूत्र द्वारा द्विघात समीकरण $x^2 - 5x - 7 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

संकेत : $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

प्रश्न 14. k के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए समीकरण $x^2 + 5kx + 16 = 0$ के मूल वास्तविक नहीं हो।

संकेत : समीकरण $= x^2 + 5kx + 16 = 0$

मूल वास्तविक नहीं होने के लिए $D < 0$

$b^2 - 4ac < 0$; $(5k)^2 - 4(1)(16) < 0$

प्रश्न 15. यदि किसी प्राकृतिक संख्या में 12 जोड़ा जाता है तो वह अपने व्युत्क्रम का 160 गुना हो जाती है। वह संख्या ज्ञात करो।

संकेत : माना संख्या $= x$ तब समीकरण $x + 12 = 160 \times \left(\frac{1}{x}\right)$

प्रश्न 16. द्विघात समीकरण $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

संकेत : $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$$(\sqrt{2}x + 5)(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-5\sqrt{2}}{2} \text{ या } x = -\sqrt{2}$$

प्रश्न 17. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए—

(i) $2x^2 - 4x + 3 = 0$, (ii) $2x^2 + x - 1 = 0$

(iii) $x^2 - 4x + 4 = 0$

संकेत : (i) $D < 0$ मूल काल्पनिक और असमान हैं।

(ii) यहाँ $D > 0$ मूल वातविक और भिन्न हैं।

(iii) यहाँ $D = 0$ मूल वास्तविक और समान हैं।

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. द्विघात समीकरण $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ के मूल गुणनखंड विधि से ज्ञात कीजिए।

हल : स्वयं करें

प्रश्न 2. यदि द्विघात समीकरण $2x^2 + px - 15 = 0$ का एक मूल – 5 है तथा द्विघात समीकरण $p(x^2 + x) + k = 0$ के मूल बराबर हों तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $x = -5$ को $2x^2 + px - 15 = 0$ में रखने पर

$2(25) + p(-5) - 15 = 0 \Rightarrow p = 7$

दूसरा समीकरण $7(x^2 + x) + k = 0 \Rightarrow 7x^2 + 7x + k = 0$

समान मूलों के लिए $D = 0$; $D = b^2 - 4ac$

$$49 - 4(7)(k) = 0 \Rightarrow 49 = 28, k = \frac{7}{4}$$

प्रश्न 3. दो प्राकृत संख्याओं का अंतर 5 है, तथा उनके प्रतिलोमों का अंतर $\frac{1}{10}$ है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना संख्याएँ x और $(x - 5)$ समीकरण

$$\frac{1}{(x-5)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{10}$$

हल करने पर, $50 = x^2 - 5x$; $x^2 - 5x - 50 = 0$

$(x - 10)(x + 5) = 0$; $x = 10$

($x = -5$ प्राकृत संख्या नहीं है)

प्रश्न 4. द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ के मूल श्रीधर आचार्य सूत्र से ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $D = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 49 - 24 = 25$

$$x = \frac{(7 \pm 5)}{4} \Rightarrow x = \frac{12}{4} = 3, \text{ या } \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 5. एक व्यक्ति के पास एक टूर (यात्रा) के दौरान खर्च के लिए ₹ 4200 हैं। यदि वह अपना टूर 3 दिन बढ़ा दे उसे अपना प्रतिदिन का व्यय ₹ 70 कम करना पड़ता है। उसके टूर की मूल अवधि ज्ञात कीजिए।

संकेत : माना मूल अवधि $= x$ दिन तथा व्यय $= \frac{4200}{x}$ रुपये

नई स्थिति में, अवधि$= (x + 3)$ दिन तथा व्यय $= \frac{4200}{(x+3)}$ रुपये

$$\frac{4200}{x} - \frac{4200}{(x+3)} = 70$$

प्रश्न 6. दो पानी के नल एक साथ एक टैंक को $1\frac{7}{8}$ घंटों में भर सकते हैं। बड़े व्यास वाला नल टैंक को भरने में, कम व्यास वाले नल से 2 घंटे कम समय लेता है। प्रत्येक नल द्वारा अलग से टैंक को भरने का समय ज्ञात कीजिए।

संकेत : माना छोटे नल टैंक भरता है $= x$ घंटे में तथा खड़ा नल टैंक भरता है $= (x - 2)$ घंटे में तब एक साथ काम करने पर, एक घंटे में भरेगे,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-2)} = \frac{8}{15}$$

प्रश्न 7. कुछ लम्बाई वाले एक कपड़े की कुल लागत ₹ 200 है। यदि यह कपड़ा 5 मीटर अधिक लम्बा हो तथा प्रत्येक मीटर कपड़े की लागत ₹ 2 कम हो, तो कपड़े की कुल लागत में कोई परिवर्तन नहीं होगा। कपड़े का वास्तविक प्रति मीटर मूल्य ज्ञात कीजिए तथा कपड़े की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।

संकेत : माना मूल लम्बाई$=x$ मीटर तथा तब मूल्य $= \frac{200}{x}$ रुपए

नई स्थिति, लम्बाई$=(x+5)$ मी. तब मूल्य $= \left(\frac{200}{x} - 2\right)$ रुपये

$$\text{समीकरण } (x+5)\left(\frac{200}{x} - 2\right) = 200$$

प्रश्न 8. एक आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल 324 मी² है। भूखंड की लम्बाई (मीटर में), चौड़ाई के दोगुने से 3 अधिक है। अभीष्ट द्विघात समीकरण निरूपित कर भूखंड की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

संकेत : माना चौड़ाई $= x$ मीटर, लम्बाई $= (2x + 3)$ मीटर

$$\text{क्षेत्रफल } = x(2x + 3) = 324$$

$$x = \frac{[-3 \pm 51]}{4} = \frac{48}{4} = 12 \left(x = \frac{-54}{4} \text{ असंभव}\right)$$

●●

5 समान्तर श्रेणियाँ

प्रश्नावली 5.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित स्थितियों में से किन स्थितियों में सम्बद्ध संख्याओं की सूची A.P. है और क्यों ?

(i) प्रत्येक किलोमीटर के बाद का टैक्सी का किराया, जबकि प्रथम किलोमीटर के लिए किराया ₹ 15 है और प्रत्येक अतिरिक्त किलोमीटर के लिए किराया ₹ 8 है।

(ii) किसी बेलन (cylinder) में उपस्थित हवा की मात्रा, जबकि वायु निकालने वाला पम्प प्रत्येक बार बेलन की शेष हवा का $\frac{1}{4}$ भाग बाहर निकाल देता है।

(iii) प्रत्येक मीटर की खुदाई के बाद, एक कुआँ खोदने में आई लागत, जबकि प्रथम मीटर खुदाई की लागत ₹ 150 है और बाद में प्रत्येक मीटर खुदाई की लागत ₹ 50 बढ़ती जाती है।

(iv) खाते में प्रत्येक वर्ष का मिश्रधन, जबकि ₹ 10000 की राशि 8% वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर जमा की जाती है।

हल : (i) यदि टैक्सी का पहले किमी का किराया a_1, दूसरे किमी का किराया a_2 तथा nवें किमी का किराया a_n से व्यक्त किया जाए तो

प्रश्नानुसार, $a_1 = 15$

$$a_2 = 15 + 8 = 23$$

$$a_3 = 23 + 8 = 31$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

अब सार्वअन्तर $(d) = a_2 - a_1 = 23 - 15 = 8$

और $a_3 - a_2 = 31 - 23 = 8$

$\because \quad a_3 - a_2 = a_2 - a_1$

अर्थात् सार्वअन्तर समान हैं।

$\therefore$ दी गई स्थिति A.P. (समान्तर श्रेढी) के रूप की है। **उत्तर**

(ii) माना कि एक बेलन में उपस्थित हवा की मात्रा को x मात्रक से तथा प्रत्येक पम्प के बाद हवा की शेष मात्रा को a_2, a_3, a_4 से व्यक्त किया जाता है।

प्रश्न के अनुसार,

$$a_1 = x;\ a_2 = x - \frac{1}{4}x = \left(\frac{4-1}{4}\right)x = \frac{3}{4}x;$$

$$a_3 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\left[\frac{3}{4}x\right]$$

$$= \frac{3}{4}x - \frac{3}{16}x = \left(\frac{12-3}{16}\right)x = \frac{9}{16}x$$

और आगे भी इसी प्रकार से...

अब सार्वअन्तर,

$$a_3 - a_2 = \frac{9}{16}x - \frac{3}{4}x = \left(\frac{9-12}{16}\right)x = -\frac{3}{16}x$$

$$a_2 - a_1 = \frac{3}{4}x - x = \left(\frac{3-4}{4}\right)x = -\frac{1}{4}x$$

यहाँ $a_3 - a_2 \neq a_2 - a_1$

∵ सार्वअन्तर समान नहीं है।

∴ दी गई स्थिति A.P. का रूप नहीं है। **उत्तर**

(iii) माना कि एक कुआँ खोदने के nवें मीटर की लागत को a_n से व्यक्त किया जाए तो

प्रश्न के अनुसार, a_1 = ₹ 150

a_2 = ₹ (150 + 50) = ₹ 200

a_3 = ₹ (200 + 50) = ₹ 250

और आगे भी इसी प्रकार से...

अब सार्वअन्तर, $a_3 - a_2$ = ₹ (250 – 200) = ₹ 50

$a_2 - a_1$ = ₹ (200 – 150) = ₹ 50

यहाँ $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$ = ₹ 50

सार्वअन्तर समान हैं।

अत: दी गई स्थिति A.P. (समान्तर श्रेढी) के रूप की है। **उत्तर**

(iv) खाते में जमा किए गए धन के लिए भिन्न वर्षों के मिश्रधन :

मूलधन P = ₹ 10000 ब्याज की दर $R\% = 8\%$

$$1 \text{ वर्ष का मिश्रधन } A_1 = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^1$$

$$= 10000\left(1+\frac{8}{100}\right) = 10000\times\left(\frac{108}{100}\right)$$

$$2 \text{ वर्ष का मिश्रधन } A_2 = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$$

$$= 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2 = 10000\left(\frac{108}{100}\right)^2$$

$$= 10000\left(\frac{108}{100}\right)\left(\frac{108}{100}\right) = A_1\left(\frac{108}{100}\right)$$

$$3 \text{ वर्ष का मिश्रधन } A_3 = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^3$$

$$= 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^3$$

$$= 10000\left(\frac{108}{100}\right)\left(\frac{108}{100}\right)\left(\frac{108}{100}\right)$$

$$= A_1\left(\frac{108}{100}\right)\left(\frac{108}{100}\right)$$

$$\therefore \quad A_3 = A_2\left(\frac{108}{100}\right)$$

$$\therefore \quad A_1 = 10000\left(\frac{108}{100}\right)$$

$$A_2 = A_1\left(\frac{108}{100}\right) \Rightarrow A_3 = A_2\left(\frac{108}{100}\right)$$

निरीक्षण से ही स्पष्ट है कि $A_2 - A_1 \neq A_3 - A_2$

अत: मिश्रधन A.P. (समान्तर श्रेढी) में नहीं हैं। **उत्तर**

प्रश्न 2. दी हुई A.P. के प्रथम चार पद लिखिए, जबकि प्रथम पद *a* और सार्वअन्तर *d* निम्नलिखित हैं :

(i) $a = 10, d = 10$, (ii) $a = -2, d = 0$

(iii) $a = 4, d = -3$, (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1{\cdot}25, d = -0{\cdot}25$

हल : (i) दिया है, प्रथम पद $(a) = 10$

और सार्वअन्तर $(d) = 10$

∴ a_1 = प्रथम पद $(a) = 10$

$a_2 = a + d = 10 + 10 = 20$

$a_3 = a + 2d = 10 + 2 \times 10 = 30$

$a_4 = a + 3d = 10 + 3 \times 10 = 40$

अत: A.P. के प्रथम चार पद 10, 20, 30, 40 हैं। **उत्तर**

(ii) दिया हुआ है कि प्रथम पद $(a) = -2$

और सार्वअन्तर $(d) = 0$

∴ $a_1 = a = -2$

$a_2 = a + d = -2 + 0 = -2$

$a_3 = a + 2d = -2 + 2 \times 0 = -2$

$a_4 = a + 3d = -2 + 3 \times 0 = -2$

अत: A.P. के प्रथम चार पद – 2, – 2, – 2, – 2, हैं। **उत्तर**

(iii) दिया हुआ है, प्रथम पद $(a) = 4$

और सार्वअन्तर $(d) = -3$

∴ $a_1 = a = 4$

$a_2 = a + d = 4 + (-3) = 1$

$a_3 = a + 2d = 4 + 2 \times (-3) = -2$

$a_4 = a + 3d = 4 + 3 \times (-3) = -5$

अत: A.P. के प्रथम चार पद 4, 1, – 2, – 5, हैं। **उत्तर**

(iv) दिया है कि प्रथम पद $a = -1$

और सार्वअन्तर $d = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad a_1 = a = -1$

$a_2 = a + d = -1 + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$

$a_3 = a + 2d = -1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + 1 = 0$

$a_4 = a + 3d = -1 + 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$

अत: A.P. के प्रथम चार पद $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2},$ हैं। **उत्तर**

(v) दिया है कि प्रथम पद $= a = -1.25$

और सार्वअन्तर $(d) = -0.25$

$\therefore \quad a_1 = a = -1.25$

$a_2 = a + d = -1.25 - 0.25 = -1.50$

$a_3 = a + 2d = -1.25 + 2(-0.25)$
$= -1.25 - 0.50 = -1.75$

$a_4 = a + 3d = -1.25 + 3(-0.25)$
$= -1.25 - 0.75 = -2$

अत: A.P. के प्रथम चार पद – 1.25, – 1.50, – 1.75, – 2, हैं। **उत्तर**

प्रश्न 3. निम्नलिखित में से प्रत्येक A.P. के लिए प्रथम पद तथा सार्वअन्तर लिखिए :

(i) 3, 1, – 1, – 3,... **(ii) – 5, – 1, 3, 7, ...**

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, ...$ **(iv) 0.6, 1.7, 2.8, 3.9,...**

हल : (i) दी गई A.P. = 3, 1, – 1, – 3, ...

यहाँ $a_1 = 3, a_2 = 1$

$a_3 = -1, a_4 = -3$

प्रथम पद $a = a_1 = 3$

सार्वअन्तर $d = a_2 - a_1 = 1 - 3 = -2$

अत: प्रथम पद = 3 तथा सार्वअन्तर = – 2 **उत्तर**

(ii) दी गई A.P. = – 5, – 1, 3, 7, ...

यहाँ $a_1 = -5, a_2 = -1, a_3 = 3, a_4 = 7$

प्रथम पद $a_1 = -5$

सार्वन्तर $d = a_2 - a_1 = -1 - (-5) = -1 + 5 = 4$

अत: प्रथम पद = – 5 तथा सार्वन्तर = 4 **उत्तर**

(iii) दी गई A.P. = $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, ...$

यहाँ $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{5}{3}, a_3 = \frac{9}{3}, a_4 = \frac{13}{3}$

प्रथम पद $a = a_1 = \frac{1}{3}$

सार्वन्तर $d = a_2 - a_1 = \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5-1}{3} = \frac{4}{3}$

अत: प्रथम पद = $\frac{1}{3}$ तथा सार्वअन्तर = $\frac{4}{3}$ **उत्तर**

(iv) दी गई A.P. = 0.6, 1.7, 2.8, 3.9, ...

$a_1 = 0.6, a_2 = 1.7, a_3 = 2.8, a_4 = 3.9$

प्रथम पद $a = a_1 = 0.6$

सार्वअन्तर $d = a_2 - a_1 = 1.7 - 0.6 = 1.1$

अत: प्रथम पद = 0.6 तथा सार्वअन्तर = 1.1 **उत्तर**

प्रश्न 4. निम्नलिखित में से कौन-कौन A.P. हैं ? यदि कोई A.P. है, तो इसका सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए और इनके तीन और पद लिखिए :

(i) 2, 4, 8, 16, ... **(ii)** $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, ...$

(iii) – 1.2, – 3.2, – 5.2, – 7.2, ...

(iv) – 10, – 6, – 2, 2, ...

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, ...$

(vi) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, ...

(vii) 0, – 4, – 8, – 12, ...

(viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, ...$

(ix) 1, 3, 9, 27, ... **(x)** $a, 2a, 3a, 4a, ...$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, ...$ **(xii)** $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, ...$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, ...$ **(xiv)** $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, ...$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, ...$

हल : (i) दिया हुआ अनुक्रम 2, 4, 8, 16, ...

यहाँ $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16$

दो क्रमागत पदों का अन्तर (सार्वअन्तर)

$$d = a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 8 - 4 = 4$$

$$a_4 - a_3 = 16 - 8 = 8$$

$\because$ दो क्रमागत पदों का अन्तर समान नहीं है,

अर्थात् $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$

अत: दिया गया अनुक्रम A.P. नहीं है। **उत्तर**

(ii) दिया गया अनुक्रम $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, ...$

यहाँ $a_1 = 2, a_2 = \frac{5}{2}, a_3 = 3, a_4 = \frac{7}{2}$

दो क्रमागत पदों का अन्तर (सार्वअन्तर)

$$d = a_2 - a_1 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 - a_2 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 - a_3 = \frac{7}{2} - 3 = \frac{7-6}{2} = \frac{1}{2}$$

$\because$ दो क्रमागत पदों का अन्तर समान है। सार्वअन्तर = $\frac{1}{2}$ है।

$\therefore$ दिया गया अनुक्रम A.P. है।

अगले तीन पद $a_5 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$$a_6 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$a_7 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

अत: दिये गये अनुक्रम के अगले तीन पद $4, \frac{9}{2}$ और 5 हैं।

(iii) दिया गया अनुक्रम $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, ...$

यहाँ $a_1 = -1.2, a_2 = -3.2, a_3 = -5.2, a_4 = -7.2$

दो क्रमागत पदों का अन्तर d :

$$a_2 - a_1 = -3.2 - (-1.2) = -2.0$$

$$a_3 - a_2 = -5.2 - (-3.2) = -2.0$$

$$a_4 - a_3 = -7.2 - (-5.2) = -2.0$$

$\because$ दो क्रमागत पदों का अन्तर समान (-2.0) है।

$\therefore$ सार्वन्तर $d = -2.0$ और दिया गया अनुक्रम एक A.P. है।

तब पाँचवाँ पद a_5 = चौथा पद a_4 + सार्वअन्तर d
$= -7.2 + (-2) = -9.2$

छठा पद a_6 = पाँचवाँ पद a_5 + सार्वअन्तर d
$= -9.2 + (-2) = -11.2$

सातवाँ पद a_7 = छठा पद a_6 + सार्वअन्तर d
$= -11.2 + (-2) = -13.2$

अत: दिए गए अनुक्रम के अगले तीन पद $-9.2, -11.2, -13.2$ हैं। **उत्तर**

(iv) दिया हुआ अनुक्रम $-10, -6, -2, 2, ...$

यहाँ $a_1 = -10, a_2 = -6, a_3 = -2, a_4 = 2$

दो क्रमागत पदों का अन्तर d :

$$a_2 - a_1 = -6 - (-10) = -6 + 10 = 4$$

$$a_3 - a_2 = -2 - (-6) = -2 + 6 = 4$$

$$a_4 - a_3 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$$

$\because$ दो क्रमागत पदों का अन्तर समान (4) है।

$\therefore$ सार्वअन्तर $d = 4$ और दिया गया अनुक्रम एक A.P. है।

तब पाँचवाँ पद a_5= चौथा पद a_4 + सार्वअन्तर $d = 2 + 4 = 6$

छठा पद a_6= पाँचवाँ पद a_5 + सार्वअन्तर $d = 6 + 4 = 10$

सातवाँ पद a_7= छठा पद a_6 + सार्वअन्तर $d = 10 + 4 = 14$

अत: दिए गए अनुक्रम के अगले तीन पद 6, 10, 14 हैं। **उत्तर**

(v) दिया हुआ अनुक्रम $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, ...$

यहाँ $a_1 = 3, a_2 = 3+\sqrt{2}, a_3 = 3+2\sqrt{2}$,
$a_4 = 3+3\sqrt{2}$

दो क्रमागत पदों का अन्तर d :

$$a_2 - a_1 = (3+\sqrt{2}) - 3 = \sqrt{2}$$

$$a_3 - a_2 = (3+2\sqrt{2}) - (3+\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$a_4 - a_3 = (3+3\sqrt{2}) - (3+2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$\because$ दो क्रमागत पदों का अन्तर समान $(\sqrt{2})$ है।

$\therefore$ सार्वअन्तर $d = \sqrt{2}$ और दिया गया अनुक्रम एक A.P. है।

तब पाँचवाँ पद a_5 = चौथा पद a_4 + सार्वअन्तर d
$= 3+3\sqrt{2}+\sqrt{2} = 3+\sqrt{2}(3+1) = 3+4\sqrt{2}$

छठा पद a_6= पाँचवाँ पद a_5 + सार्वअन्तर d
$= 3+4\sqrt{2}+\sqrt{2} = 3+\sqrt{2}(4+1) = 3+5\sqrt{2}$

सातवाँ पद a_7 = छठा पद a_6 + सार्वअन्तर d

$= 3+5\sqrt{2}+\sqrt{2} = 3+\sqrt{2}(5+1) = 3+6\sqrt{2}$

अत: दिए गए अनुक्रम के अगले तीन पद

$3+4\sqrt{2},\ 3+5\sqrt{2},\ 3+6\sqrt{2}$ हैं। **उत्तर**

(vi) दिया हुआ अनुक्रम 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, ...

यहाँ $a_1 = 0.2, a_2 = 0.22, a_3 = 0.222, a_4 = 0.2222,$

दो क्रमागत पदों का अन्तर d :

$$a_2 - a_1 = 0.22 - 0.2 = 0.02$$
$$a_3 - a_2 = 0.222 - 0.22 = 0.002$$
$$a_4 - a_3 = 0.2222 - 0.222 = 0.0002$$

दो क्रमागत पदों का अन्तर समान नहीं है।

अर्थात् $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$

अत: दिया गया अनुक्रम A.P. नहीं है। **उत्तर**

(vii) दिया हुआ अनुक्रम 0, – 4, – 8, – 12, ...

यहाँ $a_1 = 0, a_2 = -4, a_3 = -8, a_4 = -12$

दो क्रमागत पदों का अन्तर d :

$$a_2 - a_1 = -4 - 0 = -4$$
$$a_3 - a_2 = -8 - (-4) = -8 + 4 = -4$$
$$a_4 - a_3 = -12 - (-8) = -12 + 8 = -4$$

दो क्रमागत पदों का अन्तर समान है। सार्वअन्तर = – 4 है। अत: दिया गया अनुक्रम A.P. है।

तब पाँचवाँ पद a_5 = चौथा पद a_4 + सार्वअन्तर d
$= -12 + (-4) = -16$

छठा पद a_6 = पाँचवाँ पद a_5 + सार्वअन्तर d
$= -16 + (-4) = -20$

सातवाँ पद a_7 = छठा पद a_6 + सार्वअन्तर d
$= -20 + (-4) = -24$

अत: दिए गये अनुक्रम के अगले तीन पद – 16, – 20 और – 24 हैं। **उत्तर**

(viii) दिया हुआ अनुक्रम $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, ...$

यहाँ $a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{2}, a_4 = -\frac{1}{2}$

दो क्रमागत पदों का अन्तर d :

$$a_2 - a_1 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$a_3 - a_2 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$a_4 - a_3 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

दो क्रमागत पदों का अन्तर समान है । सार्वअन्तर = 0 है। अत: दिया गया अनुक्रम एक A.P. है।

पाँचवाँ पद a_5 = चौथा पद a_4 + सार्वअन्तर d
$= -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$

छठा पद a_6 = पाँचवाँ पद a_5 + सार्वअन्तर d
$= -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$

सातवाँ पद a_7 = छठा पद a_6 + सार्वअन्तर d
$= -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$

दिए गए अनुक्रम के अगले तीन पद $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ हैं।

(ix) दिया हुआ अनुक्रम 1, 3, 9, 27,...

यहाँ $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 9, a_4 = 27$

दो क्रमागत पदों का अन्तर d : $a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$

$a_3 - a_2 = 9 - 3 = 6$; $a_4 - a_3 = 27 - 9 = 18$

दो क्रमागत पदों का अन्तर समान नहीं है।

अर्थात् $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$

अत: दिया गया अनुक्रम A.P. में नहीं है। **उत्तर**

(x) दिया हुआ अनुक्रम $a, 2a, 3a, 4a,...$

यहाँ $a_1 = a, a_2 = 2a, a_3 = 3a, a_4 = 4a$

दो क्रमागत पदों का अन्तर d : $a_2 - a_1 = 2a - a = a$

$a_3 - a_2 = 3a - 2a = a;\ a_4 - a_3 = 4a - 3a = a$

$\because$ दो क्रमागत पदों का अन्तर समान (a) है।

अत: सार्वन्तर $d = a$ तथा दिया गया अनुक्रम एक A.P. है।

तब पाँचवाँ पद a_5 = चौथा पद a_4 + सार्वअन्तर d
$= 4a + a = 5a$

छठा पद a_6 = पाँचवाँ पद a_5 + सार्वअन्तर d
$= 5a + a = 6a$

सातवाँ पद a_7 = छठा पद a_6 + सार्वअन्तर d
$= 6a + a = 7a$

अत: दिए गए अनुक्रम के अगले तीन पद $5a, 6a, 7a$ हैं।

(xi) दिया हुआ अनुक्रम $a, a^2, a^3, a^4, ...$

यहाँ $a_1 = a, a_2 = a^2, a_3 = a^3, a_4 = a^4$

दो क्रमागत पदों का अन्तर d : $a_2 - a_1 = a^2 - a = a(a-1)$

$$a_3 - a_2 = a^3 - a^2 = a^2(a-1)$$

∵ दो क्रमागत पदों का अन्तर समान नहीं है।

अर्थात $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

अत: दिया गया अनुक्रम एक A.P. नहीं है। **उत्तर**

(xii) दिया हुआ अनुक्रम $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, ...$

यहाँ $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{8}$, $a_3 = \sqrt{18}$, $a_4 = \sqrt{32}$

दो क्रमागत पदों का अन्तर d :

$$a_2 - a_1 = \sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{4} - 1) = \sqrt{2}(2-1) = \sqrt{2}$$

$$a_3 - a_2 = \sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{2}(\sqrt{9} - \sqrt{4}) = \sqrt{2}(3-2) = \sqrt{2}$$

$$a_4 - a_3 = \sqrt{32} - \sqrt{18} = \sqrt{2}(\sqrt{16} - \sqrt{9})$$

$$= \sqrt{2}(4-3) = \sqrt{2}$$

∵ दो क्रमागत पदों का अन्तर समान ($\sqrt{2}$) है।

अत: सार्वअन्तर $d = \sqrt{2}$ तथा दिया गया अनुक्रम एक A.P. है।

तब 5वाँ पद a_5 = 4वाँ पद + सार्वअन्तर d

$$= \sqrt{32} + \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{16} + 1) = \sqrt{2}(4+1)$$

$$= 5\sqrt{2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{50}$$

6वाँ पद a_6 = 5वाँ पद + सार्वअन्तर d

$$= \sqrt{50} + \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{25} + 1) = \sqrt{2}(5+1) = 6\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{36} \times \sqrt{2} = \sqrt{72}$$

7वाँ पद a_7 = 6वाँ पद + सार्वअन्तर d

$$= \sqrt{72} + \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{36} + 1)$$

$$= \sqrt{2}(6+1) = 7\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{49} \times \sqrt{2} = \sqrt{98}$$

अत: दिए गए अनुक्रम के अगले तीन पद $\sqrt{50}$, $\sqrt{72}$, $\sqrt{98}$ हैं। **उत्तर**

(xiii) दिया हुआ अनुक्रम $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, ...$

$a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{6}$, $a_3 = \sqrt{9}$, $a_4 = \sqrt{12}$

दो क्रमागत पदों का अन्तर d :

$$a_2 - a_1 = \sqrt{6} - \sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{2} - 1) = 0{\cdot}717$$

$$a_3 - a_2 = \sqrt{9} - \sqrt{6} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0{\cdot}530$$

∵ दो क्रमागत पदों का अन्तर समान नहीं है।

अर्थात $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

अत: दिया गया अनुक्रम एक A.P. नहीं है। **उत्तर**

(xiv) दिया हुआ अनुक्रम $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, ...$

$a_1 = 1^2$, $a_2 = 3^2$, $a_3 = 5^2$, $a_4 = 7^2$

दो क्रमागत पदों का अन्तर d :

$$a_2 - a_1 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

$$a_3 - a_2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

$$a_4 - a_3 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$$

∵ दो क्रमागत पदों का अन्तर समान नहीं है।

अर्थात् $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$

अत: दिया गया अनुक्रम A.P. नहीं है। **उत्तर**

(xv) दिया गया अनुक्रम $1^2, 5^2, 7^2, 7^3, ...$

यहाँ $a_1 = 1^2$, $a_2 = 5^2$, $a_3 = 7^2$, $a_4 = 73$

दो क्रमागत पदों का अन्तर d :

$$a_2 - a_1 = 5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$$

$$a_3 - a_2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$$

$$a_4 - a_3 = 73 - 7^2 = 73 - 49 = 24$$

चूँकि दो क्रमागत पदों का अन्तर समान है।

अत: सार्वअन्तर $d = 24$

तथा दिया गया अनुक्रम A.P. है।

पाँचवाँ पद a_5 = चौथा पद a_4 + सार्वअन्तर
$= 73 + 24 = 97$

छठवाँ पद a_6 = पाँचवाँ पद a_5 + सार्वअन्तर
$= 97 + 24 = 121$

सातवाँ पद a_7 = छठवाँ पद a_6 + सार्वअन्तर
$= 121 + 24 = 145$

अत: दिये गये अनुक्रम के अगले तीन पद 97, 121 और 145 हैं। **उत्तर**

प्रश्नावली 5.2

प्रश्न 1. निम्नलिखित सारणी में, रिक्त स्थानों को भरिए, जहाँ A.P. का प्रथम पद a, सार्वअन्तर d और nवाँ पद a_n है—

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	....
(ii)	– 18	....	10	0
(ii)	....	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	....	3.6
(v)	3.5	0	105	.....

हल : (i) $a = 7, d = 3, n = 8$

∵ $a_n = a + (n-1)d$

∴ $a_8 = 7 + (8-1)3 = 7 + 21 = 28$

अत: $a_8 = 28$

(ii) $a = -18, n = 10, a_n = 0$

∵ $a_n = a + (n-1)d$

∴ $a_{10} = -18 + (10-1)d \Rightarrow 0 = -18 + 9d$

$\Rightarrow 9d = 18$

∴ $d = \frac{18}{9} = 2$

(iii) $d = -3, n = 18, a_n = -5$

∵ $a_n = a + (n-1)d$

∴ $a_{18} = a + (18-1)(-3) \Rightarrow -5 = a - 51$

∴ $a = -5 + 51 = 46$

(iv) $a = -18.9, d = 2.5, a_n = 3.6$

∵ $a_n = a + (n-1)d$

∴ $3.6 = -18.9 + (n-1)\, 2.5$

$\Rightarrow 3.6 + 18.9 = (n-1)\, 2.5 \Rightarrow (n-1)\, 2.5 = 22.5$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{22.5}{2.5} = 9$

∴ $n = 9 + 1 = 10$ **उत्तर**

(v) $a = 3.5, d = 0, n = 105$

∵ $a_n = a + (n-1)d$

∴ $a_n = 3.5 + (105-1)0 = 3.5 + 0 = 3.5$ **उत्तर**

प्रश्न 2. निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए और उसका औचित्य दीजिए—

(i) A.P. : 10, 7, 4, ... का 30वाँ पद है—

(A) 97 (B) 77 (C) – 77 (D) – 87

(ii) A.P. : – 3, $-\frac{1}{2}$, 2, ... का 11वाँ पद है—

(A) 28 (B) 22 (C) – 38 (D) $-48\frac{1}{2}$

हल : (i) (C) A.P. : 10, 7, 4, ... का 30वाँ पद

यहाँ $a = 10, d = 7 - 10 = -3$ तथा $n = 30$

∵ $a_n = a + (n-1)d$

∴ $a_{30} = 10 + (30-1) \times -3$

$= 10 + 29 \times -3 = 10 - 87 = -77$

अत: विकल्प (C) सही है। **उत्तर**

(ii) (B) A.P. : $-3, -\frac{1}{2}, 2, \ldots$ का 11वाँ पद

यहाँ $a = -3$, $d = -\frac{1}{2} - (-3) = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$

$n = 11$

∵ $a_n = a + (n-1)d$

∴ $a_{11} = -3 + (11-1) \times \frac{5}{2}$

$= -3 + 10 \times \frac{5}{2} = -3 + 25 = 22$

प्रश्न 3. निम्नलिखित समान्तर श्रेढियों में रिक्त खानों (boxes) के पदों को ज्ञात कीजिए :

(i) 2, ☐, 26 **(ii) ☐, 13, ☐, 3**

(iii) 5, ☐, ☐, $9\frac{1}{2}$

(iv) – 4, ☐, ☐, ☐, ☐, 6

(v) ☐, 38, ☐, ☐, ☐, – 22

हल : (i) पहला पद $a = 2$, तीसरा पद $a_3 = 26$,

दूसरा पद $a_2 = ?$

माना सार्वअन्तर d है। अब $a_3 = a + 2d$

$\Rightarrow 26 = 2 + 2d \Rightarrow 2d = 26 - 2 = 24 \Rightarrow d = 12$

∴ दूसरा पद $a_2 = a + d = 2 + 12 = 14$

अत: रिक्त बॉक्स का पद $a_2 = 14$ **उत्तर**

(ii) पहला पद $a = ?$, दूसरा पद $a_2 = 13$, तीसरा पद $a_3 = ?$, चौथा पद $a_4 = 3$

माना सार्वअन्तर d है $a_2 = a + d$

$\Rightarrow 13 = a + d$ ...(1)

तथा $a_4 = a + 3d$

$\Rightarrow 3 = a + 3d$ ...(2)

समीकरण (2) में से (1) को घटाने पर,

$2d = -10 \Rightarrow d = -5$

समीकरण (1) से, $13 = a + d \Rightarrow 13 = a - 5 \Rightarrow a = 18$

∴ तीसरा पद $a_3 = a + 2d = 18 + 2 \times (-5) \Rightarrow a_3 = 8$

अत: रिक्त बॉक्सों के पद क्रमश: 18 व 8 हैं। **उत्तर**

(iii) पहला पद $a = 5$, चौथा पद $a_4 = 9\frac{1}{2}$, दूसरा पद $a_2 = ?$,

तीसरा पद $a_3 = ?$ माना सार्वअन्तर d है।

$a_4 = a + 3d \Rightarrow 9\frac{1}{2} = 5 + 3d$

$\Rightarrow \frac{19}{2} = 5 + 3d \Rightarrow \frac{19}{2} - 5 = 3d$

$\Rightarrow \frac{19-10}{2} = 3d \Rightarrow \frac{9}{2} = 3d$

$\Rightarrow d = \frac{9}{2\times3} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

दूसरा पद $a_2 = a + d = 5+1\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$

तीसरा पद $a_3 = a + 2d = 5+2\times\frac{3}{2} = 8$

अत: रिक्त बाक्सों के पद क्रमशः $6\frac{1}{2}$ और 8 हैं। **उत्तर**

(iv) $-4, \boxed{a_2}, \boxed{a_3}, \boxed{a_4}, \boxed{a_5}, 6$

$\because$ पहला पद $a = -4$ और माना सार्वअन्तर d है।

6वाँ पद $= a + (6-1)d$
$= a + 5d$

$\because$ $a + 5d = 6 \Rightarrow -4 + 5d = 6$

$\Rightarrow 5d = 6 + 4 = 10 \Rightarrow 5d = 10$

$\therefore$ $d = \frac{10}{5} = 2$

तब दूसरा पद $a_2 = a + d = -4 + 2 = -2$

तीसरा पद $a_3 = a_2 + d = -2 + 2 = 0$

चौथा पद $a_4 = a_3 + d = 0 + 2 = 2$

पाँचवाँ पद $a_5 = a_4 + d = 2 + 2 = 4$

(v) $\boxed{a}, 38, \boxed{a_3}, \boxed{a_4}, \boxed{a_5}, -22$

माना पहला पद a और सार्वअन्तर d है।

दूसरा पद $= a + d = 38$ ...(i)

और छठवाँ पद $= a + (6-1)d$

$\Rightarrow a + 5d = -22$ ...(ii)

समीकरण (ii) में से (i) को घटाने पर,

$(a + 5d) - (a + d) = -22 - 38$

$\Rightarrow 5d - d = -60$

$\Rightarrow 4d = -60$

$\therefore$ $d = \frac{-60}{4} = -15$

$\therefore$ समीकरण (i) से, $a + d = 38 \Rightarrow a + (-15) = 38$

$\therefore$ $a = 38 + 15 = 53$

तब पहला पद $a_1 = 53$

तीसरा पद $a_3 = a_2 + d = 38 - 15 = 23$

चौथा पद $a_4 = a_3 + d = 23 - 15 = 8$

पाँचवाँ पद $a_5 = a_4 + d = 8 - 15 = -7$

प्रश्न 4. A.P. : 3, 8, 13, 18, ... का कौन-सा पद 78 है ?

हल : दी गई A.P. : 3, 8, 13, 18, ...

यहाँ $a = 3; d = 8 - 3 = 5$ माना nवाँ पद 78 है।

$\therefore$ $a_n = 78$

$\because$ $a_n = a + (n-1)d \Rightarrow 78 = 3 + (n-1)5$

$\Rightarrow 78 = 3 + 5n - 5 \Rightarrow 78 = 5n - 2 \Rightarrow 5n = 78 - 2$

$\Rightarrow 5n = 80$

$\therefore$ $n = \frac{80}{5} = 16$ अत: 16वाँ पद 78 है। **उत्तर**

प्रश्न 5. निम्नलिखित समान्तर श्रेढियों में से प्रत्येक श्रेढी में कितने पद हैं ?

(i) 7, 13, 19, ..., 205 (ii) 18, $15\frac{1}{2}$, 13,..., – 47

हल : (i) दी गई समान्तर श्रेढी (A.P.) : 7, 13, 19, ..., 205

यहाँ $a = 7$ तथा $d = 13 - 7 = 6$

माना दी गई A.P. में n पद हैं

$\therefore$ nवाँ पद $a_n = 205$

$a_n = 205 \Rightarrow a + (n-1)d = 205$

$\Rightarrow 7 + (n-1)6 = 205 \Rightarrow 7 + 6n - 6 = 205$

$\Rightarrow 1 + 6n = 205 \Rightarrow 6n = 205 - 1 = 204$

$\therefore$ $n = \frac{204}{6} = 34$

अत: दी गई A.P. में 34 पद हैं। **उत्तर**

(ii) दी गई समान्तर श्रेढी (A.P.) :

$18, 15\frac{1}{2}, 13, ..., -47$

यहाँ पहला पद $a = 18$ तथा सार्वअन्तर $d = 15\frac{1}{2} - 18$

$= \frac{31}{2} - 18 = \frac{31-36}{2} = \left(-\frac{5}{2}\right)$

माना दी गई श्रेढी में n पद हैं।

$\therefore$ nवाँ पद, $a_n = -47$

$\Rightarrow a + (n-1)d = -47$

$\Rightarrow 18 + (n-1) \times \left(-\frac{5}{2}\right) = -47$

$\Rightarrow -\frac{5(n-1)}{2} = -47 - 18 = -65$

$\Rightarrow (n-1) = \frac{(-65)\times2}{-5} = 26$

$\therefore n = 26 + 1 = 27$

अत: दी गई श्रेढी (A.P.) में 27 पद हैं। **उत्तर**

प्रश्न 6. क्या A.P. : 11, 8, 5, 2 ... का एक पद – 150 है ? क्यों ?

हल : दी गई A.P. : 11, 8, 5, 2 ...
यहाँ पहला पद $a = 11$ तथा सार्वअन्तर $d = 8 - 11 = -3$
माना nवाँ पद $(a_n) = -150$ है।
$\Rightarrow\ a_n = -150 \Rightarrow a + (n-1)d = -150$
$\Rightarrow\ 11 + (n-1) \times (-3) = -150$
$\Rightarrow -3(n-1) = -150 - 11 = -161 \Rightarrow (n-1) = \frac{-161}{-3} = 53.6$ (लगभग)

$\therefore\ n = 53.6 + 1 = 54.6$
$\Rightarrow n$ का मान एक पूर्ण संख्या नहीं है।
अतः दी गई A.P. का कोई पद – 150 नहीं है। **उत्तर**

प्रश्न 7. उस A.P. का 31वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 11वाँ पद 38 है और 16वाँ पद 73 है।

हल : माना A.P. का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है।
तब 11वाँ पद $a_{11} = 38 \Rightarrow a + (11-1)d = 38$
$\Rightarrow\ a + 10d = 38$ ...(i)
और 16वाँ पद $a_{16} = 73 \Rightarrow a + (16-1)d = 73$
$\Rightarrow\ a + 15d = 73$ ...(ii)
समीकरण (ii) में से (i) को घटाने पर,
$(a + 15d) - (a + 10d) = 73 - 38$
$\Rightarrow\ a + 15d - a - 10d = 35 \Rightarrow 5d = 35$
$\therefore\ d = \frac{35}{5} = 7$

समीकरण (i) में d का मान रखने पर,
$\Rightarrow a + 10 \times 7 = 38 \Rightarrow a + 70 = 38$
$\therefore\ a = 38 - 70 = -32$
श्रेढी का 31वाँ पद $a_{31} = a + (31-1)d$
$= -32 + 30 \times 7 = -32 + 210 = 178$
अतः A.P. का 31वाँ पद = 178 **उत्तर**

प्रश्न 8. एक A.P. में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अन्तिम पद 106 है। इसका 29वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि A.P. का प्रथम पद 'a' और सार्वअन्तर 'd' है।
दिया है कि, तीसरा पद $a_3 = 12$
$a + (3-1)d = 12$ $[\because a_n = a + (n-1)d]$
$\Rightarrow\ a + 2d = 12$ ...(1)
और अन्तिम पद = $a_{50} = 106$
$a + (50-1)d = 106 \Rightarrow a + 49d = 106$ ...(2)
समीकरण (1) और (2) को हल करने पर, $d = 2$ तथा $a = 8$
अब श्रेढी का 29वाँ पद $a_{29} = a + (29-1)d$
$= 8 + 28 \times 2 = 8 + 56 = 64$

प्रश्न 9. यदि किसी A.P. के तीसरे और नौवें पद क्रमशः 4 और – 8 हैं, तो इसका कौन-सा पद शून्य होगा ?

हल : माना कि A.P. का प्रथम पद 'a' और सार्वअन्तर 'd' है।
दिया है, तीसरा पद $a_3 = 4$
$a + (3-1)d = 4 \Rightarrow a + 2d = 4$ ...(1)
और $a_9 = -8$
$a + (9-1)d = -8 \Rightarrow a + 8d = -8$ ...(2)
समीकरण (1) और (2) हल करने पर,
$\therefore\ d = -2;\ \ a = 8$
अब माना कि श्रेढी का nवाँ पद शून्य होगा, तब nवाँ पद $a_n = 0$
$\therefore\ a + (n-1)d = 0 \Rightarrow 8 + (n-1) \times (-2) = 0$
$\Rightarrow -2(n-1) = -8 \Rightarrow (n-1) = 4$
$\therefore\ n = 5$
अतः दी गई A.P. का 5वाँ पद शून्य होगा। **उत्तर**

प्रश्न 10. किसी A.P. का 17वाँ पद उसके 10वें पद से 7 अधिक है। इसका सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।

हल : माना A.P. का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है।
तब 17वाँ पद $a_{17} = a + (17-1)d = a + 16d$
10वाँ पद $a_{10} = a + (10-1)d = a + 9d$
$\because$ 17वाँ पद, 10 वें पद से 7 अधिक है।
$\Rightarrow\ a_{17} - a_{10} = 7$
$\Rightarrow\ (a + 16d) - (a + 9d) = 7$
$\Rightarrow\ 7d = 7 \Rightarrow d = 1$
अतः श्रेढी का सार्वअन्तर = 1 **उत्तर**

प्रश्न 11. A.P. : 3, 15, 27, 39, ... का कौन-सा पद उसके 54वें पद से 132 अधिक होगा ?

हल : माना अभीष्ट पद nवाँ पद है।
दी गई A.P. : 3, 15, 27, 39, ...
प्रथम पद $a = 3$ तथा सार्वअन्तर $d = 15 - 3 = 12$
तब श्रेढी का 54वाँ पद $a_{54} = a + (54-1)d$
$= 3 + 53 \times 12 = 3 + 636 = 639$
$\Rightarrow n$वाँ पद= 54वें पद से 132 अधिक = 639 + 132 = 771
$\therefore\ n$वाँ पद $a_n = 771$
$\Rightarrow\ a + (n-1)d = 771 \Rightarrow 3 + (n-1)12 = 771$
$\Rightarrow\ (n-1)12 = 771 - 3 = 768$
$\Rightarrow\ n - 1 = \frac{768}{12} = 64$
$\therefore\ n = 64 + 1 = 65$
अतः श्रेढी का 65वाँ पद 54वें पद से 132 अधिक है। **उत्तर**

प्रश्न 12. दो समान्तर श्रेढियों का सार्वअन्तर समान है। यदि इनके 100वें पदों का अन्तर 100 है, तो इनके 1000वें पदों का अन्तर क्या होगा ?

हल : माना पहली A.P. का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है और दूसरी A.P. का प्रथम पद A तथा सार्वअन्तर d है क्योंकि सार्वअन्तर समान हैं।
पहली श्रेढी का 100वाँ पद $= a + (100-1)d = a + 99d$

दूसरी श्रेढी का 100वाँ पद $= A + (100 - 1)d = A + 99d$

$\therefore$ दोनों श्रेढियों के 100वें पदों का अन्तर

$= (A + 99d) - (a + 99d)$
$= A - a$

प्रश्नानुसार, $A - a = 100$ ...(1)

पहली श्रेढी का 1000वाँ पद

$= a + (1000 - 1)d = a + 999d$

दूसरी श्रेढी का 1000वाँ पद $= A + (1000 - 1)d = A + 999d$

$\therefore$ दोनों श्रेढियों के 1000वें पदों का अन्तर

$= (A + 999d) - (a + 999d) = A - a$

$\therefore$ दोनों श्रेढियों के 1000वें पदों का अन्तर

$= A - a = 100$ (समी. 1 से)

अत: 1000वें पदों का अन्तर = 100 **उत्तर**

प्रश्न 13. तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं?

हल : तीन अंकों की संख्याओं की सूची 100, 101, 102, ..., 999,

3 अंकों की 7 से विभाज्य प्रथम संख्या = 105 और अन्तिम संख्या = 994

तब 7 से विभाज्य 3 अंकीय संख्याओं की सूची—

105, (105 + 7), (105 + 7 + 7), ... 994

$\equiv$ 105, 112, 119, ..., 994

माना ऐसी कुल संख्याएँ n हैं।

प्रथम संख्या $a = 105$, सार्वअन्तर $d = 7$,

$\therefore$ nवाँ पद $a_n = 994$

$\Rightarrow a + (n - 1)d = 994$

$\Rightarrow 105 + (n - 1) \times 7 = 994$

$\Rightarrow (n - 1) \times 7 = 994 - 105 = 889$

$\Rightarrow (n - 1) = \frac{889}{7} = 127$

$\therefore n = 127 + 1 = 128$

अत: 7 से विभाज्य तीन अंकों वाली संख्याएँ = 128 **उत्तर**

प्रश्न 14. 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज हैं ?

हल : 10 से बड़ा 4 का पहला गुणज = 12

250 से छोटा 4 का पहला गुणज = 248

$\because$ 10 और 250 के बीच 4 के गुणजों की श्रेढी निम्न होगी : 12, 16, 20, 24, ..., 248

माना गुणजों की संख्या n है।

पहला पद $a = 12$, सार्वअन्तर $d = 16 - 12 = 4$

तब nवाँ पद $a_n = 248$

$\Rightarrow a + (n - 1)d = 248 \Rightarrow 12 + (n - 1)4 = 248$

$\Rightarrow 12 + 4n - 4 = 248 \Rightarrow 4n = 248 + 4 - 12 = 240$

$\therefore n = \frac{240}{4} = 60$

अत: 10 और 250 के बीच 4 के गुणजों की संख्या 60 है।

प्रश्न 15. n के किस मान के लिए, दोनों समान्तर श्रेढियों 63, 65, 67, ... और 3, 10, 17, ... के nवें पद बराबर होंगे ?

हल : पहली समान्तर श्रेढी 63, 65, 67, ...

प्रथम पद $a = 63$, सार्वअन्तर $d = 65 - 63 = 2$

$\therefore$ श्रेढी का nवाँ पद $a_n = a + (n - 1)d$

$= 63 + (n - 1)2 = 63 + 2n - 2 = 61 + 2n$

दूसरी समान्तर श्रेढी = 3, 10, 17, ...

प्रथम पद $a' = 3$, सार्वअन्तर $d' = 10 - 3 = 7$

इस श्रेढी का nवाँ पद $a_n' = a' + (n - 1)d'$

$= 3 + (n - 1)7 = 3 + 7n - 7 = 7n - 4$

प्रश्नानुसार, पहली A.P. का nवाँ पद= दूसरी A.P. का nवाँ पद

$\Rightarrow 61 + 2n = 7n - 4 \Rightarrow 2n - 7n = -4 - 61$

$\Rightarrow -5n = -65$

$\therefore n = \frac{-65}{-5} = 13$ **उत्तर**

प्रश्न 16. वह A.P. ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 16 है और 7वाँ पद 5वें पद से 12 अधिक है।

हल : माना कि A.P. का प्रथम पद a और सार्वअन्तर d है।

दिया है $a_3 = 16$

$a + (3 - 1)d = 16 \Rightarrow a + 2d = 16$ ...(1)

प्रश्न के अनुसार, $a_7 - a_5 = 12$

$[a + (7 - 1)d] - [a + (5 - 1)d] = 12$

$\Rightarrow a + 6d - a - 4d = 12 \Rightarrow 2d = 12$

$\therefore d = \frac{12}{2} = 6$

d का यह मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$a + 2(6) = 16$

$\therefore a = 16 - 12 = 4$

A.P. $= a, a + d, a + 2d,... = 4, 4 + 6, 4 + 2 \times 6,...$
$= 4, 10, 16,...$

अत: वाँछित A.P. है, 4, 10, 16, 22,... **उत्तर**

प्रश्न 17. A.P. : 3, 8, 13, ..., 253 में अन्तिम पद से 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : दी गई A.P. : 3, 8, 13, ..., 253

प्रथम पद $a = 3$; सार्वअन्तर $d = 8 - 3 = 5$

अन्तिम पद $a_n = 253$

समान्तर श्रेढी का nवाँ पद $a_n = a + (n - 1)d$

$\Rightarrow 253 = 3 + (n - 1) \times 5 \Rightarrow 253 = 3 + 5n - 5$

$\Rightarrow 5n = 253 + 2 \Rightarrow 5n = 255$

$\therefore n = \frac{255}{5} = 51$

समान्तर श्रेढी के अन्तिम पद से 20वाँ पद

= (पदों की संख्या) – 20 + 1 = 51 – 20 + 1 = 32वाँ पद

$\therefore$ A.P. के अन्तिम पद से 20वाँ पद = आरम्भ से 32वाँ पद

$\because \quad a_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow a_{32} = 3 + (32-1) \times 5 = 3 + 31 \times 5 = 3 + 155 = 158$

अत: A.P. के अन्तिम पद से 20वाँ पद = 158 **उत्तर**

द्वितीय विधि : यहाँ प्रथम पद $a = 3$, सार्वअन्तर $d = 8 - 3 = 5$

अन्तिम पद $a_n = 253$

सूत्र : अन्त से rवाँ पद $= a_n - (r-1)d$

अन्त से 20वाँ पद $= 253 - (20-1)5$

$= 253 - 19 \times 5$

$= 253 - 95 = 158$

अत: A.P. के अन्तिम पद से 20वाँ पद 158 है। **उत्तर**

प्रश्न 18. किसी A.P. के चौथे और 8वें पदों का योग 24 है तथा छठे और 10वें पदों का योग 44 है। इस A.P. के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।

हल : माना A.P. का प्रथम पद a और सार्वअन्तर d है।

$\because$ चौथा पद a_4 + 8वाँ पद $a_8 = 24$

$\Rightarrow [a + (4-1)d] + [a + (8-1)d] = 24$

$\Rightarrow a + 3d + a + 7d = 24 \Rightarrow 2a + 10d = 24$

$\Rightarrow a + 5d = 12$ ...(1)

$\because$ 6वाँ पद a_6 + दसवाँ पद $a_{10} = 44$

$\Rightarrow [a + (6-1)d] + [a + (10-1)d] = 44$

$\Rightarrow a + 5d + a + 9d = 44 \Rightarrow 2a + 14d = 44$

$\Rightarrow a + 7d = 22$ ...(2)

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर,

$(a + 7d) - (a + 5d) = 22 - 12$

$\Rightarrow a + 7d - a - 5d = 10 \Rightarrow 2d = 10 \Rightarrow d = 5$

d का मान समीकरण (1) में रखने पर, $a + 5 \times 5 = 12$

$\Rightarrow a + 25 = 12 \qquad \therefore a = -13$

अब श्रेढी का पहला पद $a = -13$

दूसरा पद $a_2 = a + d = -13 + 5 = -8$

तीसरा पद $a_3 = a_2 + d = -8 + 5 = -3$

अत: वांछित A.P. के प्रथम तीन पद = – 13, – 8, – 3 **उत्तर**

प्रश्न 19. सुब्बाराव ने 1995 में ₹ 5000 के मासिक वेतन पर कार्य आरम्भ किया और प्रत्येक वर्ष ₹ 200 की वेतन वृद्धि प्राप्त की। किस वर्ष में उसका वेतन ₹ 7000 हो गया ?

हल : पहले वर्ष में प्रारम्भिक वेतन = ₹ 5000 प्रति मास

दूसरे वर्ष में वेतन = ₹ 5000 + ₹ 200

= ₹ 5200 प्रति मास

तीसरे वर्ष में वेतन = ₹ 5200 + ₹ 200

= ₹ 5400 प्रति मास

इस प्रकार प्रत्येक वर्ष के वेतन (रु. में) 5000, 5200, 5400,..... एक समान्तर श्रेढी बनाते हैं,

जिसका प्रथम पद $a = 5000$ तथा सार्वअन्तर $d = 200$

माना द वर्ष बाद वेतन ₹ 7000 होगा।

तब nवाँ पद = 7000 $\Rightarrow a + (n-1)d = 7000$

$\Rightarrow 5000 + (n-1)200 = 7000$

$\Rightarrow (n-1) \times 200 = 7000 - 5000$

$\Rightarrow (n-1) \times 200 = 2000 \Rightarrow (n-1) = \frac{2000}{200} = 10$

$\therefore n = 10 + 1 = 11$

अत: 11वें वर्ष में अर्थात 2006 में सुब्बाराव का वेतन ₹ 7000 होगा। **उत्तर**

प्रश्न 20. रामकली ने किसी वर्ष के प्रथम सप्ताह में ₹ 50 की बचत की और फिर अपनी साप्ताहिक बचत ₹ 17.50 बताई गई। यदि n वें सप्ताह में उसकी साप्ताहिक बचत ₹ 207.50 हो जाती है, तो n ज्ञात कीजिए।

हल : माना प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है

प्रथम सप्ताह की बचत = ₹ 50

प्रति सप्ताह बचत में वृद्धि = ₹ 17.50

यह स्पष्ट है कि यह एक A.P. है

प्रथम पद $a = 50$, $d = 17.50$

nवें सप्ताह में उसकी बचत $a_n = 207.50$

$\because \quad a_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow 207.50 = 50 + (n-1) \times 17.50$

$\Rightarrow 207.50 = 50 + 17.50n - 17.50$

$\Rightarrow 17.50\, n = 207.50 - 50 + 17.50$

$\Rightarrow 17.50\, n = 175 \Rightarrow n = \frac{175}{17.50} \Rightarrow n = 10$

अत: 10वें सप्ताह में रामकली की बचत ₹ 207.50 **उत्तर**

प्रश्नावली 5.3

प्रश्न 1. निम्नलिखित समान्तर श्रेढियों का योग ज्ञात कीजिए : (i) 2, 7, 12, ..., 10 पदों तक।

(ii) – 37, – 33, – 29, ..., 12 पदों तक।

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, ... 100 पदों तक।

(iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$,...11 पदों तक।

हल : (i) दी गई समान्तर श्रेढी = 2, 7, 12, ... 10 पदों तक

प्रथम पद $a = 2$ तथा सार्वअन्तर $d = 7 - 2 = 5$

पदों की संख्या $n = 10$

n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\therefore \quad S_{10} = \frac{10}{5}[2 \times 2 + (10-1) \times 5]$

$= 5[4 + 9 \times 5] = 5[4 + 45] = 5 \times 49 = 245$

अत: 10 पदों तक योग = 245 **उत्तर**

(ii) दी गई समान्तर श्रेढी = – 37, – 33, – 29, ..., 12 पदों तक

प्रथम पद $a = -37$

तथा सार्वअन्तर $d = -33 - (-37) = 4$

और पदों की संख्या $n = 12$

$\because$ n पदों तक योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\therefore \quad S_{12} = \frac{12}{2}[2 \times (-37) + (12-1) \times 4]$

$= 6[-74 + 11 \times 4] = 6[-74 + 44]$

$= 6 \times (-30) = -180$

अत: 12 पदों तक योग = – 180 **उत्तर**

(iii) दी गई समान्तर श्रेढी = 0.6, 1.7, 2.8, ..., 100 पदों तक

प्रथम पद $a = 0.6$ सार्वअन्तर $d = 1.7 - 0.6 = 1.1$

और पदों की संख्या $n = 100$

n पदों का योगफल $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\therefore \quad S_{100} = \frac{100}{2}[2 \times 0.6 + (100-1) \times 1.1]$

$= 50[1.2 + 99 \times 1.1] = 50[1.2 + 108.9]$

$= 50 \times 110.1 = 5505$

अत: 100 पदों तक योग = 5505 **उत्तर**

(iv) दी गई समान्तर श्रेढी = $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, ..., 11$ पदों तक

प्रथम पद $a = \frac{1}{15}$; सार्वअन्तर $d = \frac{1}{12} - \frac{1}{15}$

$= \frac{15-12}{180} = \frac{3}{180} = \frac{1}{60}$

पदों की संख्या $n = 11$

$\because$ n पदों का योगफल $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\therefore \quad S_{11} = \frac{11}{2}\left[2 \times \frac{1}{15} + (11-1) \times \frac{1}{60}\right]$

$= \frac{11}{2}\left[\frac{2}{15} + 10 \times \frac{1}{60}\right] = \frac{11}{2}\left[\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\right]$

$= \frac{11}{2}\left[\frac{12+15}{90}\right] = \frac{11}{2} \times \frac{27}{90} = \frac{11}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{33}{20}$

अत: श्रेढी के 11 पदों का योग = $\frac{33}{20}$ **उत्तर**

प्रश्न 2. नीचे दिए हुए योगफलों को ज्ञात कीजिए :

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + ... + 84$

(ii) $34 + 32 + 30 + ... + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + ... + (-230)$

हल : (i) दिया गया है, $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + ... + 84$

स्पष्ट हैं कि यह एक समान्तर श्रेढी है।

यहाँ प्रथम पद $a = 7$; सार्वअन्तर $d = 10\frac{1}{2} - 7$

$= \frac{21}{2} - 7 = \frac{21-14}{2} = \frac{7}{2}$

दिया है, nवाँ पद $a_n = 84$

$a + (n-1)d = 84 \Rightarrow 7 + (n-1)\frac{7}{2} = 84$

हल करने पर,

$\therefore \quad n = 22 + 1 = 23$

$\therefore$ अनुक्रम में 23 पद हैं।

सूत्र : $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ से

$\therefore$ 23 पदों का योगफल

$\Rightarrow S_{23} = \frac{23}{2}(7 + 84) = \frac{23}{2} \times 91 = \frac{2093}{2} = 1046\frac{1}{2}$

अत: $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + ... + 84 = 1046\frac{1}{2}$ **उत्तर**

(ii) दिया गया है : 34 + 32 + 30 + ... + 10

स्पष्ट है कि यह एक समान्तर श्रेढी है।

यहाँ प्रथम पद $a = 34$ और सार्वअन्तर $d = 32 - 34 = -2$

यदि अनुक्रम में पदों की संख्या n हो, तो

nवाँ पद $a_n = 10 \Rightarrow a + (n-1)d = 10$

$\Rightarrow 34 + (n-1) \times (-2) = 10$

$\Rightarrow (n-1) \times (-2) = 10 - 34 = -24$

$\Rightarrow (n-1) = \frac{-24}{-2} = 12 \Rightarrow n = 13$

$\therefore$ अनुक्रम में कुल 13 पद हैं।

सूत्र : $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

13 पदों का योग $S_{13} = \frac{13}{2}(34 + 10) = \frac{13}{2} \times 44 = 286$

अत: $34 + 32 + 30 + ... + 10 = 286$ **उत्तर**

(iii) दिया गया है : $-5 + (-8) + (-11) + ... + (-230)$

स्पष्ट है कि यह एक समान्तर श्रेढी है।

प्रथम पद $a = -5$ तथा सार्वअन्तर $d = (-8) - (-5)$
$= -8 + 5 = -3$

यदि अनुक्रम में पदों की संख्या n हो, तो

अनुक्रम का n वाँ पद $a_n = -230$

$\Rightarrow a + (n-1)d = -230 \Rightarrow -5 + (n-1) \times -3 = -230$

हल करने पर,

$\therefore \quad n = 76$

तब n पदों तक योगफल $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$\therefore$ 76 पदों तक योगफल $S_{76} = \frac{76}{2}[-5 + (-230)]$

$= \frac{76}{2} \times (-235) = 38 \times (-235) = -8930$

अत: $-5 + (-8) + (-11) + ... + (-230)$
$= -8930$ **उत्तर**

प्रश्न 3. एक A.P. में,

(i) $a = 5, d = 3$ और $a_n = 50$ दिया है। n और S_n ज्ञात कीजिए।

(ii) $a = 7$ और $a_{13} = 35$ दिया है। d और S_{13} ज्ञात कीजिए।

(iii) $a_{12} = 37$ और $d = 3$ दिया है। a और S_{12} ज्ञात कीजिए।

(iv) $a_3 = 15$ और $S_{10} = 125$ दिया है। d और a_{10} ज्ञात कीजिए।

(v) $d = 5$ और $S_9 = 75$ दिया है। a और a_9 ज्ञात कीजिए।

(vi) $a = 2, d = 8$ और $S_n = 90$ दिया है। n और a_n ज्ञात कीजिए।

(vii) $a = 8, a_n = 62$ और $S_n = 210$ दिया है। n और d ज्ञात कीजिए।

(viii) $a_n = 4, d = 2$ और $S_n = -14$ दिया है। n और a ज्ञात कीजिए।

(ix) $a = 3, n = 8$ और $S_n = 192$ दिया है। d ज्ञात कीजिए।

(x) $l = 28, S_n = 144$ और कुल 9 पद हैं। a ज्ञात कीजिए।

हल : (i) दिया गया है,

$a = 5, d = 3$ और अन्तिम पद $(a_n) = 50$

$\because$ अनुक्रम A.P. है और $a_n = 50$

$\Rightarrow a + (n-1)d = 50 \Rightarrow 5 + (n-1)3 = 50$

$\Rightarrow 5 + 3n - 3 = 50 \Rightarrow 3n = 50 + 3 - 5$

$\Rightarrow 3n = 48$

$\therefore \quad n = \frac{48}{3} = 16$

अब $S_n = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{16}{2}(5+50) = 8 \times 55 = 440$

अत: $n = 16$ तथा $S_n = 440$ **उत्तर**

(ii) दिया है : $a = 7, a_{13} = 35$

$a + (n-1)d = 35$

$\Rightarrow 7 + (13-1)d = 35 \Rightarrow 12d = 35 - 7 = 28$

$\Rightarrow d = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$ सूत्र : $S_n = \frac{n}{2}[a+l]$ से

अब $S_{13} = \frac{13}{2}[7+35]$

$\Rightarrow \quad S_{13} = \frac{13}{2} \times 42 = 13 \times 21 = 273$

अत: $d = \frac{7}{3}$ तथा $S_{13} = 273$ **उत्तर**

(iii) दिया है : $a_{12} = 37, d = 3$

$\because \quad a_{12} = 37$

$a + (n-1)d = 37 \Rightarrow a + (12-1)3 = 37$

$\Rightarrow a = 37 - 33 = 4$

अब $S_{12} = \frac{12}{2}[4+37]$ $\left[\because S_n = \frac{n}{2}[a+l] \text{ से}\right]$

$S_{12} = 6 \times 41 = 246$

अत: $a = 4$ तथा $S_{12} = 246$ **उत्तर**

(iv) दिया है : $a_3 = 15, S_{10} = 125$

$\because \quad a_3 = 15$

$\Rightarrow a + (3-1)d = 15 \Rightarrow a + 2d = 15$ ...(1)

$\because$ दिया है $S_{10} = 125$

$\frac{10}{2}[2a + (10-1)d] = 125 \Rightarrow 5[2a + 9d] = 125$

$\Rightarrow \quad 2a + 9d = \frac{125}{5}$

$\Rightarrow \quad 2a + 9d = 25$ ...(2)

समीकरण (1) से, $a = 15 - 2d$ ...(3)

a का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$2(15 - 2d) + 9d = 25 \Rightarrow 30 - 4d + 9d = 25$

$\Rightarrow 5d = 25 - 30 \qquad \therefore d = \frac{-5}{5} = -1$

d का मान समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर,

$a = 15 - 2(-1) \Rightarrow a = 15 + 2 = 17$

अब $a_{10} = 17 + (10 - 1)(-1) \quad [\because a_n = a + (n-1)d]$

$= 17 - 9 = 8$

अत: $d = -1$ और $a_{10} = 8$ **उत्तर**

(v) दिया है : $d = 5$ और $S_9 = 75$

$\because S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\therefore S_9 = \frac{9}{2}[2a + (9-1)5] \Rightarrow 75 = \frac{9}{2}[2a + 8 \times 5]$

$[\because S_9 = 75]$

$\Rightarrow \frac{75 \times 2}{9} = 2a + 40 \Rightarrow \frac{50}{3} - 40 = 2a$

$\Rightarrow 2a = \frac{50 - 120}{3} \Rightarrow a = -\frac{70}{2 \times 3}$

$\Rightarrow a = -\frac{35}{3}$ अब $a_9 = a + (9 - 1)d$

$= \frac{-35}{3} + 8 \times 5 = -\frac{35}{3} + 40 = \frac{-35 + 120}{3} = \frac{85}{3}$

अत: $a = -\frac{35}{3}$ और $a_9 = \frac{85}{3}$ **उत्तर**

(vi) दिया है : $a = 2, d = 8$ और $S_n = 90$

$\because S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \Rightarrow 90 = \frac{n}{2}[2 \times 2 + (n-1)8]$

हल करने पर, $\Rightarrow n = 5$ या $-\frac{9}{2}$

$\because n$ का मान सदैव धन पूर्णांक होता है।

$\therefore n = 5$ तब $a_5 = a + (5 - 1)d$

$= 2 + 4 \times 8 = 2 + 32 = 34$

अत: $n = 5$ तथा $a_n = 34$ **उत्तर**

(vii) दिया है : $a = 8, a_n = 62$ और $S_n = 210$

$\because S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$

$\Rightarrow 210 = \frac{n}{2}(8 + 62) \Rightarrow 210 = \frac{n}{2} \times 70$

$\Rightarrow n = \frac{210 \times 2}{70} = 6 \qquad \ldots a_n = 62$

$\Rightarrow a + (n - 1)d = 62 \Rightarrow 8 + (6 - 1)d = 62$

$\Rightarrow 8 + 5d = 62 \Rightarrow 5d = 62 - 8 = 54$

$\Rightarrow d = \frac{54}{5}$ अत: $n = 6$ तथा $d = \frac{54}{5}$ **उत्तर**

(viii) दिया है : $a_n = 4, d = 2$ और $S_n = -14$

$\because a_n = 4 \Rightarrow a + (n-1)d = 4$

$\Rightarrow a + (n-1)2 = 4 \Rightarrow a + 2n - 2 = 4$

$\Rightarrow a + 2n = 6$ ...(1)

$\ldots S_n = -14 \Rightarrow \frac{n}{2}[2a + (n-1)2] = -14$

$\Rightarrow n[a + n - 1] = -14$ ...(2)

समीकरण (1) से, $a = 6 - 2n$ समीकरण (2) में a के स्थान पर $(6 - 2n)$ रखने पर, $n[6 - 2n + n - 1] = -14$

हल करने पर, $\Rightarrow n = 7$ या $n = -2$

n का मान सदैव धनपूर्णांक होता है। इसलिए $n = 7$

तब $a = 6 - 2n = 6 - (2 \times 7) = 6 - 14 = -8$

अत: $a = -8$ तथा $n = 7$ **उत्तर**

(ix) $a = 3, n = 8$ और $S_n = 192$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

परन्तु $S_n = 192 \Rightarrow \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = 192$

$\Rightarrow \frac{8}{2}[2 \times 3 + (8-1)d] = 192 \Rightarrow 4[6 + 7d] = 192$

$\Rightarrow 24 + 28d = 192 \Rightarrow 28d = 192 - 24 = 168$

$\therefore d = \frac{168}{28} = 6$ अत: $d = 6$ **उत्तर**

(x) दिया है : $l = 28, S_n = 144$ और कुल पद $n = 9$

हम जानते हैं कि $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

$\Rightarrow 144 = \frac{9}{2}[a+28] \Rightarrow 288 = 9[a+28]$

$\Rightarrow 288 = 9a + 252 \Rightarrow 9a = 288 - 252 \Rightarrow 9a = 36$

$\therefore a = 4$ अत: $a = 4$ **उत्तर**

प्रश्न 4. 636 योग प्राप्त करने के लिए A.P. : 9, 17, 25, ... के कितने पद लेने चाहिए ?

हल : दी गई A.P. : 9, 17, 25, ...

प्रथम पद $a = 9$, सार्वअन्तर $d = 17 - 9 = 8$

माना पदों की संख्या n है।

$S_n = 636 \Rightarrow \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = 636$

$\Rightarrow \frac{n}{2}[2\times 9+(n-1)8] = 636$

हल करने पर, $\Rightarrow n - 12 = 0$ या $4n + 53 = 0$

$\Rightarrow n = 12$ या $-\frac{53}{4}$

$\because n$ ऋणात्मक नहीं हो सकता।

अत: $n = -\frac{53}{4}$ को छोड़ देते हैं।

$\therefore n = 12$

अत: दी गई A.P. के 12 पदों का योग 636 है। **उत्तर**

प्रश्न 5. किसी A.P. का प्रथम पद 5, अन्तिम पद 45 और योग 400 है। पदों की संख्या और सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, प्रथम पद $a = 5$,

अन्तिम पद $l = a_n = 45$ और $S_n = 400$

$\because a_n = 45$

$a + (n-1)d = 45 \Rightarrow 5 + (n-1)d = 45$

$\Rightarrow (n-1)d = 40$ ...(1)

और $S_n = 400$

$\frac{n}{2}[a+l] = 400 \Rightarrow \frac{n}{2}[5+45] = 400$

$\Rightarrow 25n = 400$

$\therefore n = \frac{400}{25} = 16$

n का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$(16-1)d = 40 \Rightarrow 15d = 40$

$\therefore d = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$ अत: $n = 16$ और $d = \frac{8}{3}$ **उत्तर**

प्रश्न 6. किसी A.P. के प्रथम और अन्तिम पद क्रमशः 17 और 350 हैं। यदि सार्वअन्तर 9 है, तो इसमें कितने पद हैं और इनका योग क्या है ?

हल : दिया है, प्रथम पद $a = 17$

अन्तिम पद $l = a_n = 350$ और सार्वअन्तर $d = 9$

$\because a_n = 350$

$a + (n-1)d = 350 \Rightarrow 17 + (n-1)9 = 350$

$\Rightarrow 9(n-1) = 350 - 17 = 333 \Rightarrow n - 1 = \frac{333}{9} = 37$

$\therefore n = 37 + 1 = 38$

अब $S_n = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{38}{2}(17+350) = 19\times 367 = 6973$

अत: $n = 38$ और पदों का योग $(S_n) = 6973$ **उत्तर**

प्रश्न 7. उस A.P. के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसमें $d = 7$ है और 22वाँ पद 149 है।

हल : $d = 7, n = 22$

$\because$ 22वाँ पद $a_{22} = 149$

$\Rightarrow a + (22-1)d = 149 \Rightarrow a + 21 \times 7 = 149$

$\Rightarrow a + 147 = 149$ $\therefore a = 149 - 147 = 2$

तब प्रथम 22 पदों का योग

$S_{22} = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{22}{2}(2+149) = 11 \times 151 = 1661$

अत: दी गई A.P. के प्रथम 22 पदों का योग = 1661 **उत्तर**

प्रश्न 8. उस A.P. के प्रथम 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसके दूसरे और तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 हैं।

हल : A.P. का दूसरा पद $a_2 = 14$ तथा तीसरा पद $a_3 = 18$

$\therefore$ सार्वअन्तर $d = a_3 - a_2 = 18 - 14 = 4$

$\because$ दूसरा पद = 14

$\therefore a + d = 14 \Rightarrow a + 4 = 14 \Rightarrow a = 14 - 4 = 10$

$\because a = 10, d = 4$

तब n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$\therefore S_{51} = \frac{51}{2}[2\times 10+(51-1)4]$

$= \frac{51}{2}[20+50\times 4] = \frac{51}{2}[20+200]$

$= \frac{51}{2}\times 220 = 51 \times 110 = 5610$

अत: दी गई A.P. के प्रथम 51 पदों का योग = 5610 **उत्तर**

प्रश्न 9. यदि किसी A.P. के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो इसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : माना A.P. का पहला पद a तथा सार्वअन्तर d है।

$\because$ प्रथम 7 पदों का योग $S_7 = 49$

$\Rightarrow \frac{7}{2}[2a+(7-1)d] = 49 \Rightarrow \frac{7}{2}[2a+6d] = 49$

$\Rightarrow 7(a + 3d) = 49 \Rightarrow a + 3d = \frac{49}{7} = 7$

$\Rightarrow a = 7 - 3d$ ...(1)

दूसरी शर्त के अनुसार, $S_{17} = 289$

$\Rightarrow \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = 289$

$\Rightarrow \frac{17}{2}[2a+(17-1)d] = 289$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[2a+16d] = \frac{289}{17} \Rightarrow a + 8d = 17$

a का मान समीकरण (1) से प्रतिस्थापित करने पर,

$7 - 3d + 8d = 17 \Rightarrow 5d = 17 - 7 = 10$

$\therefore \quad d = \frac{10}{5} = 2$

d का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$a = 7 - 3 \times 2 = 7 - 6 = 1$

अब $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = \frac{n}{2}[2\times1+(n-1)\times2]$

$= \frac{n}{2}[2+2n-2] = \frac{n}{2}\times[2n] = n \times n = n^2$

अतः दी गई A.P. के प्रथम n पदों का योग n^2 है। **उत्तर**

प्रश्न 10. दर्शाइए कि $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ से एक A.P. बनती है, यदि a_n नीचे दिए अनुसार परिभाषित है :

(i) $a_n = 3 + 4n$, (ii) $a_n = 9 - 5n$

साथ ही, प्रत्येक स्थिति में, प्रथम 15 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : (i) दिया है, $a_n = 3 + 4n$ ...(1)

n के विभिन्न मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$a_1 = 3 + 4(1) = 7$

$a_2 = 3 + 4(2) = 11$

$a_3 = 3 + 4(3) = 15, ...$

सार्वअन्तर $(d) = a_2 - a_1 = 11 - 7 = 4$

$a_3 - a_2 = 15 - 11 = 4$

$\because \quad a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 4$

अतः अनुक्रम 7, 11, 15, ... है।

और दिया गया अनुक्रम A.P. है।

यहाँ $a = 7$, $d = 4$ और $n = 15$

$\because \quad S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$\therefore \quad S_{15} = \frac{15}{2}[2(7)+(15-1)4] = \frac{15}{2}[14+56]$

$= \frac{15}{2}\times 70 = 15 \times 35 = 525$

(ii) दिया है कि $a_n = 9 - 5n$...(1)

n के विभिन्न मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$a_1 = 9 - 5(1) = 4$; $a_2 = 9 - 5(2) = -1$

$a_3 = 9 - 5(3) = -6$

सार्वअन्तर $(d) = a_2 - a_1 = -1 - 4 = -5$

और $a_3 - a_2 = -6 + 1 = -5$

$\because \quad a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = -5$

अतः अनुक्रम 4, – 1, – 6, ... है और दिया गया अनुक्रम A.P. है। यहाँ $a = 4$, $d = -5$ और $n = 15$

तब प्रथम 15 पदों का योगफल ज्ञात करना है।

$\because \quad S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$\therefore \quad S_{15} = \frac{15}{2}[2\times4+(15-1)\times(-5)]$

$= \frac{15}{2}[8+14\times(-5)] = \frac{15}{2}[8-70]$

$= \frac{15}{2}\times(-62) = 15 \times (-31) = -465$

अतः $S_{15} = -465$ **उत्तर**

प्रश्न 11. यदि किसी A.P. के प्रथम n पदों का योग $4n - n^2$ है, तो इसका प्रथम पद (अर्थात् S_1) क्या है ? प्रथम दो पदों का योग क्या है ? दूसरा पद क्या है ? इसी प्रकार, तीसरे, 10वें और nवें पद ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ A.P. के प्रथम n पदों का योगफल

$S_n = 4n - n^2$

$n = 1$ रखने पर, $S_1 = 4 \times 1 - 1^2 = 3$

$\therefore$ प्रथम पद $a_1 = S_1 = 3$

$n = 2$ रखने पर, $S_2 = 4 \times 2 - 2^2 = 8 - 4 = 4$

द्वितीय पद $a_2 = S_2 - S_1 = 4 - 3 = 1$

$n = 3$ रखने पर, $S_3 = 4 \times 3 - 3^2 = 12 - 9 = 3$

$\therefore$ तीसरा पद $a_3 = S_3 - S_2 = 3 - 4 = -1$ $[\because a_n = S_n - S_{n-1}]$

$n = 9$ रखने पर, $S_9 = 4 \times 9 - 9^2 = 36 - 81 = -45$

$\therefore$ 10 रखने पर, $S_{10} = 4 \times 10 - 10^2 = 40 - 100 = -60$

$n = 10$वाँ पद $a_{10} = S_{10} - S_9 = -60 - (-45)$
$= -60 + 45 = -15$

$\because\ S_n = 4n - n^2$ और $S_{n-1} = 4(n-1) - (n-1)^2$
$= (n-1)\{4 - n + 1\} = (n-1)(5-n)$
$= 5n - n^2 - 5 + n = 6n - n^2 - 5$
अब $a_n = S_n - S_{n-1} = (4n - n^2) - (6n - n^2 - 5)$
$= 4n - n^2 - 6n + n^2 + 5 = 5 - 2n$
अत: $S_1 = 3$
प्रथम दो पदों का योग $S_2 = 4$, दूसरा पद $a_2 = 1$
तीसरा पद $a_3 = -1$; 10वाँ पद $a_{10} = -15$
तथा nवाँ पद $a_n = 5 - 2n$ **उत्तर**

प्रश्न 12. ऐसे प्रथम 40 धन पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए जो 6 से विभाज्य हैं।

हल : 6 से विभाज्य धन पूर्णांकों की सूची :
6, 12, 18, 24, 30, .., 40 पदों तक
प्रथम पद $a = 6$ तथा सार्वअन्तर $d = 12 - 6 = 6$, $n = 40$
... प्रथम n पदों का योगफल $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\therefore$ प्रथम 40 पदों का योगफल

$$S_{40} = \frac{40}{2}[2\times6 + (40-1)6] = 20[12 + 39 \times 6]$$
$$= 20[12 + 234] = 20 \times 246 = 4920$$

अत: 6 से विभाज्य प्रथम 40 धन पूर्णांकों का योग = 4920

प्रश्न 13. 8 के प्रथम 15 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : 8 के प्रथम 15 गुणजों की सूची :
8, 16, 24, 32,..., 15 पदों तक

$$\therefore \quad S = 8 + 16 + 24 + 32 + ... + 120$$
$$= 8[1 + 2 + 3 + 4 + ... + 15] = 8\left[\frac{15}{2}(1+15)\right]$$
$$= 8\left[\frac{15}{2}\times16\right] = 8 \times 120 = 960$$

अत: 8 के प्रथम 15 गुणजों का योगफल = 960 **उत्तर**

प्रश्न 14. 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

हल : 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं की सूची :
1, 3, 5, 7, ..., 49
प्रथम पद $a = 1$, सार्वअन्तर $d = 3 - 1 = 2$, $a_n = 49$

$$\because \quad a_n = 49$$
$$\therefore\ a + (n-1)d = 49 \Rightarrow 1 + (n-1)2 = 49$$
$$\Rightarrow (n-1)2 = 48 \Rightarrow (n-1) = 24$$
$$\therefore\ n = 25$$

A.P. : 1, 3, 5, 7, ... का 25 पदों तक योगफल

$$\because \quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$S_{25} = \frac{25}{2}[2\times1 + (25-1)\times2] = \frac{25}{2}[2 + 24\times2]$$
$$= \frac{25}{2}[2 + 48] = \frac{25}{2}\times50 = 625$$

अत: 0 और 50 के बीच विषम संख्याओं का योगफल = 625

प्रश्न 15. निर्माण कार्य से सम्बन्धित किसी ठेके में, एक निश्चित तिथि के बाद कार्य को विलम्ब से पूरा करने के लिए, जुर्माना लगाने का प्रावधान इस प्रकार है : पहले दिन के लिए ₹ 200, दूसरे दिन के लिए ₹ 250, तीसरे दिन के लिए ₹ 300, इत्यादि, अर्थात् प्रत्येक उत्तरोत्तर दिन का जुर्माना अपने से ठीक पहले दिन के जुर्माने से ₹ 50 अधिक है। एक ठेकेदार को जुर्माने के रूप में कितनी राशि अदा करनी पड़ेगी, यदि वह इस कार्य में 30 दिन का विलम्ब कर देता है ?

हल : दिया है, पहले, दूसरे और तीसरे दिन के विलम्ब के लिए जुर्माना है— ₹ 200, ₹ 250, ₹ 300
अब, जुर्माना अगले दिन ₹ 50 के अन्तर से बढ़ता जाता है :
$\therefore$ ₹ 200, ₹ 250, ₹ 300, ₹ 350,.... यह एक समान्तर श्रेढी है।
प्रथम पद $a = 200$; $d = 50$ और $n = 30$
30 दिन के पश्चात् दी जाने वाली जुर्माने की राशि = S_{30}

$$\because \quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$S_{30} = \frac{30}{2}[2(200) + (30-1)50]$$
$$= 15[400 + 1450] = 15(1850) = 27750$$

अत: यदि ठेकेदार कार्य में 30 दिन विलम्ब करता है, तो उसे जुर्माने के रूप में ₹ 27,750 देने होंगे। **उत्तर**

प्रश्न 16. किसी स्कूल के विद्यार्थियों को उनके समग्र शैक्षिक प्रदर्शन के लिए 7 नकद पुरस्कार देने के लिए ₹ 700 की राशि रखी गई है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले पुरस्कार से ₹ 20 कम है, तो प्रत्येक पुरस्कार का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना पहला पुरस्कार ₹ a है।

$\therefore$ दूसरा पुरस्कार a_2 = ₹ $(a - 20)$

तीसरा पुरस्कार a_3 = ₹ $a - 20 - 20$

= ₹ $(a - 40)$

$\therefore$ समान्तर श्रेढी $a, (a - 20), (a - 40), ...$ है।

यहाँ प्रथम पद $= a$, सार्वअन्तर $d = (a - 20) - a = -20$

पदों की संख्या $n = 7$ तथा 7 पदों का योगफल $S_7 = 700$

तब, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\Rightarrow S_7 = \frac{7}{2}[2a + (7-1)(-20)]$

$\Rightarrow 700 = \frac{7}{2}[2a + 6(-20)] \Rightarrow 700 = \frac{7}{2}[2a - 120]$

$\Rightarrow 700 = \frac{7}{2}2(a - 60) \Rightarrow \frac{700}{7} = a - 60$

$\Rightarrow a = 100 + 60 = 160$

पहला पुरस्कार = ₹ 160 शेष पुरस्कार क्रम से ₹ 20-20 कम हैं। अत: पुरस्कार ₹ 160, ₹ 140, ₹ 120, ₹ 100, ₹ 80, ₹ 60, ₹ 40 हैं। **उत्तर**

प्रश्न 17. एक स्कूल के विद्यार्थियों ने वायु प्रदूषण कम करने के लिए स्कूल के अन्दर और बाहर पेड़ लगाने के बारे में सोचा। यह निर्णय लिया गया कि प्रत्येक कक्षा का प्रत्येक अनुभाग अपनी कक्षा की संख्या के बराबर पेड़ लगाएगा। उदाहरणार्थ, कक्षा I का एक अनुभाग 1 पेड़ लगाएगा, कक्षा II का एक अनुभाग 2 पेड़ लगाएगा, कक्षा III का एक अनुभाग 3 पेड़ लगाएगा, इत्यादि और ऐसा कक्षा XII तक के लिए चलता रहेगा। प्रत्येक कक्षा के तीन अनुभाग हैं। इस स्कूल के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या कितनी होगी ?

हल : प्रत्येक कक्षा में तीन अनुभाग हैं।

कक्षा I द्वारा लगाए गए कुल पेड़ $= 3 \times 1 = 3$

कक्षा II द्वारा लगाए गए कुल पेड़ $= 3 \times 2 = 6$

कक्षा III द्वारा लगाए गए कुल पेड़ $= 3 \times 3 = 9$

कक्षा IV द्वारा लगाए गए कुल पेड़ $= 3 \times 4 = 12$

....

....

तब 3, 6, 9, 12, ... एक समान्तर श्रेढी बनती है।

यहाँ $a = 3$, सार्वअन्तर $d = 6 - 3 = 3$

तब कक्षा XII तक के कुल विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए पेड़ों का योगफल $= S_{12}$

$\because \quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

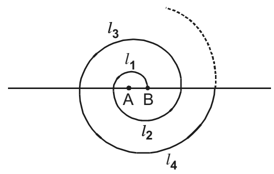
$\therefore \quad S_{12} = \frac{12}{2}[2 \times 3 + (12-1) \times 3]$

$= 6[6 + 33] = 6 \times 39 = 234$

अत: वायु प्रदूषण को रोकने के लिए विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए पेड़ों की संख्या 234 होगी। **उत्तर**

प्रश्न 18. केन्द्र A से प्रारम्भ करते हुए, बारी-बारी से केन्द्रों A और B को लेते हुए, त्रिज्याओं 0.5 cm, 1.0 cm, 1.5 cm, 2.0 cm,... वाले उत्तरोत्तर अर्धवृत्तों को खींचकर एक सर्पिल (Spiral) बनाया गया है, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। 13 क्रमागत अर्धवृत्तों से बने इस सर्पिल की कुल लम्बाई क्या है ? $\left(\text{लीजिए } \pi = \frac{22}{7}\right)$

हल :



पहले अर्धवृत्त की त्रिज्या $r_1 = 0.5$ सेमी

दूसरे अर्धवृत्त की त्रिज्या $r_2 = 1.0$ सेमी

तीसरे अर्धवृत्त की त्रिज्या $r_3 = 1.5$ सेमी

चौथे अर्धवृत्त की त्रिज्या $r_4 = 2.0$ सेमी

....

....

13वें अर्धवृत्त की त्रिज्या $r_{13} = ?$

प्रथम पद $(r_1) = r = 0.5$ सेमी

सार्वअन्तर $d = 1.0 - 0.5 = 0.5$ सेमी

पदों की संख्या $n = 13$

$\therefore \quad r_{13} = r + (n-1)d = 0.5 + (13 - 1) \times 0.5$

$= 0.5 + 12 \times 0.5 = 0.5 + 6.0 = 6.5 = 6.5$ सेमी

इन अर्धवृत्तों की वृत्तीय परिधियाँ : $\pi r_1, \pi r_2, \pi r_3, ..., \pi r_{13}$

$\therefore$ 13 क्रमागत अर्धवृत्तों से बने सर्पिल की लम्बाई

$= \pi r_1 + \pi r_2 + \pi r_3 + \pi r_4 + ... + \pi r_{13}$

$= \pi[r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + ... + r_{13}]$

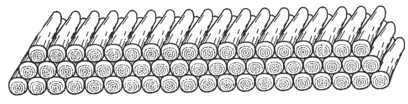
$= \pi[0.5 + 1.0 + 1.5 + 2.0 + ... + 6.5]$

$= \pi\left[\frac{13}{2}(0.5 + 6.5)\right] \quad \left[\text{सूत्र } S_n = \frac{n}{2}[a + l] \text{ से}\right]$

$$= \pi\left[\frac{13}{2}\times 7.0\right] = \frac{22}{7}\times\frac{13}{2}\times 7 = 143$$

अत: सर्पिल की लम्बाई = 143 सेमी **उत्तर**

प्रश्न 19. 200 लट्ठों (logs) कोणेरी के रूप में इस प्रकार रखा जाता है : सबसे नीचे वाली पंक्ति में 20 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 19 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 18 लट्ठे, इत्यादि (देखिए आकृति)। ये 200 लट्ठे कितनी पंक्तियों में रखे गए हैं तथा सबसे ऊपरी पंक्ति में कितने लट्ठे हैं?



हल : यहाँ $S_n = 200, a_1 = 20, a_2 = 19, a_3 = 18$
$d = 19 - 20 = 18 - 19 = -1$

माना पंक्तियों की संख्या = n

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1) \times d]$$

$$200 = \frac{n}{2}[2 \times 20 + (n-1) \times -1]$$

हल करने पर,

$\therefore n = 25$ या $n = 16$

अत: पंक्तियों की संख्या 25 या 16 होगी।

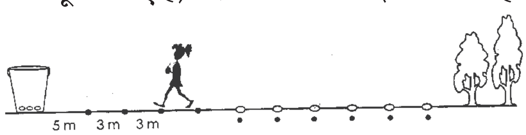
$a_{25} = a + (n-1)d = 20 + (24) \times (-1) = -4,$

जो कि सम्भव नहीं है।

$a_{16} = a + (n-1)d = 20 + 15 \times (-1) = 5$

अत: 16 पंक्तियाँ हैं तथा सबसे ऊपरी पंक्ति में 5 लट्ठे रखे गये हैं। **उत्तर**

प्रश्न 20. एक आलू दौड़ (potato race) में, प्रारम्भिक स्थान पर एक बाल्टी रखी हुई है, जो पहले आलू से 5 मीटर की दूरी पर है तथा अन्य आलुओं को एक सीधी रेखा में परस्पर 3 मीटर की दूरियों पर रखा गया है। इस रेखा पर 10 आलू रखे गए हैं, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।



प्रत्येक प्रतियोगी बाल्टी से चलना प्रारम्भ करती है, निकटतम आलू को उठाती है, उसे लेकर वापस आकर दौड़कर बाल्टी में डालती है, दूसरा आलू उठाने के लिए वापस दौड़ती है, उसे उठाकर वापस बाल्टी में डालती है, और वह ऐसा तब तक करती रहती है, जब तक सभी आलू बाल्टी में न आ जाएँ। इसमें प्रतियोगी को कुल कितनी दूरी दौड़नी पड़ेगी ?

हल : पहले आलू की बाल्टी से दूरी = 5 मीटर

दूसरे आलू की बाल्टी से दूरी = (5 + 3) = 8 मीटर

तीसरे आलू की बाल्टी से दूरी = (8 + 3) = 11 मीटर

चौथे आलू की बाल्टी से दूरी = (11 + 3) = 14 मीटर

$\because$ एक बार बाल्टी से चलकर आलू को उठाना पड़ता है और उसे फिर बाल्टी में वापस डालना पड़ता है।

$\therefore$ पहला आलू उठाने के लिए तय की गई दूरी
= 2 × 5 = 10 मीटर

उत्तरोत्तर आलुओं के बीच की दूरी = 3 मीटर

$\therefore$ दूसरा आलू उठाने के लिए तय की गई दूरी
= 2 × 8 = 16 मीटर

तीसरा आलू उठाने के लिए तय की गई दूरी
= 2 × 11 = 22 मीटर

चौथा आलू उठाने के लिए तय की गई दूरी
= 2 × 14 = 28 मीटर

और यह प्रक्रिया चलती रहती है। इससे स्पष्ट है कि यह स्थिति एक A.P. बन जाती है।

10 मी., 16 मी., 22 मी., 28 मी.,...... 10 पदों तक

$\therefore a = 10;\ d = 16 - 10 = 6;\ n = 10$

प्रतियोगी को कुल दूरी दौड़नी पड़ेगी = S_{10}

$$\because S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[2\times 10 + (10-1)\times 6]$$

= 5[20 + 9 × 6] = 5[20 + 54] = 5 × 74 = 370 मीटर

अत: प्रतियोगी द्वारा चली दूरी = 370 मीटर **उत्तर**

प्रश्नावली 5.4 (ऐच्छिक *)

[यह प्रश्नावली परीक्षा की दृष्टि से नहीं है। अत: इसे छात्र अभ्यास हेतु स्वयं करें।]

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. समान्तर श्रेणी 7, 5, 3, 1, – 1, – 3, ... का सार्व. अन्तर ज्ञात कीजिये।

हल : सार्वअन्तर = 5 – 7 = – 2.

प्रश्न 2. समान्तर श्रेणी $\frac{1}{a}, \frac{3-a}{3a}, \frac{3-2a}{3a}$ $(a \neq 0)$ के लिए सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।

हल : सार्वअन्तर $d = a_2 - a_1 \; \frac{(3-a)}{3a} - \frac{1}{a}$

प्रश्न 3. निम्न सूत्रों से परिभाषित अनुक्रमों के पहले तीन पदों को लिखिए—

(i) $a_n = 3n + 2$ (ii) $a_n = n^2 + 1$

संकेत : (i) $a_n = 3n + 2$ ($n = 1, 2, 3$ रखने पर)

$a_1 = 5, a_2 = 8, a_3 = 11$

(ii) $a_n = n^2 + 1$

$a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 10$

प्रश्न 4. यदि $a_n = 9 - 5n$ एक समान्तर श्रेणी (A.P.) का nवाँ पद है, तो सार्वअन्तर लिखिए।

संकेत : $d = a_2 - a_1$

प्रश्न 5. यदि एक समान्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पद $\frac{4}{5}$, a, 2 है, तो a का मान लिखिए।

संकेत : सामन्तर श्रेणी में $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

$$a - \frac{4}{5} = 2 - a$$

प्रश्न 6. समान्तर श्रेणी 7, 4, 1, – 2, ... का 26वाँ पद लिखिए।

संकेत : 26वाँ पद : $a_{26} = a + 25d$

प्रश्न 7. A.P., – 17, – 12, – 7, ... में 11वाँ पद ज्ञात कीजिए।

संकेतः 11वाँ पद : $a_{11} = a + 10d$

प्रश्न 8. A.P. 13, 8, 3, ... के प्रथम 20 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

संकेत : $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

प्रश्न 9. 7 के प्रथम 12 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।

संकेत : $S_{12} = \frac{n}{2}$ (पहला पद + अंतिम पद)

प्रश्न 10. समान्तर श्रेणी 4, 1, – 2, – 5, ... के अगले 2 पद लिखिए।

संकेत : समान्तर श्रेणी के

$a = 4, d = 1 - 4 = -3$

प्रश्न 11. समान्तर श्रेणी 3, 5, 7, 9, ..., 201 का अन्त से 5वाँ पद लिखिए।

संकेत : अंत से 5वाँ पद= अंतिम पद से 4 पद पहले

प्रश्न 12. एक कार A स्थान से B स्थान पर 260 किमी दूरी 65 किमी/घंटा समान गति से सभी 13 हरे यातायात सिग. नलों को पार करती है। भारी यातायात के कारण यह प्रथम सिग्नल पर 4 मिनट, दूसरे सिग्नल पर 7 मिनट, तीसरे सिग्नल पर 10 मिनट एवं इसी प्रकार तेरहवें सिग्नल पर 40 मिनट रुकती है। स्थान B तक पहुँचने में इसे कुल कितना समय होगा। उपयुक्त गणितीय विधि से हल कीजिए।

संकेत : बिना रुके समय

$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{260}{65} = 4 \text{ घंटे}$$

रुकने का समय : सिग्नलों पर रूकने का समय A.P. में है।

अंतिम पद $a_{13} = a + 12d$

रुकने का कुल समय :

$$S_n = \frac{n}{2}(\text{पहला पद} + \text{अंतिम पद})$$

कुल समय = 4 घंटे + 4 घंटे 46 मिनट

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम 9, 12, 15, 18, ... एक समान्तर श्रेणी है तथा इसका 16वाँ पद तथा व्यापक पद ज्ञात कीजिए।

संकेत : समान्तर श्रेणी के लिए सार्वअन्तर बराबर होना चाहिए।

$a_{16} = a + 15d =$

व्यापक पद (nवाँ पद)

$a_n = a + (n-1)d$

प्रश्न 14. A.P. 17, 15, 13 के कितने पद लिए जाएँ ताकि उनका योग 81 हो।

संकेत : $a = 17, d = 15 - 17 = -2, S_n = 81$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

प्रश्न 15. यतेन्द्र ने अपने बचत खाते में पहले दिन ₹ 25, दूसरे दिन ₹ 30 तथा तीसरे दिन ₹ 35 की बचत की। यदि वह इस तरह से बचत करना जारी रखता है तो कितने दिनों में वह ₹ 2125 बचा पायेगा।

संकेत : मान लें कुल दिनों की संख्या = n

कुल बचत $S_n = 2125$

AP के योग का सूत्र–

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

प्रश्न 16. यदि किसी A.P. के प्रथम 12 पदों का योग 468 है तथा इसका सार्वअंतर 6 है, तो 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

संकेत : $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ **या**

$$468 = \frac{12}{2}[2a + 11(6)]$$

प्रश्न 17. 1 से 100 तक के मध्य की 6 से विभाजित होने वाली संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए।

संकेत : 6 से विभाजित होने वाली संख्याएँ : 6, 12, 18, ... 96

योगफल $S_n = \frac{n}{2}$ (पहला पद + अंतिम पद)

प्रश्न 18. उस A.P. के प्रथम 15 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका पाँचवाँ और नवाँ पद क्रमश: 26 और 42 है।

संकेत : पाँचवाँ पद : $a_5 = a + 4d = 26$ ...(i)

नवाँ पद : $a_9 = a + 8d = 42$ ...(ii)

पदों का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. एक समान्तर श्रेणी का 14वाँ पद उसके 8वें पद का दुगना है। यदि उसका छटा पद – 8 है, तो उसके प्रथम 20पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

संकेत : $a_{14} = 2 \times a_8$ तथा $a_6 = a + 5d = -8$

$a + 13d = 2(a + 7d) = 2a + 14d$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

प्रश्न 2. दो अंकों वाली कितनी संख्याएँ 5 से विभाज्य हैं।

संकेत : 10, 15, 20, 25, ..., 95

प्रश्न 3. यदि एक समान्तर श्रेणी का तृतीय पद 7 है तथा सातवाँ पद, तृतीय पद के तीन गुना से दो अधिक है, तो उसके प्रथम 20 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

संकेत : $a_7 = 3a_3 + 2$

हल करने पर, $a = -1, d = 4$

प्रथम 20 पदों का योग

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2 \times (-1) + 19(4)]$$

$$= 10[-2 + 76] = 10[74] = 740$$

प्रश्न 4. किसी समान्तर श्रेणी का 17वाँ पद इसके 8वें पद के दुगुने से 5 अधिक है। यदि इस समांतर श्रेढी का 11वाँ पद 43 है, तो इसका *n*वाँ पद ज्ञात कीजिए।

संकेत: $a_{17} = 2a_8 + 5$

$a + 16d = 2(a + 7d) + 5$

$a + 10d = 43$ ...(ii)

प्रश्न 5. दिखाइए कि एक समान्तर श्रेणी जिसका प्रथम पद *a*, दूसरा पद *b*, और अन्तिम पद *c* है, का योग $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ है।

संकेत : $a_n = a + (n-1)d$

$c = a + (n-1)(b-a)$

$$S_n = \frac{n}{2}(a+c);\ S_n = \left[\frac{(b+c-2a)}{(b-a)}\right] \times \frac{(a+c)}{2}$$

प्रश्न 6. यदि एक समान्तर श्रेणी का *m*वाँ पद $\frac{1}{n}$ तथा *n*वाँ पद $\frac{1}{m}$ हो, तो दर्शाइए कि *mn* पदों का योगफल $\frac{1}{2}(mn+1)$ होगा।

संकेत : $a + (m-1)d = \frac{1}{n}$ **तथा** $a + (n-1)d = \frac{1}{m}$

mn पदों का योग– $S_{mn} = \frac{mn}{2}[2a + (mn-1)d]$

●●

6 त्रिभुज

प्रश्नावली 6.1

प्रश्न 1. कोष्ठकों में दिए गए शब्दों में से सही शब्दों का प्रयोग करते हुए, रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) सभी वृत्त .... होते हैं। (सर्वांगसम, समरूप)

(ii) सभी वर्ग .... होते हैं। (समरूप, सर्वांगसम)

(iii) सभी .... त्रिभुज समरूप होते हैं। (समद्विबाहु, समबाहु)

(iv) भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (a) उनके संगत कोण .... हों तथा (b) उनकी संगत भुजाएँ .... हों। (बराबर, समानुपाती)

हल : (i) समरूप, (ii) समरूप, (iii) समबाहु,

(iv) (a) बराबर, (b) समानुपाती।

प्रश्न 2. निम्नलिखित युग्मों के दो भिन्न-भिन्न उदाहरण दीजिए :

(i) समरूप आकृतियाँ।

(ii) ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं।

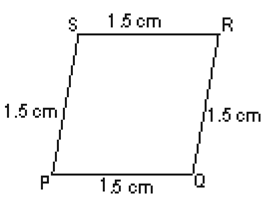
हल : (i) 1. समबाहु त्रिभुजों का युग्म समरूप आकृतियाँ हैं।

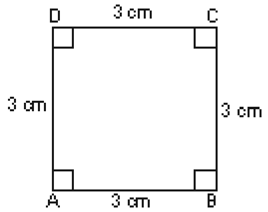
2. वर्गों का युग्म समरूप आकृतियाँ हैं।

(ii) 1. एक त्रिभुज और एक चतुर्भुज ऐसी आकृतियों का युग्म बनाती हैं जो समरूप नहीं हैं।

2. एक वर्ग और एक समचतुर्भुज ऐसी आकृतियों का युग्म बनाती हैं जो समरूप नहीं हैं।

प्रश्न 3. बताइए कि निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप हैं या नहीं :

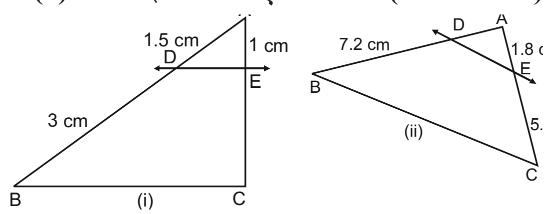




हल : दोनों चतुर्भुज समरूप नहीं हैं क्योंकि उनके संगत कोण बराबर नहीं हैं।

प्रश्नावली 6.2

प्रश्न 1. आकृति (i) और (ii) में $DE \parallel BC$ है। (i) में, EC और (ii) में AD ज्ञात कीजिए। (CBSE 2019)



अथवा

यदि ΔABC में $DE \parallel BC$ है, AD = 1.5 सेमी, BD = 3 सेमी तथा AE = 1 सेमी हो, तो EC ज्ञात कीजिए।

हल : (i) ΔABC में,

$DE \parallel BC$ (दिया है)

(आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से)

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{1{\cdot}5}{3} = \frac{1}{EC}$$

$$\Rightarrow \quad EC = \frac{3}{1{\cdot}5} \Rightarrow EC = 2 \text{ सेमी}$$

(ii) ΔABC में, $DE \parallel BC$

(आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से)

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{7.2} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$\Rightarrow \quad AD = \frac{1.8}{5.4} \times 7.2 \Rightarrow AD = \frac{7.2}{3}$$

$\therefore \quad AD = 2.4$ सेमी **उत्तर**

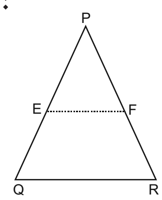
प्रश्न 2. किसी ΔPQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिन्दु E और F स्थित हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए, बताइए कि क्या $EF \parallel QR$ है :

(i) PE = 3.9 सेमी, EQ = 3 सेमी, PF = 3.6 सेमी और FR = 2.4 सेमी।

(ii) PE = 4 सेमी, QE = 4.5 सेमी, PF = 8 सेमी और RF = 9 सेमी।

(iii) PQ = 1.28 सेमी, PR = 2.56 सेमी, PE = 0.18 सेमी और PF = 0.36 सेमी।

हल : ΔPQR में दो बिन्दु E और F क्रमशः PQ और PR भुजाओं पर स्थित हैं।



(i) $PE = 3{\cdot}9$ सेमी, $EQ = 3$ सेमी, $PF = 3.6$ सेमी और $FR = 2.4$ सेमी,

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{3{\cdot}9}{3} = 1.3 \text{ सेमी}$$

तथा $$\frac{PF}{FR} = \frac{3.6}{2.4} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ सेमी}$$

$$\frac{PE}{EQ} \neq \frac{PF}{FR}$$

अतः EF, QR के समान्तर नहीं है। **उत्तर**

(ii) PE = 4 सेमी, QE = 4.5 सेमी, PF = 8 सेमी और RF = 9 सेमी

$$\frac{PE}{QE} = \frac{4}{4.5} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9} \quad ...(1)$$

तथा $$\frac{PF}{RF} = \frac{8}{9} \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) से,

$$\frac{PE}{QE} = \frac{PF}{RF}$$

(आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय के विलोम से)

अतः $EF \parallel QR$ **उत्तर**

(iii) PQ = 1.28 सेमी, PR = 2.56 सेमी, PE = 0.18 सेमी, PF = 0.36 सेमी

$EQ = PQ - PE = 1.28 - 0.18 = 1.10$ सेमी

$FR = PR - PF = 2.56 - 0.36 = 2.20$ सेमी

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{0.18}{1.10} = \frac{18}{110} = \frac{9}{55} \quad ...(1)$$

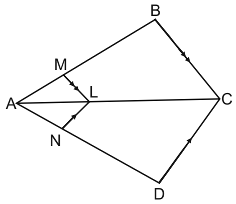
तथा $$\frac{PF}{FR} = \frac{0.36}{2.20} = \frac{36}{220} = \frac{9}{55} \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) से, $\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$

(आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय के विलोम से)

अतः $EF \parallel QR$ **उत्तर**

प्रश्न 3. निम्न आकृति में, यदि $LM \parallel CB$ और $LN \parallel CD$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ है।



हल : ΔABC में, $ML \parallel BC$ (दिया है)

$\because \quad \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AL}{LC}$ ...(i)

(आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से)

$\therefore$ पुनः ΔADC में,

$LN \parallel DC$ (दिया है)

$\dfrac{AN}{ND} = \dfrac{AL}{LC}$ ...(ii)

(आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से)

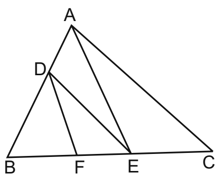
अतः (i) और (ii) से, $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{ND}$ या $\dfrac{MB}{AM} = \dfrac{ND}{AN}$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{AM} + 1 = \dfrac{ND}{AN} + 1$

$\Rightarrow \dfrac{MB + AM}{AM} = \dfrac{ND + AN}{AN} \Rightarrow \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AD}{AN}$

अतः $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AD}$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 4. निम्न चित्र में, $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AE$ है। सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{BF}{FE} = \dfrac{BE}{EC}$ है।



हल : दिया है : ΔABC में भुजा AB पर एक बिन्दु D है और भुजा BC पर दो बिन्दु E व F हैं। रेखाखण्ड DF, DE व AE खींचे गये हैं।

सिद्ध करना है : $\dfrac{BF}{FE} = \dfrac{BE}{EC}$

उपपत्ति : ΔBCA में, $DE \parallel AC$ (दिया है)

$\therefore \quad \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{BD}{DA}$ ...(i)

(आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से)

पुनः ΔBEA में, $DF \parallel AE$ (दिया है)

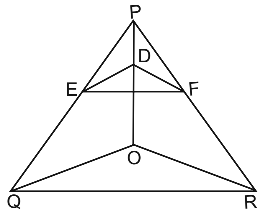
$\therefore \quad \dfrac{BF}{FE} = \dfrac{BD}{DA}$ ...(ii)

(आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से)

समीकरण (i) व (ii) से,

$\dfrac{BF}{FE} = \dfrac{BE}{EC}$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 5. निम्न चित्र में, $DE \parallel OQ$ और $DF \parallel OR$ है। दर्शाइए कि $EF \parallel QR$ है।



हल : दिया है : दी गई आकृति में $DE \parallel OQ$ तथा $DF \parallel OR$ है।

सिद्ध करना है : $EF \parallel QR$

उपपत्ति : ΔPOQ में,

$DE \parallel OQ$

$\dfrac{PE}{EQ} = \dfrac{PD}{DO}$ ...(i)

(आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से)

पुनः ΔPOR में, $DF \parallel OR$

$\dfrac{PF}{FR} = \dfrac{PD}{DO}$ ...(ii)

(आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से)

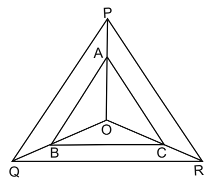
समीकरण (i) व (ii) से, $\dfrac{PE}{EQ} = \dfrac{PF}{FR}$

अब ΔPQR में, $\dfrac{PE}{EQ} = \dfrac{PF}{FR}$

(आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय के विलोम से)

$\therefore \quad EF \parallel QR$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 6. निम्न चित्र में, क्रमशः OP, OQ और OR पर स्थित बिन्दु A, B और C इस प्रकार हैं कि $AB \parallel PQ$ और $AC \parallel PR$ है। दर्शाइए कि $BC \parallel QR$ है।



हल : दिया है : ΔPQR में बिन्दु A, B और C क्रमशः OP, OQ और OR पर इस प्रकार स्थित हैं कि $AB \parallel PQ$ और $AC \parallel PR$

सिद्ध करना है : $BC \parallel QR$

उपपत्ति : ΔPQO में, $AB \parallel PQ$ (दिया है)

$\dfrac{OA}{AP} = \dfrac{OB}{BQ}$ ...(i)

(आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से) पुनः ΔPRO में,

$AC \parallel PR$

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OC}{CR} \quad ...(ii)$$

(आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से) समीकरण (i) व (ii) से,

$$\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$$

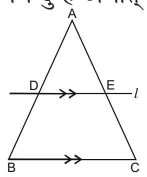
(आधारभूत समानुपातिक प्रमेय के विलोम से)

ΔCQR में, $BC \parallel QR$. **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 7. प्रमेय 6·1 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समान्तर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है। (याद कीजिए कि आप इसे कक्षा IX में सिद्ध कर चुके हैं।)

हल : दिया है : ΔABC में; D, AB का मध्य-बिन्दु है अर्थात् $AD = DB$ है।

BC के समान्तर रेखा l, AB व AC को क्रमश: D तथा E बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।



सिद्ध करना है : E, AC का मध्य- बिन्दु है।

उपपत्ति : $\because D$, AB का मध्य-बिन्दु है। (दिया है)

$\therefore \quad AD = DB$

$$\frac{AD}{BD} = 1 \quad ...(i)$$

ΔABC में, $\quad DE \parallel BC$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

(आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से)

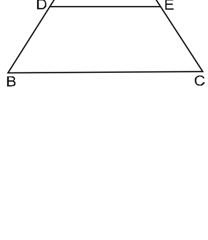
$$1 = \frac{AE}{EC} \quad \text{[समी. (i) के प्रयोग से]}$$

$$AE = EC$$

$\therefore E$, AC का मध्य-बिन्दु है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 8. प्रमेय 6·2 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर होती है। (याद कीजिए कि आप कक्षा IX में ऐसा कर चुके हैं।)

हल : दिया है : ΔABC में, AB तथा AC के मध्य- बिन्दु क्रमश : D और E हैं अर्थात् $AD = BD$ और $AE = EC$ हैं। D को E से मिलाया।



सिद्ध करना है : $DE \parallel BC$

उपपत्ति : D, AB का मध्य-बिन्दु है

$\therefore \quad AD = BD$ (दिया है)

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = 1 \quad ...(i)$$

E, AC का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore \quad AE = EC$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC} = 1 \quad ...(ii)$$

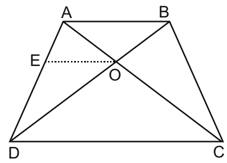
समीकरण (i) व (ii) से,

$$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

(आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय के विलोम से)

$\therefore \quad DE \parallel BC$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 9. *ABCD* एक समलम्ब है जिसमें $AB \parallel DC$ है तथा इसके विकर्ण परस्पर बिन्दु *O* पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।



हल : दिया है : समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ है जिसमें AC और BD दो विकर्ण हैं, जो परस्पर O बिन्दु पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

रचना : O से जाती हुई $OE \parallel CD$ खींची।

उपपत्ति : ΔADC में, $OE \parallel DC$

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AO}{CO} \quad ...(i)$$

(आधारभूत समानुपातिक प्रमेय से)

समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ में, $AB \parallel CD$

$\therefore \quad OE \parallel CD$ (रचना से)

$OE \parallel AB$

अब ΔADB में, $\quad OE \parallel AB$

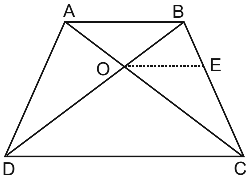
$$\frac{ED}{AE} = \frac{DO}{BO} \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{BO}{DO} \quad ...(ii)$$

समीकरण (i) व समीकरण (ii) से, $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$

$$\Rightarrow AO \times DO = BO \times CO$$

$$\Rightarrow \frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 10. एक चतुर्भुज *ABCD* के विकर्ण परस्पर बिन्दु *O* पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है। दर्शाइए कि *ABCD* एक समलम्ब है।



हल : दिया है : *ABCD* एक चतुर्भुज है जिसके विकर्ण *AC* तथा *BD* बिन्दु *O* पर एक-दूसरे को इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

सिद्ध करना है : *ABCD* एक समलम्ब है।

रचना : *O* से $OE \parallel DC$ खींची।

उपपत्ति : ΔBDC में, $OE \parallel DC$

$$\frac{BO}{DO} = \frac{BE}{EC} \quad ...(i)$$

परन्तु दिया है, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO} \Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$ ...(ii)

समीकरण (i) व (ii) से, $\frac{AO}{CO} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{CO}{AO} = \frac{EC}{BE}$

$\therefore$ $OE \parallel AB$

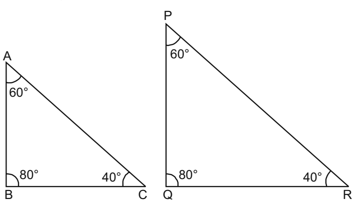
(आधारभूत आनुपातिक प्रमेय के विलोम से)

इसी प्रकार, $OE \parallel CD \Rightarrow AB \parallel CD$

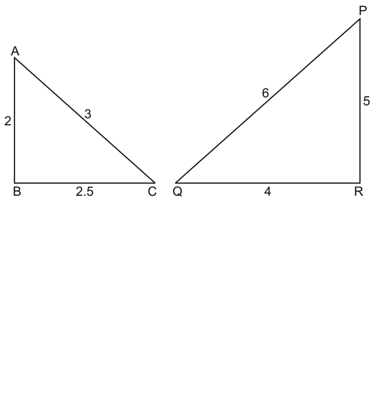
अत : *ABCD* एक समलम्ब है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्नावली 6.3

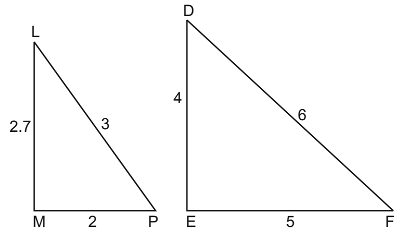
प्रश्न 1. बताइए कि निम्न आकृतियों में दिए गए त्रिभुजों के युग्मों में से कौन-कौन से युग्म समरूप हैं। उस समरूपता कसौटी को लिखिए जिसका प्रयोग आपने उत्तर देने में किया है तथा साथ ही समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त कीजिए।



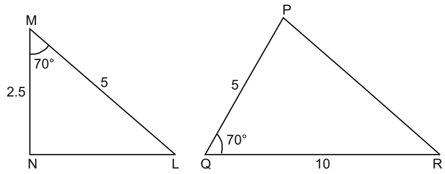
(i)



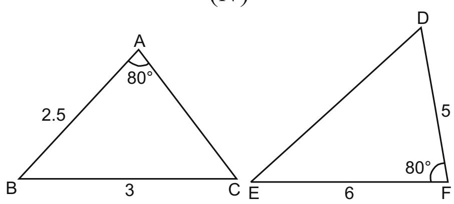
(ii)



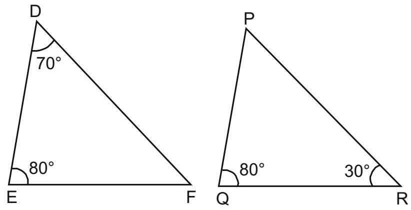
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

हल : (i) ΔABC तथा ΔPQR में, $\angle A = \angle P$ (प्रत्येक $60°$); $\angle B = \angle Q$ (प्रत्येक $80°$); $\angle C = \angle R$ (प्रत्येक $40°$)

A-A-A समरूपता कसौटी से, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

(ii) ΔABC तथा ΔQRP में,

$$\frac{AB}{QR} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};\ \frac{AC}{QP} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};\ \frac{BC}{RP} = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$$

अत: $\frac{AB}{QR} = \frac{AC}{QP} = \frac{BC}{RP} = \frac{1}{2}$

S-S-S समरूपता कसौटी से, $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

(iii) ΔLMP तथा ΔDEF में,

$$\frac{MP}{DE} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};\ \frac{PL}{DF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};\ \frac{LM}{EF} = \frac{2.7}{5} = \frac{27}{50}$$

यहाँ $\frac{MP}{DE} = \frac{PL}{DF} \neq \frac{LM}{EF}$

∵ दोनों त्रिभुजों की भुजाएँ समानुपात में नहीं हैं।

∴ दोनों त्रिभुज समरूप नहीं हैं।

(iv) ΔMNL तथा ΔQPR में,

$$\frac{ML}{QR} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\angle M = \angle Q = 70°$$

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{2{\cdot}5}{5} = \frac{1}{2}$$

S-A-S समरूपता कसौटी से, $\Delta MNL \sim \Delta QPR$

(v) ΔABC तथा ΔDEF में, $\frac{AB}{DF} = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$

$\frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\angle B \neq \angle F$ [... $\angle B$ अज्ञात है]

अत: दोनों त्रिभुज समरूप नहीं हैं।

(vi) ΔDEF में, $\angle D = 70°$, $\angle E = 80°$

∵ $\angle D + \angle E + \angle F = 180°$

∴ $70° + 80° + \angle F = 180°$

$\Rightarrow \angle F = 180° - 70° - 80°$

∴ $\angle F = 30°$

ΔPQR में, $\angle Q = 80°$, $\angle R = 30°$

∵ $\angle P + \angle Q + \angle R = 180°$

$\Rightarrow \angle P + 80° + 30° = 180° \Rightarrow \angle P = 180° - 80° - 30°$

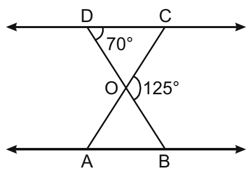
∴ $\angle P = 70°$

ΔDEF एवं ΔPQR से, $\angle D = \angle P$ (प्रत्येक 70°)

$\angle E = \angle Q$ (प्रत्येक 80°); $\angle F = \angle R$ (प्रत्येक 30°)

A-A-A समरूपता कसौटी में, $\Delta DEF \sim \Delta PQR$.

प्रश्न 2. निम्न आकृति में, $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125°$ और $\angle CDO = 70°$ है। $\angle DOC$, $\angle DCO$ और $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।



हल : $\angle BOC = 125°$; $\angle CDO = 70°$

∵ DOB एक सरल रेखा है

∴ $\angle DOC + \angle COB = 180°$

$\Rightarrow \angle DOC = \angle 180° - \angle COB$

$\Rightarrow \angle DOC = 180° - 125°$

∴ $\angle DOC = 55°$

अत: $\angle DOC = \angle AOB = 55°$ (शीर्षाभिमुख कोण)

ΔDCO में, $\angle D + \angle O + \angle C = 180°$

$\Rightarrow 70° + 55° + \angle C = 180° \Rightarrow \angle C = 180° - 70° - 55°$

∴ $\angle C = 55°$ अर्थात् $\angle DCO = 55°$

∵ $\Delta ODC \sim \Delta OBA$ (दिया है)

∴ $\angle DCO = \angle OAB$

(∵ दो समरूप त्रिभुज के संगत कोण बराबर होते हैं)

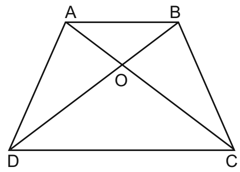
$\angle OAB = 55°$

अत: $\angle DOC = 55°$; $\angle DCO = 55°$ और $\angle OAB = 55°$

उत्तर

प्रश्न 3. समलम्ब $ABCD$, जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए, दर्शाइए कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ है।

हल : दिया है : $ABCD$ एक समलम्ब है जिसमें $AB \parallel CD$ तथा उसके विकर्ण AC और BD बिन्दु O पर काटते हैं।



सिद्ध करना है : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

उपपत्ति : $AB \parallel CD$ और AC तिर्यक रेखा है।

$\angle OAB = \angle OCD$ (एकान्तर कोण युग्म)

और $\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अब ΔAOB और ΔCOD में,

$\angle OAB = \angle OCD$ तथा $\angle AOB = \angle COD$

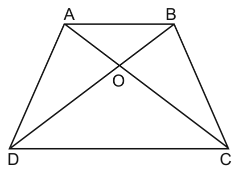
त्रिभुजों की समरूपता के उपगुणधर्म A-A से,

$\Delta AOB \sim \Delta COD$

∴ $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ (भुजाओं की आनुपातिकता से)

इति सिद्धम्।

प्रश्न 4. आकृति में $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है। दर्शाइए कि $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ है।



हल : दिया है : दी गई आकृति में,

$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$

सिद्ध करना है : $\Delta PQS \sim \Delta TQR$

उपपत्ति : ΔPQR में, $\angle 1 = \angle 2$ (दिया है)

∴ $PR = PQ$

(बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं)

$$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$$ (दिया है)

$$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PQ}$$ (∵ $PR = PQ$)

$\Rightarrow \dfrac{QS}{QR} = \dfrac{PQ}{QT}$

ΔPQS और ΔTQR में,

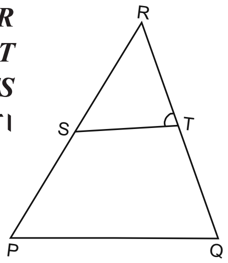
$$\frac{QS}{QR} = \frac{PQ}{QT}$$

$\angle 1 = \angle 1$ (उभयनिष्ठ)

S-A-S समरूपता कसौटी से,

$\Delta PQS \sim \Delta TQR$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 5. ΔPQR की भुजाओं PR और QR पर क्रमशः बिन्दु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि $\angle P = \angle RTS$ है। दर्शाइए कि $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ है।



हल : दिया है : ΔPQR की भुजाओं PR और QR पर क्रमशः S तथा T बिन्दु इस प्रकार स्थित हैं कि $\angle P = \angle RTS$ है।

सिद्ध करना है : $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$

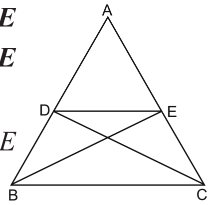
उपपत्ति : ΔRPQ और ΔRTS में, $\angle P = \angle RTS$

तथा $\angle R = \angle R$ (उभयनिष्ठ)

त्रिभुजों की समरूपता के उपगुणधर्म AA से

$\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 6. दी गई आकृति में, यदि $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ है, तो दर्शाइए कि $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ है।



हल : दिया है : दी गई आकृति में $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ हैं।

सिद्ध करना है : $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

उपपत्ति : $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ (दिया है)

$AB = AC$ (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

और $AE = AD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ)

$\dfrac{AB}{AC} = 1$ ...(i) तथा $\dfrac{AD}{AE} = 1$ ...(ii)

समीकरण (i) व समीकरण (ii) से,

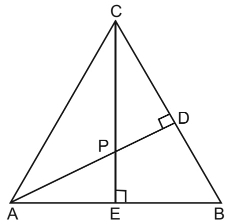
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

ΔADE और ΔABC में, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

S-A-S समरूपता कसौटी से, $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 7. आकृति में, ΔABC के शीर्षलम्ब AD और CE परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि :



(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$
(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$
(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$
(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

हल : दिया है : ΔABC में AD और CE शीर्ष लम्ब हैं, जो बिन्दु P पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : (i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$ (ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$ (iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$ (vi) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

उपपत्ति : (i) ΔAEP और ΔCDP में,

$\angle E = \angle D$ (प्रत्येक $90°$); $\angle APE = \angle CPD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

A-A समरूपता कसौटी से, $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

(ii) ΔABD और ΔCBE में, $\angle D = \angle E$ (प्रत्येक $90°$)

$\angle B = \angle B$ (उभयनिष्ठ)

A-A समरूपता कसौटी से, $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

(iii) ΔAEP और ΔADB में, $\angle E = \angle D$ (प्रत्येक $90°$)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

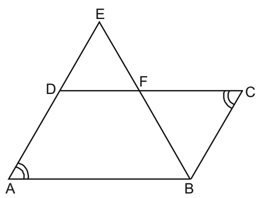
A-A समरूपता कसौटी से, $\Delta AEP \sim \Delta ADB$

(iv) ΔPDC और ΔBEC में, $\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)

$\angle D = \angle E$ (प्रत्येक $90°$)

A-A समरूपता कसौटी से, $\Delta PDC \sim \Delta BEC$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 8. समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की बढाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिन्दु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि $\Delta ABE \sim \Delta CFB$ है।



हल : दिया है : समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की बढ़ाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिन्दु है तथा BE भुजा CD को F बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है : $\Delta ABE \sim \Delta CFB$

उपपत्ति : ΔABE और ΔCFB में, $\angle A = \angle C$ (समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

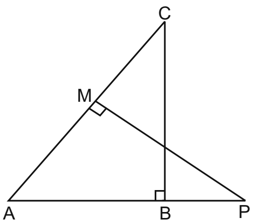
$\because$ $AE \parallel BC$ तथा BE तिर्यक् रेखा है।

$\angle AEB = \angle CBF$ (एकान्तर कोण)

A-A समरूपता कसौटी से,

$\Delta ABE \sim \Delta CFB$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 9. निम्न आकृति में, ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनके कोण B और M समकोण हैं। सिद्ध कीजिए कि :



(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

हल : दिया है : ΔABC और ΔAMP दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनके कोण B और M समकोण हैं।

सिद्ध करना है : (i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

उपपत्ति : (i) ΔABC और ΔAMP में, $\angle A = \angle A$ (उभनिष्ठ)

$\angle B = \angle M$ (प्रत्येक 90°)

A-A समरूपता कसौटी से, $\mathbf{\Delta ABC \sim \Delta AMP}$

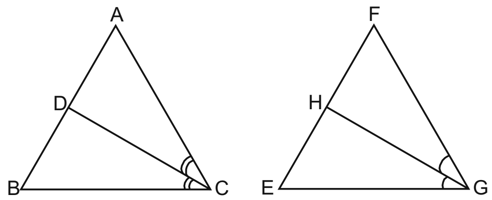
(ii) $\because$ ΔABC और ΔAMP समरूप त्रिभुज है ।

$\therefore \quad \frac{AC}{PA} = \frac{BC}{MP}$

(यदि दो त्रिभुज समरूप हों तो उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं)

अत: $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 10. CD और GH क्रमशः $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिंदु D और H क्रमशः ΔABC और ΔEFG की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं। यदि $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ है, तो दर्शाइए कि :



(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$ (ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGE$

हल : दिया है : ΔABC तथा ΔFEG में, $\angle ACB$ तथा $\angle EGF$ के समद्विभाजक CD तथा GH इस प्रकार है कि D, AB पर तथा H, FE पर स्थित है।

तथा $\Delta ABC \sim \Delta FEG$

(i) $\because$ $\Delta ABC \sim \Delta FEG$

$\therefore$ $\angle CAB = \angle GEF$

$\Rightarrow$ $\angle CAD = \angle GFH$ ...(i)

और $\angle ACB = \angle FGE$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle FGE$

$\Rightarrow \angle ACD = \angle FGH$ ...(ii)

समीकरण (i) व (ii) से

$\Delta ACD \sim \Delta FGH$ (AA समरूपता से)

$\because$ दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपात में होती हैं।

अत: $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(ii) $\because$ $\Delta ABC \sim \Delta FEG$

$\therefore$ $\angle ABC = \angle FEG$

$\Rightarrow$ $\angle DBC = \angle HEG$ ...(iii)

और $\angle ACB = \angle FGE$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle FGE$

$\Rightarrow$ $\Delta DCB = \Delta HGE$ ...(iv)

समीकरण (iii) और (iv) से,

$\Delta DCB \sim \Delta HGE$ (AA समरूपता से)

(iii) $\because$ $\Delta ABC \sim \Delta FEG$

$\therefore$ $\angle CAB = \angle GFE$

$\Rightarrow$ $\angle CAD = \angle GFH$

$\Rightarrow$ $\angle DAC = \angle HFG$ ...(v)

और $\angle ACB = \angle FGE$

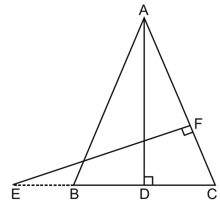
$\Rightarrow \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle FGE$

$\Rightarrow$ $\angle DCA = \angle HGF$ ...(vi)

समीकरण (v) और (vi) से,

$\Delta DCA \sim \Delta HGF$ (AA समरूपता से)

प्रश्न 11. निम्न आकृति में, $AB = AC$ वाले, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढ़ाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है। यदि $AD \perp BC$ और $EF \perp AC$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABD \sim \Delta ECF$ है।



हल : दिया है : एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC है, जिसमें $AB = AC$ है तथा CB को E बिन्दु तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि $EF \perp AC$ और $AD \perp BC$ है।

सिद्ध करना है : $\Delta ABD \sim \Delta ECF$

उपपत्ति : ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है। (दिया है)

$\therefore$ $AB = AC$

तथा $\angle B = \angle C$ (त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

अब ΔABD और ΔECF में,

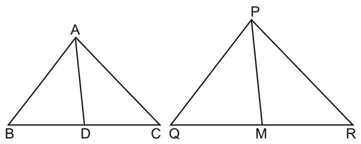
$\angle ABD = \angle ECF$ (ऊपर सिद्ध किया है)

$\angle ADB = \angle EFC$ (प्रत्येक $90°$)

$\therefore$ A-A समरूपता कसौटी से,

$\Delta ABD \sim \Delta ECF$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 12. एक त्रिभुज *ABC* की भुजाएँ *AB* और *BC* तथा माध्यिका *AD* एक अन्य त्रिभुज *PQR* की क्रमशः भुजाओं *PQ* और *QR* तथा माध्यिका *PM* के समानुपाती हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है।



हल : दिया है : ΔABC तथा ΔPQR दो त्रिभुज हैं जिनमें AD तथा PM माध्यिकाएँ हैं,

अर्थात् $BD = \frac{1}{2} BC$ तथा $QM = \frac{1}{2} QR$

तथा $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM}$ है ...(i)

सिद्ध करना है : ΔABC और ΔPQR समरूप हैं।

उपपत्ति : $\frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM}$ (दिया है)

$$\frac{2BD}{2QM} = \frac{AD}{PM}$$

$$\left(\because BD = \frac{1}{2} BC \text{ तथा } QM = \frac{1}{2} QR\right)$$

$$\frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM} \quad ...(ii)$$

अब ΔABD तथा PQM में,

समी. (i) व (ii) से, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}$

$\Delta ABD \sim \Delta PQM$

$\therefore$ $\angle B = \angle Q$

ΔABC तथा ΔPQR में,

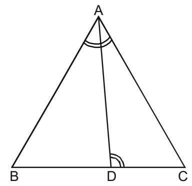
$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [समी. (i) से]

$\angle B = \angle Q$

$\therefore$ S-A-S समरूपता कसौटी से,

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 13. एक त्रिभुज *ABC* की भुजा *BC* पर एक बिन्दु *D* इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है। दर्शाइए कि $CA^2 = CB.CD$ है।



हल : दिया है : ΔABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार है कि $\angle ADC = \angle BAC$

सिद्ध करना है : $CA^2 = CB \times CD$

उपपत्ति : ΔABC और ΔDAC में,

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)

$\angle BAC = \angle ADC$ (दिया है)

$\therefore$ A-A समरूपता कसौटी से,

$\Delta ABC \sim \Delta DAC$

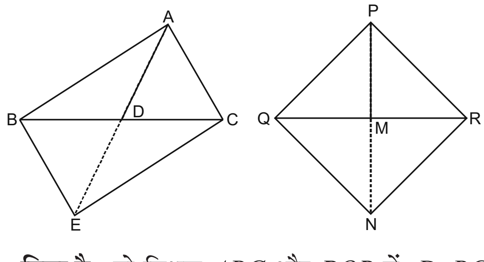
$\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$

(यदि दो त्रिभुज समरूप हों तो उनकी भुजाएँ समानुपाती होती हैं)

$\therefore$ $AC^2 = BC.DC$

या $AC^2 = CB.CD$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 14. एक त्रिभुज *ABC* की भुजाएँ *AB* और *AC* तथा माध्यिका *AD* एक अन्य त्रिभुज की भुजाओं *PQ* और *PR* तथा माध्यिका *PM* के क्रमशः समानुपाती हैं। दर्शाइए कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है।



हल : दिया है : दो त्रिभुज ABC और PQR में, D, BC का मध्य-बिन्दु है और QR का मध्य-बिन्दु M है।

तथा $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$ ...(i)

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

रचना : AD को E तक इस प्रकार बढ़ाया कि $AD = DE$ हो। BE और CE को मिलाया तथा PM को N तक इस प्रकार बढ़ाया कि $PM = MN$ हो। QN और NR को मिलाया।

उपपत्ति : चतुर्भुज $ABEC$ के विकर्ण AE और BC परस्पर D बिन्दु पर समद्विभाजित करते हैं।

$\therefore$ चतुर्भुज $ABEC$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore \quad BE = AC \quad$ ...(ii)

इसी प्रकार $PQNR$ भी एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore \quad QN = PR \quad$ ...(iii)

समीकरण (ii) को (iii) से विभाजित करने पर,

$$\frac{BE}{QN} = \frac{AC}{PR} \quad \text{...(iv)}$$

अब $$\frac{AD}{PM} = \frac{2AD}{2PM} = \frac{AD}{PM} = \frac{AE}{PN} \quad \text{...(v)}$$

समीकरण (i), (iv) और (v) में, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BE}{QN} = \frac{AE}{PN}$

अत: ΔABE और ΔPQN में, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BE}{QN} = \frac{AE}{PN}$

$\therefore \quad \Delta ABE \sim \Delta PQN$ (SSS से)

$\therefore \quad \angle BAE = \angle QPN \quad$ ...(vi)

इसी प्रकार, $\Delta AEC \sim \Delta PNR$

$\therefore \quad \angle EAC = \angle NPR \quad$ ...(vii)

समीकरण (vi) व (vii) को जोड़ने पर,

$$\angle BAE + \angle EAC = \angle QPN + \angle NPR$$

$\Rightarrow \quad \angle BAC = \angle QPR$

अब ΔABC और $\angle PQR$ में,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} \quad \text{[समी. (i) से]}$$

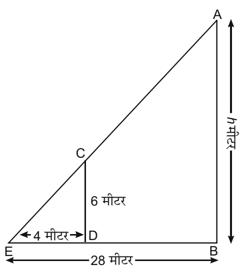
$$\angle A = \angle P$$

$\therefore$ S-A-S समरूपता कसौटी से,

$$\Delta ABC \sim \Delta PQR$$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 15. 6 मीटर लम्बाई वाले एक ऊर्ध्वाधर स्तम्भ की भूमि पर छाया की लम्बाई 4 मीटर है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 28 मीटर है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : 6 मीटर लम्बे स्तम्भ CD की छाया $DE = 4$ मीटर प्राप्त होती है। उसी समय एक मीनार AB जिसकी ऊँचाई माना h मीटर है की छाया $BE = 28$ मीटर प्राप्त होती है।



ज्ञात करना है : मीनार AB की ऊँचाई (h)।

गणना : ΔABE और ΔCDE समरूप हैं।

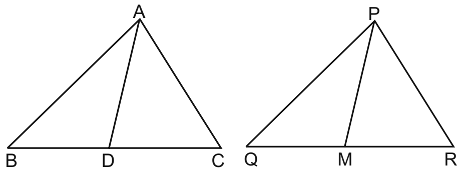
$$\therefore \quad \frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE} \Rightarrow \frac{h}{6} = \frac{28}{4} \Rightarrow h = \frac{28}{4} \times 6$$

$\therefore \quad h = 42$ मीटर

अत : मीनार की ऊँचाई = 42 मीटर **उत्तर**

प्रश्न 16. AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः माध्यिकाएँ हैं, जबकि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ है।

हल : दिया है : ΔABC और ΔPQR समरूप त्रिभुज हैं जिनमें AD और PM क्रमश: ΔABC और ΔPQR की माध्यिकाएँ हैं।



सिद्ध करना है : $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$

उपपत्ति : ΔABC और ΔPQR समरूप हैं।

$$\therefore \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \quad \text{...(i)}$$

$$\angle Q = \angle B \quad (\Delta ABC \sim \Delta PQR)$$

$\because AD, \Delta ABC$ की माध्यिका है।

$$\therefore \quad BD = \frac{1}{2} BC \Rightarrow BC = 2BD$$

तथा $PM, \Delta PQR$ की माध्यिका है।

$$\therefore \quad QM = \frac{1}{2} QR \Rightarrow QR = 2QM$$

समीकरण (i) से, $\frac{AB}{PQ} = \frac{2BD}{2QM} \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$ ...(ii)

अब ΔABD और ΔPQM की तुलना करने पर,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$$

$$\angle B = \angle Q$$

$\therefore$ S-A-S समरूपता कसौटी से, $\Delta ABD \sim \Delta PQM$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$$

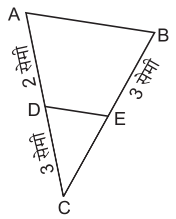
(समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपातिक होती हैं)

इति सिद्धम्।

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. आकृति में, यदि $DE \parallel AB$ हो तथा $AD = 2$ सेमी, $DC = 3$ सेमी एवं $BE = 3$ सेमी हो, तो CE का मान ज्ञात कीजिए।



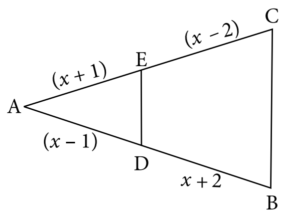
हल : थेल्स प्रमेय से, यदि $DE \parallel AB$, तो $\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$

दिया है : $AD = 2$ सेमी, $DC = 3$ सेमी, $BE = 3$ सेमी

$$\frac{2}{3} = \frac{3}{EC} \Rightarrow 2 \times EC = 9$$

$$EC = \frac{9}{2} \Rightarrow EC = 4.5 \text{ सेमी}$$

प्रश्न 2. आकृति में, $DE \parallel BC$ है यदि $AD = (x - 1)$, $DB = x + 2$, $AE = (x + 1)$ तथा $EC = (x - 2)$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



हल : थेल्स प्रमेय से, यदि $DE \parallel BC$, तो

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x-1}{x+2} = \frac{(x+1)}{(x-2)}$$

क्रास गुणा करने पर, $(x - 1)(x - 2) = (x + 1)(x + 2)$

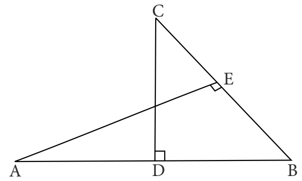
$\Rightarrow x^2 - x - 2x + 2 = x^2 + x + 2x + 2 - 3x + 2 = 3x + 2$

$$-6x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

प्रश्न 3. दी गई आकृति में $CD \perp AB$ तथा $AE \perp BC$। सिद्ध कीजिए :

(i) $\Delta BDC \sim \Delta BEA$

(ii) $\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BE}$



हल : (i) दिया है कि $CS __ AB$

$\therefore \angle BDC = 90°$ और $AE \perp BC$

$\therefore \quad \angle BEA = 90°$

इसलिए, $\quad \angle BDC = \angle BEA \quad$ ...(1)

अब चित्र में दखते हैं कि B, C, A एक ही त्रिभुज के बिन्दु हैं और रेखाएँ BC और BA दोनों त्रिभुज की भुजाएँ हैं। BCD और BAE एक ही जोड़ी की रेखाओं BC तथा BA के बीच बने हुए कोण हैं।

अतः $\quad \angle BCD = \angle BAE \quad$ ...(2)

अब (1) और (2) से हमें मिलता है कि,

$\angle BDC$ और $\angle BEA$ में एक कोण बराबर है (90°)

और दूसरा कोण भी बराबर है।

अतः $\quad \Delta BDC \sim \Delta BEA \quad$ (AA समान्तर से)

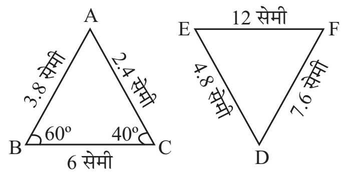
सिद्ध हुआ।

(ii) चूँकि $\quad \Delta BDC \sim \Delta BEA$

अतः समान त्रिभुजों में संगत भुजों के अनुपात बराबर होते हैं।

इसलिए, $\quad \frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BE} \quad$ **सिद्ध हुआ।**

प्रश्न 4. दी गई आकृति में ΔABC व ΔDFE की तुलना कर $\angle D$, $\angle E$ एवं $\angle F$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल : ΔABC में, $AB = 3.8$ सेमी, $BC = 6$ सेमी, $AC = 2.4$ सेमी, $\angle B = 60°$

ΔDEF में, $DE = 4.8$ सेमी, $EF = 12$ सेमी, $DF = 7.6$ सेमी, $\angle C = 40°$

भुजाओं का अनुपात,

$$\frac{AB}{DF} = \frac{38}{7.6} = \frac{1}{2}; \frac{BC}{EF} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}; \frac{AC}{DE} = \frac{2.4}{4.8} = \frac{1}{2}$$

यदि Δ समरूप है तो :

ΔABC में, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

$\angle A + 60° + 40° = 180°$

$\angle A = 80°, \angle D = \angle A = 80°, \angle F = \angle B = 60°, \angle E = \angle C = 40°.$

प्रश्न 5. त्रिभुज PQR में भुजाओं PQ और PR में क्रमशः X तथा y बिन्दु इस प्रकार है कि, $PX = 9$ सेमी, $XQ = 12$ सेमी, $PY = 12$ सेमी तथा $YR = 16$ सेमी। $XY : QR$ ज्ञात करो।

हल : दिया है, $PX = 9$ सेमी, $XQ = 12$ सेमी, $PY = 12$ सेमी, $YR = 16$ सेमी,

अनुपात की जाँच, $\frac{PX}{XQ} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$; $\frac{PY}{YR} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

चूँकि, $\frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR}$

थेल्स प्रमेय से, $XY \parallel QR$

समरूप त्रिभुजों में, $\Delta PXY \sim \Delta PQR$

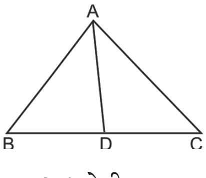
$$\frac{XY}{QR} = \frac{PX}{PQ}$$

$PQ = PX + XQ = 9 + 12 = 21$ सेमी

$$\frac{XY}{QR} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$XY : QR = 3 : 7.$

प्रश्न 6. आकृति में, यदि $AB = 3.4$ सेमी, $BD = 4$ सेमी, $BC = 10$ सेमी हो, तो AC का मान होगा—



हल : दिया है, $AB = 3.4$ सेमी, $BD = 4$ सेमी, $BC = 10$ सेमी

$DC = BC - BD = 10 - 4 = 6$ सेमी

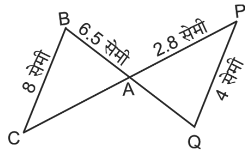
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{3.4}{AC} = \frac{4}{6}$$

$4 \times AC = 3.4 \times 6$

$AC = \frac{3.4 \times 6}{4} \Rightarrow AC = 5.1$ सेमी।

प्रश्न 7. आकृति में, $\Delta ACB \sim \Delta APQ$ है यदि $BC = 8$ सेमी, $BA = 6.5$ सेमी, $PQ = 4$ सेमी और $AP = 2.8$ सेमी हो, तो AQ का मान होगा—



हल : दिया है, $\Delta ABC \sim \Delta APQ$

समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं। अतः

$$\frac{AC}{AD} = \frac{CB}{PQ} = \frac{AB}{AQ}$$

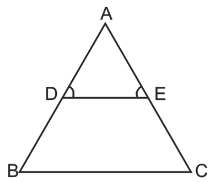
दिया है : $BC = 8$ सेमी, $AB = 6.5$ सेमी, $PQ = 4$ सेमी, $AP = 2.8$ सेमी

अब, $\frac{CB}{PQ} = \frac{AB}{AQ} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{6.5}{AQ}$

$2 = \frac{6.5}{AQ} \Rightarrow 2AQ = 6.5$

$AQ = \frac{6.5}{2} \Rightarrow AQ = 3.25.$

प्रश्न 8. निम्न आकृति में, $\angle D = \angle E$ तथा $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ΔBAC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



हल : दिया है : $\angle D = \angle E \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

सिद्ध करना है : ΔABC समद्विबाहु है $(AB = AC)$

$\because \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

थेल्स प्रमेय के विलोम से, $\angle ADE = \angle ABC$ (संगत कोण)

$\angle AED = \angle ACB$ (संगत कोण)

दिया है : $\angle D = \angle E$

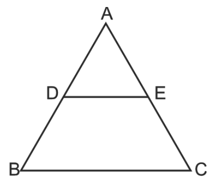
अतः $\angle ADE = \angle AED$

इसलिए $\angle ABC = \angle ACB$

ΔABC में यदि, $\angle ABC = \angle ACB$ तो $AB = AC$

अतः ΔBAC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रश्न 9. निम्न आकृति में, ABC एक त्रिभुज है। यदि $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$, तो सिद्ध कीजिए $DE \parallel BC$ है।



हल : दिया है, $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

सिद्ध करना है $DE \parallel BC$

यह थेल्स प्रमेय का विलोम है।

इसके अनुसार, यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक रेखा इस प्रकार विभाजित करें कि विभाजन का अनुपात समान हो, तो वह रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

दिया है : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ या $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

($DB = AB - AD$ और $EC = AC - AE$)

अतः थेल्स प्रमेय के विलोम से, $DE \parallel BC$ सिद्ध हुआ।

प्रश्न 10. ΔABC में $DE \parallel BC$ है तथा $\frac{AD}{DB}=\frac{3}{5}$ है। यदि $AC = 5.6$ इकाई हो, तो AE का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{3}{5}$

$AC = 5.6$

थेल्य प्रमेय से $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{3}{5}=\frac{AE}{EC}$

माना $AE = 3k$ और $EC = 5k$

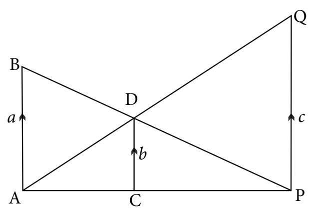
तब $AC = AE + EC = 3k + 5k = 8k$

दिया है $AC = 5.6, 8k = 5.6, k = 0.7$

$AE = 3k = 3 \times 0.7 = 2.1$ इकाई

अतः $AE = 2.1$ इकाई।

प्रश्न 11. दिए गए चित्र में $AB \parallel CD \parallel PQ$ यदि $AB = a$, $CD = b$, $PQ = c$ तब सिद्ध कीजिए $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}$



हल : दिया है : $AB \parallel CD \parallel PQ$

$AB = a, CD = b, PQ = c$

सिद्ध करना है : $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}$

रेखाएँ AQ और BP बिन्दु D पर एक-दूसरे को काटती हैं।

समांतर रेखाओं के कारण त्रिभुज DCP

अतः $\frac{AB}{CD}=\frac{AD}{DC}$

$\frac{a}{b}=\frac{AD}{DC}$ ...(1)

इसी प्रकार, त्रिभुज $DAB \sim$ त्रिभुज DPQ

अतः $\frac{CD}{PQ}=\frac{DC}{DP}$

$\frac{b}{c}=\frac{DC}{DP}$ ...(2)

समीकरण (1) और (2) से,

$$\frac{AD}{DC}+\frac{DP}{DC}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$$

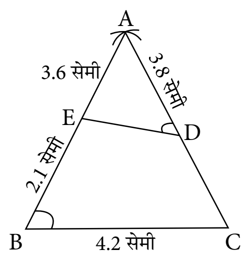
$$\frac{(AD+DP)}{DC}=\frac{(a+c)}{b}$$

व्युत्क्रम लेने पर,

$$\frac{DC}{(AD+DP)}=\frac{b}{(a+c)}$$

अतः $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}$ **सिद्ध हुआ।**

प्रश्न 12. आकृति में $\angle ADE = \angle B$ और $AD = 3.8$ सेमी, $AE = 3.6$ सेमी, $BE = 2.1$ सेमी और $BC = 4.2$ सेमी तो DE का मान ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है :

$AE = 3.6$ सेमी, $EB = 2.1$ सेमी

(अत: $AB = AE + EB = 3.6 + 2.1 = 5.7$ सेमी)

$AD = 3.8$ सेमी, $BC = 4.2$ सेमी

$\Delta ABC \sim \Delta ADE$

त्रिभुज ABC और त्रिभुज ADE में,

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\angle ABC = \angle ADE$ (दिया है)

$\Delta ABC \sim \Delta ADE$

अत: $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$

DE का मान निकालने के लिए

$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$

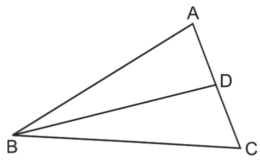
मान रखने पर,

$\frac{5.7}{3.8} = \frac{4.2}{DE} \Rightarrow 5.7DE = 3.8 \times 4.2$

$DE = \frac{4.2 \times 3.8}{5.7} \Rightarrow DE = \frac{15.96}{5.7} = 2.8$

$DE = 2.8$ सेमी।

प्रश्न 13. यदि ΔABC में, $AB = AC$ हो तथा AC पर एक बिन्दु D इस प्रकार हो कि $BC^2 = AC \times DC$, तो सिद्ध कीजिए कि $BD = BC$.



हल : दिया है, $BC^2 = AC \times DC$

इसे हम इस प्रकार लिख सकते हैं : $\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$

अब ΔABC और ΔBDC में, $\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC}$ (दिया है)

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ कोण)

अत: SAS समरूपता से, $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$\therefore$ त्रिभुज समरूप है :

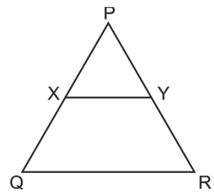
अत: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BC}$ ...(i)

दिया है $AB = AC$ इसे समी. (i) में रखने पर,

$\frac{AC}{BD} = \frac{AC}{BC}$

अत: $BD = BC$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 14. दी गई आकृति में, $XY \parallel QR$, $\frac{PQ}{XQ} = \frac{7}{3}$ तथा $PR = 4.2$ सेमी है, तो YR का मान ज्ञात कीजिए।



हल : चूँकि $XY \parallel QR$ थेल्य प्रमेय के अनुसार

$\frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR}$ ...(i)

दिया है : $\frac{PQ}{XQ} = \frac{7}{3}$

हम जानते हैं कि $PQ = PX + XQ$

$\frac{PX + XQ}{XQ} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{PX}{XQ} + 1 = \frac{7}{3}$

$\frac{PX}{XQ} = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$

$\left(\frac{PX}{XQ}\right.$ का मान समी. (i) में रखने पर$\left.\right)$

$\Rightarrow \frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{PY}{YR}$

हम जानते हैं कि, $PR = PY + YR = 4.2$ सेमी

अत: $PY = 4.2 - YR$

$\frac{4}{3} = \frac{4.2 - YR}{YR}$

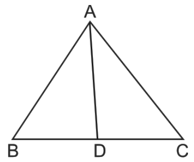
$4 \times YR = 3 \times (4.2 - YR)$

$4YR = 12.6 - 3YR \Rightarrow 7YR = 12.6$

$YR = \frac{12.6}{7} = 1.8 \Rightarrow YR = 1.8$ सेमी।

निबन्धात्मक प्रश्न

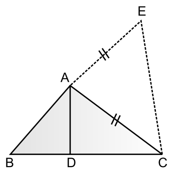
प्रश्न 1. दी गई आकृति में त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ है। सिद्ध कीजिए कि AD, कोण BAC का समद्विभाजक है।



हल : दिया है : ΔABC में, $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$ है।

सिद्ध करना है : $\angle BAD = \angle CAD$

रचना : BA को आगे E तक इस प्रकार बढ़ाया कि $AE = AC$ हो, फिर E को C से मिलाया।



दिया है : $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$

चूँकि रचना से $AC = AE$ हैं

$\therefore \quad \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AE}$ ...(i)

आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय (थेल्य प्रमेय) के विलोम से चूँकि रेखा AD भुजाओं BE और BC को समान अनुपात में काट रही है।

$\dfrac{BA}{AE} = \dfrac{BD}{DC}$ ...(ii)

$AD \parallel EC$

अब, $\angle BAD = \angle AEC$

(संगत कोण/क्योंकि $AD \parallel EC$)

$\angle CAD = \angle ACE$

(एकांतर कोण/क्योंकि $AD \parallel EC$)

ΔACE में,

$\because \; AE = AC$ (रचना से) इसलिए उनके सम्मुख कोण भी बराबर होगे

अत: $\angle AEC = \angle ACE$ ...(iii)

अत: समीकरण (i), (ii) और (iii) से स्पष्ट है कि

$\angle BAD = \angle CAD$

अत: AD कोण BAC को दो समान भागों में विभाजित करती है। **इति सिद्धम्।**

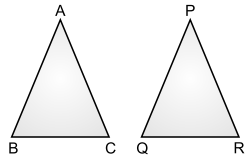
प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के परिमापों का अनुपात किन्हीं दो संगत भुजाओं के अनुपात के समान होता है।

हल : माना $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\because \Delta ABC \sim \Delta PQR$ इसलिए इनकी भुजाएँ समानुपाती होंगी

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = k$$

$$AB = k \times PQ, BC = k \times QR, AC = k \times PR$$



त्रिभुजों के परिमापों का अनुपात

$$\frac{\Delta ABC \text{ का परिमाप}}{\Delta PQR \text{ का परिमाप}} = \frac{AB + BC + AC}{PQ + QR + PR}$$

भाग रखने पर,

$$\frac{k(PQ) + k(QR) + k(PR)}{PQ + QR + PR} = \frac{k(PQ + QR + PR)}{PQ + QR + PR}$$

चूँकि k भुजाओं का अनुपात है, अत: परिणामों का अनुपात संगत भुजाओं के अनुपात के बराबर है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 3. एक ही कर्ण BC पर एक ही तरफ दो समकोण त्रिभुज ABC और DBC खींचे गये हैं। यदि AC और BD एक दूसरे को P पर प्रतिच्छेद करते हैं तो सिद्ध करो कि $AP \times PC = BP \times PD$

हल : दिया है : एक ही कर्ण BC पर दो समकोण त्रिभुज ΔABC और ΔDBC हैं।

AC और BD; P पर प्रतिच्छेद करते हैं।

$\angle APB = \angle DPC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle A = \angle D$

(दोनों 90° क्योंकि ये समकोण त्रिभुज हैं)

अत: AA समरूपता से $\angle APB \sim \angle DPC$

हम जानते हैं कि समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती है।

अत: $\dfrac{AP}{DP} = \dfrac{BP}{CP} \Rightarrow AP \times CP = BP \times DP$

इसे हमें ऐसे भी लिख सकते हैं।

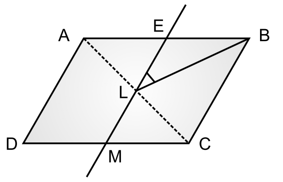
$AP \times PC = BP \times PD$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 4. एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की भुजा CD के मध्य बिन्दु M से गुजरने वाली रेखा BE खींची गई है, जो AC को L पर तथा AD को बढ़ाने पर E पर काटती है। सिद्ध कीजिए कि $EL = 2BL$.

हल : दिया है, बिन्दु M भुजा CD का मध्य बिन्दु है।

$DM = MC$

रेखा $BM = AC$ को L पर काटती है और AD को आगे बढ़ाने पर E पर काटती है।



सिद्ध करना है : $EL = 2BL$

उपपत्ति : ΔBMC और ΔEMD की तुलना करने पर

$$\angle MCB = \angle MDE$$

(एकांतर अत: कोण, क्योंकि $BC \parallel AE$)

$$MC = DM$$

(M, CD का मध्य बिन्दु है)

$\angle BMC = \angle EMD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अत: ASA नियम से, $\Delta BMC \cong \Delta EMD$

अत: $BC = DE$ (CPCT)

समांतर चतुर्भुज में $BC = AD$ होता है।

$\because$ $BC = DE$ (अभी सिद्ध किया है)

$\therefore$ $AE = AD + DE = BC + BC = 2BC$

अत: $AE = 2BC$

ΔAEL और ΔCBL की समरूपता के लिए,

$\angle EAL = \angle LCB$ (एकांतर कोण AE $\parallel$ BC)

$\angle ALE = \angle CLB$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अत: AA समरूपता से $\Delta AEL \sim \Delta CBL$

समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ अनुपातिक होती हैं :

$$\frac{EL}{BL} = \frac{AE}{BC}$$

हम जानते हैं कि $AE = 2BC$ (पहले सिद्ध किया है)

$$\therefore \quad \frac{EL}{BL} = \frac{2BC}{BC}$$

$$\frac{EL}{BL} = 2$$

$EL = 2BL$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 5. एक समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ में $AB \parallel CD$ तथा $AB = 2CD$ है। AB के समान्तर EF खींचा गया है जो AD को E में तथा BC को F में इस प्रकार काटता है कि $\frac{CF}{FB} = \frac{2}{3}$। विकर्ण AC रेखाखण्ड EF को G पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि $10EF = 7AB$.

हल : दिया है, एक समलम्ब $ABCD$ जिसमें

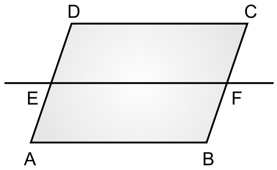
$$AB \parallel CD \text{ और } AB = 2CD$$

एक रेखा EF, AB के समांतर है $EF \parallel AB \parallel CD$

EF भुजा AD को E पर और BC को F पर काटती है।

$$\frac{CF}{FB} = \frac{2}{3}$$

विकर्ण AC, EF को बिन्दु G पर काटता है।



सिद्ध करना है : $10EF = 7AB$

$\because$ G, EF पर स्थित है, इसलिए $EF = EG + GF$ है।

त्रिभुज ABC में (ΔABC) यहाँ $GF \parallel AB$ हैं।

समरूपता के अनुसार $\Delta CGF \sim \Delta CAB$

अत: भुजाओं का अनुपात

$$\frac{GF}{AB} = \frac{CF}{CB}$$

हमें पात है $\frac{CF}{FB} = \frac{2}{3}$ यदि हम इसे बदलें

$CB = CF + FB \Rightarrow CB = 2k + 3k = 5k$

(जहाँ k एक स्थिरांक है)

तो $$\frac{CF}{CB} = \frac{2}{5} \Rightarrow GF = \frac{2}{5}AB \quad \text{...(i)}$$

ΔADC में, यहाँ $EG \parallel CD$ है।

$\because$ $EF \parallel AB \parallel CD$, तो BC पर जो अनुपात है, वही AD पर भी होगा :

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{3}{5} \text{ और } \frac{ED}{AD} = \frac{2}{5}$$

अब ΔCDA में $EG \parallel CD$

$$\frac{EG}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{3}{5} \Rightarrow EG = \frac{3}{5}CD$$

दिया है : $AB = 2CD$ तो $CD = \frac{1}{2}AB$

$$EG = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}AB = \frac{3}{10}AB \quad \text{...(ii)}$$

$$EF = EG + GF$$

समी. (i) और (ii) से,

$$EF = \frac{3}{10}AB + \frac{2}{5}AB$$

$$EF = \frac{3+4}{10}AB \Rightarrow EF = \frac{7}{10}AB$$

$10EF = 7AB.$ **इति सिद्धम्।**

● ●

7 निर्देशांक ज्यामिति

प्रश्नावली 7.1

प्रश्न 1. बिन्दुओं के निम्नलिखित युग्मों के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए :
(i) (2, 3), (4, 1) (ii) (– 5, 7), (–1, 3)
(iii) $(a, b), (-a, -b)$

हल : (i) $\therefore$ अभीष्ट दूरी $= \sqrt{(4-2)^2+(1-3)^2}$

$= \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ मात्रक

(ii) अभीष्ट दूरी $= \sqrt{(-1+5)^2+(3-7)^2}$

$= \sqrt{4^2+(-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ मात्रक

(iii) अभीष्ट दूरी $= \sqrt{(-a-a)^2+(-b-b)^2}$

$= \sqrt{(-2a)^2+(-2b)^2} = 2\sqrt{a^2+b^2}$ मात्रक

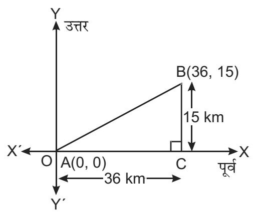
प्रश्न 2. बिन्दुओं (0, 0) और (36, 15) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। क्या अब आप अनुच्छेद 7·2 में दिए दोनों शहरों *A* और *B* के बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं?

हल : दिए गए बिन्दु हैं : $A(0, 0)$ और $B(36, 15)$

अभीष्ट दूरी $AB = \sqrt{(0-36)^2+(0-15)^2}$

$= \sqrt{1296+225} = \sqrt{1521} = 39$ मात्रक

अनुच्छेद 7·2 के अनुसार, दिए गए शहरों के कार्तीय निर्देशांक $A(0, 0)$ और $B(36, 15)$



$\therefore$ शहरों के बीच की दूरी

$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$= \sqrt{(36-0)^2+(15-0)^2} = \sqrt{1521} = 39$ km

बिन्दुओं के बीच की अभीष्ट दूरी 39 km है। **उत्तर**

प्रश्न 3. निर्धारित कीजिए कि क्या बिन्दु (1, 5), (2, 3) और (–2, – 11) संरेखी हैं?

हल : माना दिए गए बिन्दु क्रमानुसार $A(1, 5)$, $B(2, 3)$ और $C(-2, -11)$

$AB = \sqrt{(2-1)^2+(3-5)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(-2-2)^2+(-11-3)^2} = \sqrt{212}$

$CA = \sqrt{[1-(-2)]^2+[5-(-11)]^2} = \sqrt{265}$

उपर्युक्त दूरियों से स्पष्ट है कि किन्हीं दो का योगफल तीसरे के बराबर नहीं है। अत: दिए गए बिन्दु संरेखी नहीं हैं। **उत्तर**

प्रश्न 4. जाँच कीजिए कि क्या बिन्दु (5, – 2), (6, 4) और (7, – 2) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं?

हल : माना दिए गए बिन्दु क्रमानुसार $A(5, -2)$, $B(6, 4)$ और $C(7, -2)$ एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

$AB = \sqrt{(5-6)^2+(-2-4)^2} = \sqrt{37}$ मात्रक

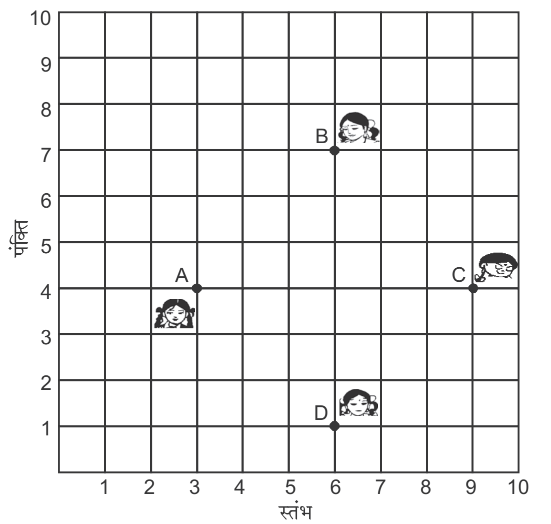
$BC = \sqrt{(6-7)^2+(4+2)^2} = \sqrt{37}$ मात्रक

$CA = \sqrt{(7-5)^2+(-2+2)^2} = 2$ मात्रक

उपर्युक्त दूरियों से स्पष्ट है कि $AB = BC = \sqrt{37}$

अत: दिए गए बिन्दु समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं। **उत्तर**

प्रश्न 5. किसी कक्षा में, चार मित्र बिन्दुओं *A*, *B*, *C* और *D* पर बैठे हुए हैं, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। चंपा



और चमेली कक्षा के अन्दर आती हैं और कुछ मिनट तक देखने के बाद, चंपा चमेली से पूछती है, 'क्या तुम नहीं सोचती हो कि *ABCD* एक वर्ग है ? 'चमेली इससे सहमत नहीं है। दूरी सूत्र का प्रयोग करके बताइए कि इनमें कौन सही है।

संकेत : दी गई आकृति में बिन्दुओं A, B, C व D के निर्देशांक क्रमशः (3, 4), (6, 7), (9, 4) और (6, 1) हैं।

अब $AB = \sqrt{(6-3)^2+(7-4)^2}$

$= \sqrt{(9-6)^2+(4-7)^2} = 3\sqrt{2}$ मात्रक

$CD = \sqrt{(6-9)^2+(1-4)^2}$

$DA = \sqrt{(3-6)^2+(4-1)^2} = 3\sqrt{2}$ मात्रक

$AC = \sqrt{(9-3)^2+(4-4)^2} = 6$ मात्रक

$BD = \sqrt{(6-6)^2+(1-7)^2} = 6$ मात्रक

उपर्युक्त दूरियों से स्पष्ट है कि

$AB = BC = CD = DA = 3\sqrt{2}$ मात्रक

$AC = BD = 6$ मात्रक

अतः चतुर्भुज $ABCD$ एक वर्ग है तथा चंपा की सोच सही है। **उत्तर**

प्रश्न 6. निम्नलिखित बिन्दुओं द्वारा बनने वाले चतुर्भुज का प्रकार (यदि कोई है तो) बताइए तथा अपने उत्तर के लिए कारण भी दीजिए :

(i) (– 1, – 2), (1, 0), (–1, 2), (–3, 0)
(ii) (– 3, 5), (3, 1), (0, 3), (– 1, – 4)
(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2) (मा.शि.बो.राज. 2017)

संकेत : (i) दिए गए बिन्दु $A(-1, -2)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 2)$ और $D(-3, 0)$ हैं।

$AB = \sqrt{[1-(-1)^2]+[0-(-2)]^2} = 2\sqrt{2}$ मात्रक

$BC = \sqrt{(-1-1)^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{2}$ मात्रक

$CD = \sqrt{[-3-(-1)]^2+(0-2)^2}$

$= \sqrt{(-3+1)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$ मात्रक

$DA = \sqrt{[-1-(-3)]^2+(-2-0)^2}$

$= \sqrt{(-1+3)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$ मात्रक

यहाँ हम देखते हैं कि, $AB = BC = CA = DA$

अब, $AC = \sqrt{[-1-(-1)]^2+[2-(-2)]^2}$

$= \sqrt{(-1+1)^2+(4)^2} = 4$ मात्रक

$\because AB^2 + BC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2$

$= 8 + 8 = 16 = (4)^2 = AC^2$

$\therefore \angle B$ समकोण है।

अतः दिए गये बिन्दुओं से बना चतुर्भुज $ABCD$ एक वर्ग है।

(ii) दिए गए बिन्दु $A(-3, 5)$, $B(3,1)$, $C(0, 3)$, और $D(-1, -4)$ हैं।

$AB = \sqrt{[3-(-3)]^2+(1-5)^2} = \sqrt{[3+3]^2+(-4)^2}$

$= \sqrt{(6)^2+16} = 2\sqrt{13}$ मात्रक

$BC = \sqrt{(0-3)^2+(3-1)^2} = \sqrt{13}$ मात्रक

$CA = \sqrt{(-3-0)^2+(5-3)^2} = \sqrt{13}$ मात्रक

$\because BC + CA = \sqrt{13}+\sqrt{13} = 2\sqrt{13} = AB$

अर्थात् A, B, C संरेखी हैं। अतः दिए गए बिन्दु चतुर्भुज नहीं बनाते हैं। **उत्तर**

(iii) दिए गए बिन्दु A (4, 5), B(7, 6), C(4, 3) और D(1, 2) हैं।

अब, $AB = \sqrt{(7-4)^2+(6-5)^2} = \sqrt{10}$ मात्रक

$BC = \sqrt{(4-7)^2+(3-6)^2} = 3\sqrt{2}$ मात्रक

$CD = \sqrt{(1-4)^2+(2-3)^2} = \sqrt{10}$ मात्रक

$DA = \sqrt{(4-1)^2+(5-2)^2} = 3\sqrt{2}$ मात्रक

$AC = \sqrt{(4-4)^2+(3-5)^2} = 2$ मात्रक

$BD = \sqrt{(1-7)^2+(2-6)^2} = 2\sqrt{13}$ मात्रक

उपर्युक्त दूरियों से स्पष्ट है कि $AB = CD$, $BC = DA$ और $AC \neq BD$ अर्थात् दिए गए बिन्दुओं से बने चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं तथा विकर्ण $AC \neq BD$ हैं।

अतः चतुर्भुज $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। **उत्तर**

प्रश्न 7. x-अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो (2, – 5) और (–2, 9) से समदूरस्थ है।

हल : माना x-अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक $(x, 0)$ हैं क्योंकि x-अक्ष के लिए y-निर्देशांक शून्य होता है।

$(x, 0)$ और $(2, -5)$ के बीच की दूरी

$= \sqrt{(x-2)^2+(0+5)^2} = \sqrt{x^2-4x+29}$

तथा $(x, 0)$ और $(-2, 9)$ के बीच की दूरी

$= \sqrt{(x+2)^2+(0-9)^2} = \sqrt{x^2+4x+85}$

प्रश्नानुसार, $\sqrt{x^2-4x+29} = \sqrt{x^2+4x+85}$

$\Rightarrow\ x^2 - 4x + 29 = x^2 + 4x + 85 \Rightarrow -8x = 85 - 29$

$\Rightarrow -8x = 56 \Rightarrow x = -7$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $(-7, 0)$ हैं। **उत्तर**

प्रश्न 8. y का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए बिन्दु P (2, – 3) और Q (10, y) के बीच की दूरी 10 मात्रक है।

हल : दिए हुए बिन्दु $P(2, -3)$ तथा $Q(10, y)$ है।

तब $$PQ = \sqrt{(10-2)^2 + [y-(-3)]^2}$$

$$= \sqrt{(8)^2 + (y+3)^2}$$

$\because$ दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी $(PQ) = 10$ मात्रक

$\therefore$ $$\sqrt{8^2 + (y+3)^2} = 10$$

हल करने पर,

$\Rightarrow$ $(y + 3) = \pm 6$

'+' चिह्न् लेने पर, $y + 3 = 6,\ y = 3$

'–' चिह्न् लेने पर, $y + 3 = -6,\ y = -9$

अतः y के अभीष्ट मान 3 और – 9 हैं। **उत्तर**

प्रश्न 9. यदि Q (0, 1); बिन्दुओं P (5, – 3) और R (x, 6) से समदूरस्थ है तो x के मान ज्ञात कीजिए। दूरियाँ QR और PR भी ज्ञात कीजिए।

हल : $\because Q(0, 1), P(5, -3)$ और $R(x, 6)$

$\because Q$, P तथा R से समदूरस्थ है।

$\therefore$ $PQ = QR$

$\therefore$ $$\sqrt{(5-0)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{(0-x)^2 + (1-6)^2}$$

$\Rightarrow$ $$\sqrt{(5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{x^2 + (-5)^2}$$

हल करने पर,

$\Rightarrow$ $x = \pm 4$

जब $x = 4$ हो, तो बिन्दु R के निर्देशांक (4, 6) होंगे।

$\therefore$ $$QR = \sqrt{(4-0)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{41}$$

$$PR = \sqrt{(4-5)^2 + (6+3)^2} = \sqrt{82}$$

जब $x = -4$ हो, तो बिन्दु R के निर्देशांक (– 4, 6) होंगे।

$\therefore$ $$QR = \sqrt{(-4-0)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{41}$$

$$PR = \sqrt{(-4-5)^2 + (6+3)^2} = 9\sqrt{2}$$

अतः $x = \pm 4$, $QR = \sqrt{41}$ और $PR = \sqrt{82}$ या $9\sqrt{2}$

प्रश्न 10. x और y में एक ऐसा संबंध ज्ञात कीजिए कि बिन्दु (x, y) बिन्दुओं (3, 6) और (– 3, 4) से समदूरस्थ हो।

अथवा

यदि बिन्दु $A(x, y)$, $B(3, 6)$ तथा $C(-3, 4)$ संरेखी है, तो दर्शाइए कि $x - 3y + 15 = 0$.

हल : माना अभीष्ट बिन्दु $P(x, y)$ है, जो कि दिए गए बिन्दु $A(3, 6)$ और $B(-3, 4)$ से समदूरस्थ है।

$PA = PB \Rightarrow PA^2 = PB^2$

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = [x-(-3)]^2 + (y-4)^2$$

सरल करने पर,

$\Rightarrow$ $3x + y = 5$

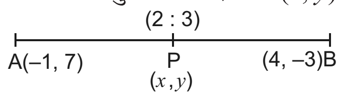
[(– 4) से दोनों पक्षों में भाग देने पर]

अतः अभीष्ट सम्बन्ध $3x + y - 5 = 0$ है। **उत्तर**

प्रश्नावली 7.2

प्रश्न 1. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (–1, 7) और (4, – 3) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है।

हल : माना अभीष्ट बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हैं।



विभाजन सूत्र से :

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} = \frac{2\times4 + 3\times(-1)}{2+3} = 1$$

और $$y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} = \frac{2\times(-3) + 3\times7}{2+3} = 3$$

अतः अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक (1, 3) हैं। **उत्तर**

प्रश्न 2. बिन्दुओं (4, – 1) और (–2, – 3) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को सम-त्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

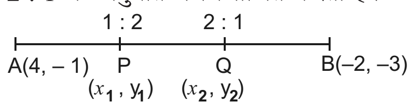
हल : माना कि $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ अभीष्ट बिन्दु हैं जो बिन्दुओं $A(4, -1)$ और $B(-2, -3)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को सम-त्रिभाजित करते हैं।

माना कि $AP = PQ = BQ = x$

$\therefore$ $PB = x + x = 2x$ तथा $AQ = x + x = 2x$

अब $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{x}{2x} = 1 : 2$ तथा $\dfrac{AQ}{BQ} = \dfrac{2x}{x} = = 2 : 1$

अर्थात् बिन्दु P, AB को 1 : 2 के अनुपात में तथा बिन्दु Q, AB को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।



बिन्दु P के लिए :

$$x_1 = \frac{1\times(-2)+2\times4}{1+2} = \frac{-2+8}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

और $$y_1 = \frac{1\times(-3)+2\times(-1)}{1+2} = \frac{-3+(-2)}{3} = -\frac{5}{3}$$

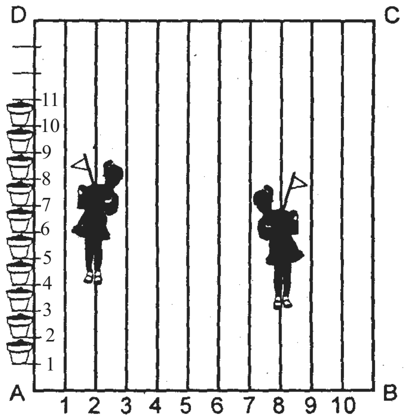
$\therefore$ अभीष्ट बिन्दु P के निर्देशांक $\left(2, -\frac{5}{3}\right)$ हैं।

बिन्दु Q के लिए : $$x_2 = \frac{2\times(-2)+1\times4}{2+1} = 0$$

और $$y_2 = \frac{2\times-3+1\times-1}{2+1} = -\frac{7}{3}$$

$\therefore$ अभीष्ट बिन्दु Q के निर्देशांक $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$ हैं।

प्रश्न 3. आपके स्कूल में खेलकूद क्रियाकलाप आयोजित करने के लिए, एक आयताकार मैदान $ABCD$ में, चूने से परस्पर 1 मीटर की दूरी पर पंक्तियाँ बनाई गई हैं। AD के अनुदिश परस्पर 1 मीटर की दूरी पर 100 गमले रखे गए हैं, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। निहारिका दूसरी पंक्ति में AD के $\frac{1}{4}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक हरा झण्डा गाड़ देती है। प्रीत आठवीं पंक्ति में AD के $\frac{1}{5}$ भाग के बराबर की दूरी दौड़ती है और वहाँ एक लाल झण्डा गाड़ देती है।
(i) दोनों झण्डों के बीच की दूरी क्या है ?
(ii) यदि रश्मि को एक नीला झण्डा इन दोनों झण्डों को मिलाने वाले रेखाखण्ड पर ठीक आधी दूरी (बीच में) पर गाड़ना हो, तो उसे अपना झण्डा कहाँ गाड़ना चाहिए ?



हल : (i) $\because$ भुजा AD पर 1 मीटर की दूरी पर 100 गमले रखे गए हैं।

$\therefore$ $AD = 100$ मीटर

निहारिका के झण्डे की स्थिति

$= $ दूसरी पंक्ति में AD के $\frac{1}{4}$ भाग के बराबर दूरी

$= \frac{1}{4}\times100 = 25$ मीटर

$\therefore$ हरे झण्डे के निर्देशांक (2, 25) हैं।

प्रीत के झण्डे (लाल) की स्थिति

$= $ आठवीं पंक्ति में AD के $\frac{1}{5}$ भाग के बराबर दूरी

$= \frac{1}{5}\times100 = 20$ मीटर

$\therefore$ लाल झण्डे के निर्देशांक (8, 20) हैं।

$\therefore$ हरे और लाल झण्डे के बीच की दूरी

$= \sqrt{(8-2)^2+(20-25)^2} = \sqrt{61}$ मीटर **उत्तर**

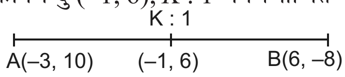
(ii) रश्मि को इन दोनों झण्डों को मिलाने वाले रेखाखण्ड के मध्य-बिन्दु पर नीला झण्डा गाड़ना है, तब मध्य-बिन्दु के

निर्देशांक $= \left(\frac{2+8}{2}, \frac{25+20}{2}\right) = (5,\ 22.5)$

अत: रश्मि को पाँचवीं पंक्ति में AD के अनुदिश 22·5 मीटर की दूरी पर झण्डा गाड़ना चाहिए। **उत्तर**

प्रश्न 4. बिन्दुओं (– 3, 10) और (6, – 8) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु (–1, 6) किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल : माना बिन्दुओं (– 3, 10) और (6, – 8) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु (–1, 6), $K : 1$ में विभाजित करता है, तब



विभाजन सूत्र से,

$$x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2} \Rightarrow -1 = \frac{K\times6+1\times(-3)}{K+1}$$

$$\Rightarrow \quad -K-1 = 6K-3$$

$$\Rightarrow \quad -K-6K = -3+1 \Rightarrow -7K = -2$$

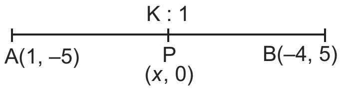
$$\Rightarrow \quad K = \frac{2}{7} \Rightarrow \frac{K}{1} = \frac{2}{7}$$

अत: अभीष्ट अनुपात $K : 1 = 2 : 7$ **उत्तर**

प्रश्न 5. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं $A(1, -5)$ और $B(-4, 5)$ को मिलाने वाला रेखाखण्ड x-अक्ष से विभाजित होता है। इस विभाजन बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि x-अक्ष पर अभीष्ट बिन्दु $P(x, 0)$ है जो $A(1, -5)$ और $B(-4, 5)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को

$K : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है।



बिन्दु P का y-निर्देशांक

$$0 = \frac{K \times 5 + 1 \times (-5)}{K+1} \Rightarrow 0 = \frac{5K-5}{K+1}$$

$\Rightarrow \quad 5K - 5 = 0 \Rightarrow 5K = 5$

$\Rightarrow \quad K = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow K = 1$

$\therefore$ बिन्दु P का अभीष्ट अनुपात $= 1 : 1$

अब बिन्दु P का x-निर्देशांक

$$x = \frac{K \times (-4) + 1 \times 1}{K+1} \Rightarrow x = \frac{-4K+1}{K+1}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-4+1}{1+1} = -\frac{3}{2} \qquad (\because K = 1)$$

अत: अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ हैं। **उत्तर**

प्रश्न 6. यदि बिन्दु (1, 2), (4, y), (x, 6) और (3, 5), इसी क्रम में लेने पर, एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हों, तो x और y ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि $A(1, 2)$, $B(4, y)$, $C(x, 6)$ तथा $D(3, 5)$ एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्षों के निर्देशांक है।

चूँकि $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है, इसलिए इसके विकर्ण AC तथा BD परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

$$AC \text{ के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक} = \left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = \left(\frac{1+x}{2}, 4\right)$$

$$BD \text{ के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक} = \left(\frac{4+3}{2}, \frac{y+5}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{y+5}{2}\right)$$

$\because AC$ और BD परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

$\therefore AC$ का मध्य-बिन्दु वही होगा जो BD का है।

$$\therefore \quad \frac{1+x}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow 1 + x = 7 \text{ या } x = 6$$

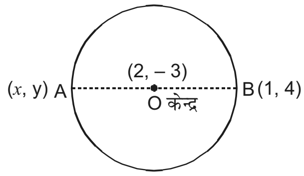
और $\quad \frac{y+5}{2} = 4 \Rightarrow y + 5 = 8$ या $y = 3$

अत: $\quad x = 6, y = 3$ **उत्तर**

प्रश्न 7. बिन्दु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केन्द्र (2, – 3) है तथा B के निर्देशांक (1, 4) हैं।

हल : केन्द्र के निर्देशांक = (2, – 3)

बिन्दु B के निर्देशांक = (1, 4)



माना बिन्दु A के निर्देशांक (x, y) हैं।

$\because$ बिन्दु O, व्यास AB का मध्य-बिन्दु है।

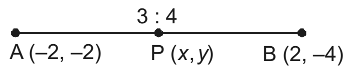
$$\therefore \text{ मध्य-बिन्दु } O \text{ के निर्देशांक} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$(2, -3) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+4}{2}\right)$$

हल करने पर, अभीष्ट बिन्दु A के निर्देशांक (3, – 10) हैं। **उत्तर**

प्रश्न 8. यदि A और B क्रमश: (– 2, –2) और (2, –4) हों, तो बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ताकि $AP = \frac{3}{7} AB$ हो, और P रेखाखण्ड AB पर स्थित है।

हल : माना कि अभीष्ट बिन्दु $P(x, y)$ है।



दिया है : $\quad AP = \frac{3}{7} AB \qquad$ ...(i)

परन्तु $\quad PB = AB - AP$

$\Rightarrow PB = AB - \frac{3}{7} AB \Rightarrow PB = \frac{7AB - 3AB}{7}$

$\Rightarrow \quad PB = \frac{4}{7} AB \qquad$ ...(ii)

समी. (i) व (ii) से,

$\therefore \quad AP : PB = \frac{3}{7} AB : \frac{4}{7} AB$

$\Rightarrow \quad AP : PB = 3 : 4$

$\therefore$ बिन्दुओं A और B को बिन्दु P, 3 : 4 के अनुपात में विभाजित करता है।

$\therefore$ बिन्दु P के निर्देशांक

$$x = \frac{3\times2+4\times(-2)}{3+4} = \frac{-2}{7}$$

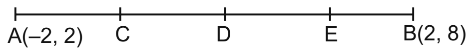
और $$y = \frac{3\times(-4)+4\times(-2)}{3+4} = \frac{-20}{7}$$

अत: बिन्दु P के अभीष्ट निर्देशांक $\left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7}\right)$ हैं। **उत्तर**

प्रश्न 9. बिन्दुओं $A(-2, 2)$ और $B(2, 8)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड AB को चार बराबर भागों में विभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

संकेत : माना कि C, D और E अभीष्ट बिन्दु हैं जो बिन्दुओं $A(-2, 2)$ और $B(2, 8)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को चार बराबर भागों में विभाजित करते हैं।

अब D, A और B का मध्य-बिन्दु है; C, A और D का मध्य-बिन्दु है; E, D और B का मध्य-बिन्दु है।



$\therefore \quad AC = CD = DE = EB$

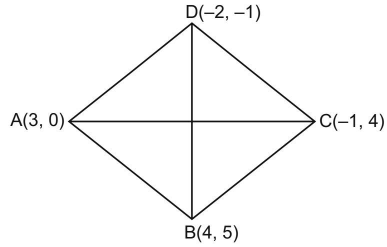
अब A और B के मध्य-बिन्दु D के निर्देशांक $= (0, 5)$

A और D के मध्य-बिन्दु C के निर्देशांक $= \left(-1, \frac{7}{2}\right)$

D और B के मध्य-बिन्दु E के निर्देशांक $= \left(1, \frac{13}{2}\right)$

प्रश्न 10. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में (3, 0), (4, 5), (– 1, 4) और (– 2, – 1) हैं।

हल : माना समचतुर्भुज $ABCD$ के शीर्षों के निर्देशांक $A(3, 0)$, $B(4, 5)$, $C(-1, 4)$ और $D(-2, -1)$ हैं।



विकर्ण $AC = \sqrt{(-1-3)^2+(4-0)^2} = 4\sqrt{2}$ मात्रक

और विकर्ण $BD = \sqrt{(-2-4)^2+(-1-5)^2} = 6\sqrt{2}$ मात्रक

समचतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ पहला विकर्ण $\times$ दूसरा विकर्ण

$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 24$ वर्ग मात्रक

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. यदि बिन्दु $(x, 3)$ और $(5, 7)$ के बीच की दूरी 5 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : सूत्र दूरी $= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

हल करने पर, $\Rightarrow x = 2, 8.$

प्रश्न 2. बिन्दु (2, 3) और (5, 6) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

संकेत : $d = \sqrt{(5-2)^2+(6-3)^2}$

प्रश्न 3. x-अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $A(6, 5)$ और $B(-4, 5)$ से समदूरस्थ है।

संकेत : माना बिन्दु $P(x, 0)$ है। (x-अक्ष पर $y = 0$ होता है)

क्योंकि बिन्दु P, A और B से समान दूरी पर है।

इसलिए $PA = PB$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर $PA^2 = PB^2$

प्रश्न 4. यदि $M(4, 5)$, रेखाखंड AB का मध्य बिन्दु है तथा A का निर्देशांक (3, 4) है, तो बिन्दु B के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार, $4 = \frac{3+x_B}{2} \Rightarrow x_B = 5$

तथा $5 = \frac{4+y_B}{2} \Rightarrow 6 = y_B$

अत: बिन्दु (5, 6).

प्रश्न 5. यदि बिन्दुओं $A(10, -6)$ तथा $B(k, 4)$ को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य-बिन्दु (a, b) है, तथा $a - 2b = 18$ है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $A(10, -6)$, $B(k, 4)$ और इनका मध्य बिन्दु (a, b) है, और $a - 2b = 18$

$a = \frac{10+k}{2}$ और $b = \frac{-6+4}{2} = -1$

दिया है, $a - 2b = 18$ $\quad \frac{10+k}{2} - 2\times(-1) = 18$

हल करने पर, $k = 22.$

प्रश्न 6. x का वह मान ज्ञात कीजिए जिससे $AB = BC$ हो जाए, जबकि बिन्दु A, B तथा C क्रमशः (6, – 1), $\left(1, \frac{7}{2}\right)$ और (x, 8) है।

संकेत : दूरी के सूत्र से BC तथा AB ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7. यदि $K(5, 4)$ रेखाखंड PQ का मध्य बिन्दु है तथा Q के निर्देशांक (2, 3) है तो P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

संकेतः $5 = \frac{x+2}{2}$; $4 = \frac{y+3}{2}$

प्रश्न 8. यदि $A(-2, -1)$, $B(a, 0)$, $C(4, b)$ और $D(1, 2)$ समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हों, तो a और b का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत :

समांतर चतुर्भुज में विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

मध्य बिन्दु AC = मध्य बिन्दु BD

प्रश्न 9. यदि बिन्दु $P(x, y)$ उस वृत्त पर स्थित हो, जिसका केन्द्र (3, – 2) है और जिसकी त्रिज्या 3 मात्रक है तो सिद्ध कीजिए कि $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$.

हल : दिया है, केन्द्र (3, – 2) तथा त्रिज्या = 3

$P(x, y)$ तो सिद्ध करना है : $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$

वृत्त का समीकरण

$$(x-h)^2 + (y-2)^2 = r^2$$
$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = (3)^2$$

सरल करने पर,

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$$

यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 10. यदि बिन्दु $P(2, 4)$ बिन्दुओं $A(5, K)$ तथा $B(K, 7)$ से समान दूरी पर हैं, तो K का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : P, AB का मध्य बिन्दु है।

अतः $PA = PB$

$$\sqrt{(2-5)^2 + (4-K)^2} = \sqrt{(2-K)^2 + (4-7)^2}$$

हल करने पर, $K = 3$.

प्रश्न 11. यदि बिन्दु $P(K - 1, 2)$ बिन्दुओं $A(3, K)$ तथा $B(K, 5)$ से समान दूरी पर हों तो K का मान ज्ञात कीजिए।

हल : P(K – 1, 2), $A(3, K)$, $B(K, 5)$

$$PA = PB \Rightarrow PA^2 = PB^2$$

दूरी का सूत्र = $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

मान रखने पर,

$$\{(K-1)-3\}^2 + (2-K)^2 = \{K-(K-1)\}^2 + (3)^2$$

हल करने पर, $K = 1$ या $K = 5$.

प्रश्न 12. आयत $AOBC$ के तीन शीर्ष $A(4, 0)$, $O(0, 0)$ तथा $C(0, 3)$ है। इसके विकर्ण की लम्बाई है।

संकेत : आयात की सम्मुख भुजाएँ समान तथा विकर्ण भी समान होते हैं।

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (5, 7) और (3, 9) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य बिन्दु वही हैं जो बिन्दुओं (8, 6) और (0, 10) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य बिन्दु है।

हल : (5, 7) और (3, 9) को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु

$$= \left(\frac{5+3}{2}, \frac{7+9}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{16}{2}\right) = (4, 8)$$

इसी प्रकार (8, 6) और (0, 10) के लिए,

$$\left(\frac{8+0}{2}, \frac{6+10}{2}\right) = (4, 8)$$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 14. x-अक्ष बिन्दुओं $A(3, -5)$ और $B(-4, 7)$ को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करता है?

संकेत : प्रश्नावली-7.2 प्रश्न-5 की भाँति हल करें।

प्रश्न 15. बिन्दु $P(-4, y)$ बिन्दुओं $A(-6, 10)$ तथा $B(3, -8)$ को मिलाने वाले रेखाखंड पर स्थित है, तो यह AB को किस अनुपात में बाँटता है? अतः y का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : प्रश्नावली-7.2 प्रश्न-4 की भाँति हल करें।

प्रश्न 16. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (– 2, 1) और (5, 4) को मिलाने वाली रेखा को 2 : 3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

संकेत :

x-निर्देशांक के लिए, $x = \frac{(2)(5) + (3)(-2)}{2+3}$

y-निर्देशांक के लिए $y = \frac{(2)(4) + (3)(1)}{5}$

प्रश्न 17. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (– 1, 7) और (4, – 3) को मिलाने वाले रेखाखंड को 2 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है।

संकेत :

x-निर्देशांक के लिए, $y = \frac{(2)(4) + (3)(-1)}{2+3}$

y-निर्देशांक के लिए, $y = \frac{(2)(-3) + (3)(7)}{5}$

प्रश्न 18. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (1, 1), (– 2, 7) और (3, – 3) संरेख हैं।

संकेत : यदि त्रिभुज क्षेत्रफल का मान शून्य आता है तो तीनों बिन्दु संरेख होते हैं।

प्रश्न 19. ज्ञात कीजिए कि बिन्दुओं $A(-3, 10)$ तथा $B(6, -8)$ को मिलाने वाले रेखाखंड पर स्थित बिन्दु $P(-1, y)$ इसे किस अनुपात में विभाजित करता है? y का मान भी ज्ञात कीजिए।

हल : माना बिंदु $P(-1, y)$ बिन्दुओं $A(-3, 10)$ और $B(6, -8)$ को $k : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है।

x-निर्देशांक के लिए

$x = \frac{kx_2 + 1x_1}{k+1}$ तथा y-निर्देशांक के लिए $y = \frac{ky_2 + 1y_1}{k+1}$

अनुपात $= AP : PB = 3 : (7-3) = 3 : 4$

विभाजन सूत्र से,

$$x = \frac{3(2)+4(-2)}{3+4} = \frac{-2}{7}$$

$$y = \frac{3(-4)+4(-2)}{7} = \frac{-12-8}{7} = \frac{-20}{7}$$

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. बिन्दु $A(x, y)$, बिन्दुओं $X(6, -6)$ तथा $Y(-4, -1)$ को मिलाने वाले रेखाखंड XY इस प्रकार स्थित है कि $\frac{XA}{XY} = \frac{2}{5}$ है। यदि बिन्दु $A(x, y)$ रेखा $3x + k(y+1) = 0$ पर भी स्थित है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : k का मान

दिया है : $x(6, -6), y(-4, -1)$ और $\frac{XA}{XY} = \frac{2}{5}$

यदि $XA = 2$ और $XY = 5$ तो

$$AY = 5 - 2 = 3$$

अतः अनुपात $m_1 : m_2 = 2 : 3$

विभाजन सूत्र से A के निर्देशांक

$$x = \frac{2(-4)+3(6)}{2+3} = 2$$

$$y = \frac{2(-1)+3(-6)}{2+3} = -4$$

बिन्दु $A(2, -4)$ रेखा $3x + k(y+1) = 0$ पर स्थित है,

मान रखने पर,

$$3(2) + k(-4+1) = 0 \Rightarrow k = 2.$$

प्रश्न 2. यदि A तथा B क्रमशः $(-2, -2)$ और $(2, -4)$ हों तो बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ताकि $AP = \frac{3}{7} AB$ हो और P रेखाखंड AB पर स्थित है।

संकेत : माना बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) है।

दिया है : $A(-2, -2), B(2, -4)$ और $AP = \frac{3}{7} AB$

प्रश्न 3. दर्शाइए कि ΔABC जहाँ $A(-2, 0), B(2, 0), C(0, 2)$ तथा ΔPQR जहाँ $P(-4, 0), Q(4, 0), R(0, 4)$ हैं, समरूप त्रिभुज है।

संकेत : समरूप त्रिभुज दिखाने के लिए भुजाओं का अनुपात समान दिखाओ।

प्रश्न 4. क्या बिन्दु $(10, -18), (3, 6)$ तथा $(-5, 2)$ एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष है?

संकेत: समद्विबाहु त्रिभुज के लिए तीनों भुजाओं की लम्बाई समान दिखाओ।

प्रश्न 5. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(-3, -2), (5, -2)$ और $(5, 4)$ हैं। यह भी सिद्ध कीजिए कि यह समकोण त्रिभुज हैं।

संकेत: त्रिभुज के क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

समकोण त्रिभुज की जाँच के लिए, कर्ण का वर्ग = आधार और लम्ब के वर्गो का योग।

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(-2, -1), (-1, 1), (5, -2)$ और $(4, -4)$ एक आयत के शीर्ष हैं।

संकेत : सम्मुख भुजाएँ और विकर्ण बराबर होते हैं।

प्रश्न 7. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष, इसी क्रम में $(3, 0), (4, 5), (-1, 4)$ तथा $(-2, -1)$ हैं।

संकेत : क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}[3(5) - 4(0) + 4(4) - (-1)(5) + (-1)(-1) - (-2)(4) + (-2)(0) - 3(-1)]$$

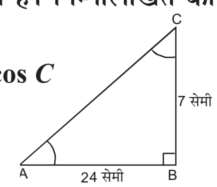
●●

8 त्रिकोणमिति का परिचय

प्रश्नावली 8·1

प्रश्न 1. ΔABC में, जिसका कोण B समकोण है, $AB = 24$ सेमी और $BC = 7$ सेमी है। निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin A, \cos A$, (ii) $\sin C, \cos C$



हल : समकोण ΔABC में,

$$\angle B = 90°$$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= (24)^2 + (7)^2 = 576 + 49 = 625$$

$$AC = 25 \text{ सेमी}$$

(i) समकोण ΔABC में,

$$\sin A = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{25} \text{ और } \cos A = \frac{BC}{AC} = \frac{24}{25}$$

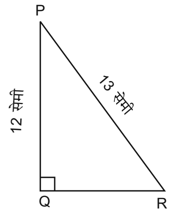
उत्तर

(ii) समकोण ΔABC में,

$$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25} \text{ और } \cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$$

उत्तर

प्रश्न 2. चित्र में, $\tan P - \cot R$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल : समकोण ΔPQR में,

पाइथागोरस प्रमेय से,

$PR^2 = QR^2 + PQ^2$

$\Rightarrow (13)^2 = QR^2 + (12)^2$

$\Rightarrow 169 = QR^2 + 144$

$\Rightarrow QR^2 = 169 - 144 \Rightarrow QR^2 = 25$

$\therefore QR = 5$ सेमी

$$\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12} \text{ और } \cot R = \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12}$$

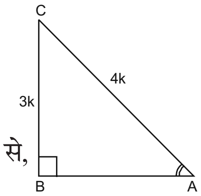
तब $\quad \tan P - \cot R = \frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 0$

प्रश्न 3. $\sin A = \frac{3}{4}$ तो $\cos A$ और $\tan A$ के मान परिकलित कीजिए।

हल : माना कि ABC एक समकोण Δ है जिसमें $\angle B = 90°$

$\angle A$ के लिए,

आधार $= AB$, लम्ब $= BC$ तथा कर्ण $= AC$



$$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$$

माना कि $\quad BC = 3k$ तथा $AC = 4k$

समकोण ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow (4k)^2 = AB^2 + (3k)^2 \Rightarrow 16k^2 = AB^2 + 9k^2$

$\Rightarrow AB^2 = 16k^2 - 9k^2 \Rightarrow AB^2 = 7k^2$

$\therefore \quad AB = k\sqrt{7}$

$$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{k\sqrt{7}}{4k} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB} = \frac{3k}{k\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

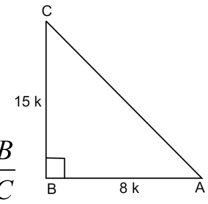
प्रश्न 4. यदि $15 \cot A = 8$ हो, तो $\sin A$ और $\sec A$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि ABC एक समकोण Δ है, जिसमें $\angle B = 90°$.

$\angle A$ के लिए,

आधार $= AB$, लम्ब $= BC$ तथा कर्ण $= AC$

$15 \cot A = 8$ (दिया है)



$\Rightarrow \quad \cot A = \frac{8}{15}$

$$\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{AB}{BC}$$

$\Rightarrow \quad \frac{AB}{BC} = \frac{8}{15}$

माना कि $\quad AB = 8k$ तथा $BC = 15k$

समकोण ΔABC में,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (8k)^2 + (15k)^2$

$= 64k^2 + 225k^2 = 289k^2$

$\Rightarrow \quad AC = \sqrt{289k^2}$

$\therefore \quad AC = 17k$

$$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}$$

$$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{AB} = \frac{17k}{8k} = \frac{17}{8}$$

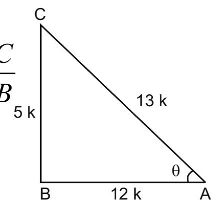
अत: $\quad \sin A = \frac{15}{17}$ तथा $\sec A = \frac{17}{8}$ **उत्तर**

प्रश्न 5. यदि $\sec \theta = \frac{13}{12}$ हो, तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित कीजिए।

हल : माना कि ABC एक समकोण Δ है, जिसमें $\angle B = 90°$ और $\angle A = \theta$ है।

$\angle\theta$ के लिए, आधार $= AB$, लम्ब $= BC$

तथा कर्ण $= AC$



दिया है, $\sec \theta = \frac{13}{12} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{AB}$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{13}{12}$$

माना कि $\quad AC = 13k$ और $AB = 12k$

समकोण ΔABC में,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow \quad (13k)^2 = (12k)^2 + BC^2$

$\Rightarrow \quad BC^2 = (13k)^2 - (12k)^2$

$= 169k^2 - 144k^2 = 25k^2$

$\therefore \quad BC = 5k$

अब $\quad \sin\theta = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{5k}{13k} = \dfrac{5}{13}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{12k}{13k} = \dfrac{12}{13}$

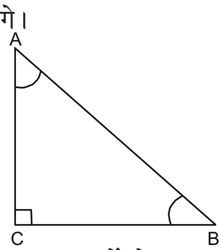
$\tan\theta = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{5k}{12k} = \dfrac{5}{12}$

$\cot\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12k}{5k} = \dfrac{12}{5}$

$\text{cosec}\,\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{13k}{5k} = \dfrac{13}{5}$

प्रश्न 6. यदि $\angle A$ और $\angle B$ न्यूनकोण हैं, जहाँ $\cos A = \cos B$, तो दिखाइए कि $\angle A = \angle B$.

हल : माना कि ABC एक समकोण Δ है, जिसमें कोण $C = 90°$, तब $\angle A$ तथा $\angle B$ न्यूनकोण होंगे।



दिया है : $\quad \cos A = \cos B$

$\Rightarrow \quad \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{AB}$

$\Rightarrow \quad AC = BC$

ΔABC में, $\quad AC = BC$

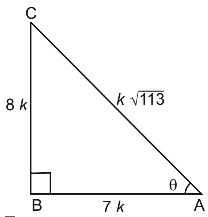
$\because \Delta ABC$ एक समद्विबाहु Δ है और बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

$\therefore \quad \angle A = \angle B$ **इति सिद्धम्**

प्रश्न 7. यदि $\cot\theta = \dfrac{7}{8}$, तो ज्ञात कीजिए—

(i) $\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\cot^2\theta$

हल : माना कि ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle B = 90°$ और $\angle A = \theta$ है।



आधार $= AB$, लम्ब $= BC$

तथा कर्ण $= AC$

दिया है, $\quad \cot\theta = \dfrac{7}{8}$

परन्तु $\quad \cot\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{7}{8}$

माना कि $\quad AB = 7k$ तथा $BC = 8k$

समकोण ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (7k)^2 + (8k)^2 = 49k^2 + 64k^2 = 113k^2$

$\Rightarrow \quad AC = \pm\sqrt{113k^2} = k\sqrt{113}$

$\sin\theta = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{8k}{k\sqrt{113}} = \dfrac{8}{\sqrt{113}}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{7k}{k\sqrt{113}} = \dfrac{7}{\sqrt{113}}$

(i) $\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$= \dfrac{\left(1+\dfrac{8}{\sqrt{113}}\right)\left(1-\dfrac{8}{\sqrt{113}}\right)}{\left(1+\dfrac{7}{\sqrt{113}}\right)\left(1-\dfrac{7}{\sqrt{113}}\right)} = \dfrac{49}{113} \times \dfrac{113}{64} = \dfrac{49}{64}$

अत: $\dfrac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \dfrac{49}{64}$ **उत्तर**

(ii) $\cot^2\theta = [\cot\theta]^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^2 = \dfrac{49}{64}$

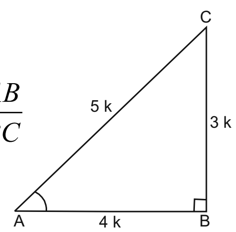
प्रश्न 8. यदि $3\cot A = 4$, तो जाँच कीजिए कि $\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है या नहीं।

हल : माना कि ABC एक समकोण Δ है, जिसमें कोण B समकोण है।

$\angle A$ के लिए,

आधार $= AB$, लम्ब $= BC$ तथा कर्ण $= AC$

दिया है, $\quad 3\cot A = 4$



$\Rightarrow \quad \cot A = \dfrac{4}{3}$

परन्तु $\quad \cot A = \dfrac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \dfrac{AB}{BC}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{4}{3} = \dfrac{AB}{BC}$

माना कि $\quad AB = 4k, BC = 3k$

समकोण ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2$

$= 16k^2 + 9k^2 = 25k^2$

$\Rightarrow \quad AC = \pm\sqrt{25k^2} \Rightarrow AC = 5k$

$$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

$$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4}$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$= \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{\frac{16-9}{16}}{\frac{16+9}{16}} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}} = \frac{7}{25} \quad \ldots(1)$$

$$\text{R.H.S.} = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16-9}{25} = \frac{7}{25}$$

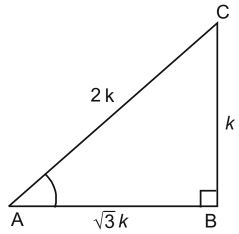
L.H.S. = R.H.S.

प्रश्न 9. त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$
(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

हल : दिया है, एक ΔABC, जिसका कोण B समकोण है।

दिया है, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$



परन्तु $\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB}$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

माना कि $AB = \sqrt{3}k$ तथा $BC = k$

समकोण ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= (\sqrt{3}k)^2 + (k)^2 = 3k^2 + k^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow \quad AC = \pm 2k, \; AC = 2k$$

($AC \neq -2k$, क्योंकि दूरी ऋणात्मक नहीं हो सकती)

$\angle A$ के लिए,

आधार = AB, लम्ब = BC, कर्ण = AC

$$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

और $$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

अब $\angle C$ के लिए,

आधार = BC, लम्ब = AB तथा कर्ण = AC

$$\sin C = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

और $$\cos C = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

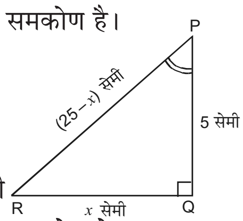
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

प्रश्न 10. ΔPQR में, जिसका कोण Q समकोण है, $PR + QR = 25$ सेमी और $PQ = 5$ सेमी है। $\sin P$, $\cos P$ और $\tan P$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, ΔPQR में कोण Q समकोण है।



तथा $PR + QR = 25$ सेमी

$PQ = 5$ सेमी

माना कि $QR = x$ सेमी

$\therefore \quad PR = (25 - x)$ सेमी

अब समकोण ΔPQR में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$$PR^2 = QR^2 + PQ^2$$

$$\Rightarrow \quad (25-x)^2 = (x)^2 + (5)^2$$

$$\Rightarrow \quad 625 - 50x + x^2 = x^2 + 25$$

$$\Rightarrow \quad -50x = -600$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-600}{-50} = 12 \text{ सेमी}$$

$\therefore \quad QR = 12$ सेमी

$PR = 25 - 12 = 13$ सेमी

$$\sin P = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{RQ}{RP} = \frac{12}{13}$$

$$\cos P = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{PQ}{RP} = \frac{5}{13}$$

$$\tan P = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{RQ}{PQ} = \frac{12}{5}$$ **उत्तर**

प्रश्न 11. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए :
(i) tan A का मान सदैव 1 से कम होता है।
(ii) कोण A के किसी मान के लिए sec $A = \frac{12}{5}$
(iii) cos A, कोण A के cosecant के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।
(iv) cot A, cot और A का गुणनफल होता है।
(v) किसी भी कोण θ के लिए sin θ = $\frac{4}{3}$

हल : (i) ∵ $\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

tan A का मान 1 से कम तभी हो सकता है, जब लम्ब, आधार से छोटा हो। परन्तु ऐसा सदैव होना आवश्यक नहीं है। अत: कथन असत्य है।

(ii) $\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{12}{5}$

चूँकि sec A का मान सदैव 1 के बराबर या 1 से बड़ा होता है। अत: कथन सत्य है।

(iii) ∵ cos A कोण A की cosine का संक्षिप्त रूप होता है, जबकि cosecant A का अर्थ cosec A है
अत: दिया हुआ कथन असत्य है।

(iv) cot A का अर्थ ∠A के cotangent से है।
स्वतन्त्र रूप में cot का कोई अस्तित्व ही नहीं है। अत: cot और A का गुणनफल कभी भी cot A नहीं हो सकता है।
अत: दिया हुआ कथन असत्य है।

(v) किसी समकोण त्रिभुज में कोण θ के लिए, यदि sin θ = $\frac{4}{3}$, तो इसका अर्थ है कि θ की सम्मुख भुजा और कर्ण का अनुपात 4 : 3 है।
परन्तु कर्ण, समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा होती है। अत: दिया गया कथन असत्य है।

प्रश्नावली 8·2

प्रश्न 1. निम्नलिखित के मान निकालिए :
(i) sin 60° cos 30° + sin 30° cos 60°
(ii) 2 tan² 45° + cos² 30° – sin² 60°
(iii) $\frac{\cos 45°}{\sec 30° + \text{cosec } 30°}$
(iv) $\frac{\sin 30° + \tan 45° - \text{cosec } 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$
(v) $\frac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$

संकेत: (i) sin 60° cos 30° + sin 30° cos 60°

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \text{ उत्तर}$$

(ii) 2 tan² 45° + cos² 30° – sin² 60°

$$= 2(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 \text{ उत्तर}$$

(iii) $\frac{\cos 45°}{\sec 30° + \text{cosec } 30°}$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + (2)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}}$$

हल करने पर, $= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$

(iv) $\frac{\sin 30° + \tan 45° - \text{cosec } 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$

$$= \frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2}} = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{11}$$

(v) $\frac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$

$$= \frac{\left[5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left[4 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right] - (1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{5}{4} + \frac{16}{3} - 1}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{15 + 64 - 12}{12}}{\frac{1+3}{4}} = \frac{\frac{67}{12}}{\frac{4}{4}} = \frac{67}{12} \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 2. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिए :

(i) $\frac{2\tan 30°}{1 + \tan^2 30°} =$

(A) sin 60° **(B) cos 60°**
(C) tan 60° **(D) sin 30°**

(ii) $\frac{1 - \tan^2 45°}{1 + \tan^2 45°} =$

(A) tan 90° (B) 1 (C) sin 45° (D) 0

(iii) sin 2A = 2 sin A तब सत्य होता है, जबकि A बराबर है :

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

(iv) $\frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$ **बराबर है :**

(A) cos 60° **(B) sin 60°**

(C) tan 60° **(D) sin 30°**

हल : (i) (A) **(ii)** (D)

(iii) (A) **(iv)** (C)

प्रश्न 3. यदि tan $(A+B)=\sqrt{3}$ और tan $(A-B)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $0° < A+B \le 90°$; $A > B$ तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\tan(A+B) = \sqrt{3}$

$= \tan 60°$

$\Rightarrow \quad A+B = 60° \quad \ldots(1)$

और $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$

$\Rightarrow \quad A-B = 30° \quad \ldots(2)$

समीकरण (1) और (2) को हल करने पर,

$A = 45°$ और $B = 15°$. **उत्तर**

प्रश्न 4. बताइए कि निम्नलिखित में कौन-कौन सत्य हैं या असत्य हैं। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए : (i) sin $(A+B)$ = sin A + sin B (ii) θ में वृद्धि होने के साथ sin θ के मान में भी वृद्धि होती है। (iii) θ में वृद्धि होने के साथ cos θ के मान में भी वृद्धि होती है। (iv) θ के सभी मानों पर sin θ = cos θ (v) $A = 0°$ पर cot A परिभाषित नहीं है।

हल : (i) हल के लिए जाँच कीजिए।

(ii) ∵ θ के मान 0°, 30°, 45°, 60°, 90° लेने पर,

$\sin 0° = 0,\ \sin 30° = \frac{1}{2},\ \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 90° = 1$

अत: θ का मान बढ़ने पर sin θ का मान बढ़ता है। परन्तु यह θ = 90° तक ही सही है, आगे नहीं।

∴ दिया गया कथन सत्य है। **उत्तर**

(iii) ∵ $\cos 0° = 1$ और $\cos 90° = 0$

अत: θ का मान बढ़ाने पर cos θ के मान में वृद्धि नहीं होती।

∴ दिया गया कथन असत्य है। **उत्तर**

(iv) ∵ $\sin\theta = \cos\theta$

θ = 30° लेने पर

$\sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $\sin 30° \ne \cos 30°$

∴ दिया गया कथन असत्य है। **उत्तर**

(v) ∵ $\tan 0° = 0$

$\cot 0° = \frac{1}{\tan 0°} = \frac{1}{0}$ = अपरिभाषित

$A = 0°$ पर cot A अपरिभाषित है।

∴ दिया गया कथन सत्य है। **उत्तर**

प्रश्नावली 8·3

प्रश्न 1. त्रिकोणमितीय अनुपातों sin A, sec A और tan A को cot A के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : (i) हल के लिए जाँच कीजिए।

$= \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$

(ii) इसी प्रकार, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

या $= 1 + \frac{1}{\cot^2 A} = \frac{\cot^2 A + 1}{\cot^2 A}$

या $\sec A = \sqrt{\frac{1+\cot^2 A}{\cot^2 A}}$

(iii) $\tan A = \frac{1}{\cot A}$ **उत्तर**

प्रश्न 2. ∠A के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को sec A के पदों में लिखिए।

हल : (i) ∵ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\Rightarrow \sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{1}{\sec^2 A} = \frac{\sec^2 A - 1}{\sec^2 A}$

$\Rightarrow (\sin A)^2 = \frac{\sec^2 A - 1}{\sec^2 A} \Rightarrow \sin A = \sqrt{\frac{\sec^2 A - 1}{\sec^2 A}}$

(ii) $\cos A = \frac{1}{\sec A}$

(iii) $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

$\Rightarrow \tan^2 A = \sec^2 A - 1$

$\Rightarrow (\tan A)^2 = \sec^2 A - 1$

(iv) $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$

$= \frac{1}{\frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}} = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

(v) $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

प्रश्न 3. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए :

(i) $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$ बराबर है :

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii) $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\text{cosec}\,\theta)$ बराबर है :

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) – 1

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ बराबर है :

(A) $\sec A$ (B) $\sin A$ (C) $\text{cosec}\, A$ (D) $\cos A$

(iv) $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}$ बराबर है :

(A) $\sec^2 A$ (B) – 1

(C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

हल : (i) (B) (ii) (C)

(iii) (D) (iv) (D)

प्रश्न 4. निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित हैं, न्यूनकोण हैं :

(i) $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

(iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

(iv) $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

(v) सर्वसमिका $\text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ को लागू करके

$$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \text{cosec}\, A + \cot A$$

(vi) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

(vii) $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \text{cosec}\, A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\text{cosec}\, A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

(x) $\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

हल : (i) $(\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

L.H.S. $= (\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2$

$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$

$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ = R.H.S. इति सिद्धम्।

(ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

L.H.S. $= \frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A}$

$= \frac{\cos^2 A + (1+\sin A)^2}{\cos A(1+\sin A)}$

$= \frac{(\cos^2 A + \sin^2 A) + 1 + 2\sin A}{\cos A\,(1+\sin A)}$

$= \frac{1+1+2\sin A}{\cos A(1+\sin A)} = \frac{2(1+\sin A)}{\cos A\,(1+\sin A)}$

$= \frac{2}{\cos A} = 2\sec A$ = R.H.S. इति सिद्धम्।

(iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta$

L.H.S. $= \frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta\,(\sin\theta - \cos\theta)} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\,(\sin\theta - \cos\theta)}$

$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta - \cos\theta)}$

$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta - \cos\theta)}$

$= \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta} + 1 = \sec\theta.\text{cosec}\,\theta + 1$

$= 1 + \sec\theta.\text{cosec}\,\theta$ = R.H.S. इति सिद्धम्।

(iv) $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1+\sec A}{\sec A}$$

$$= \frac{\cos A+1}{\cos A}\times\frac{\cos A}{1} = \frac{1+\cos A}{1}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{1-\cos A} \quad (\because 1-\cos^2 A = \sin^2 A)$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्।

(v) $\dfrac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos A-\sin A+1}{\cos A+\sin A-1} = \frac{\dfrac{\cos A-\sin A+1}{\sin A}}{\dfrac{\cos A+\sin A-1}{\sin A}},$$

$$= \frac{\cot A-1+\operatorname{cosec} A}{\cot A+1-\operatorname{cosec} A} = \frac{(\cot A+\operatorname{cosec} A)-1}{(1-\operatorname{cosec} A+\cot A)}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec} A+\cot A)\,[1-(\operatorname{cosec} A-\cot A)]}{(1-\operatorname{cosec} A+\cot A)}$$

$= (\operatorname{cosec} A + \cot A) =$ R.H.S.

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्।

(vi) $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

$$\text{L.H.S.} = \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)\,(1+\sin A)}{(1-\sin A)\,(1+\sin A)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{(1)^2-(\sin A)^2}} = \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}$$

$= \sec A + \tan A =$ R.H.S. इति सिद्धम्।

(vii) $\dfrac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta} = \tan\theta$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin\theta-2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta-\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta\,(1-2\sin^2\theta)}{\cos\theta\,(2\cos^2\theta-1)}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्।

(viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

L.H.S.

$= (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$

$= (\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2\sin A\operatorname{cosec} A) + (\cos^2 A + \sec^2 A + 2\cos A\sec A)$

$= (\sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2) + (\cos^2 A + \sec^2 A + 2)$

$= \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + \cos^2 A + \sec^2 A + 4$

$= \sin^2 A + \cos^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A + 4$

$= 1 + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A + 4$ $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A + 5$

$= (1 + \cot^2 A) + (1 + \tan^2 A) + 5$

$= \tan^2 A + \cot^2 A + 7 =$ R.H.S.

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्।

(ix) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A)\ \dfrac{1}{\tan A+\cot A}$

L.H.S. $= (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A)$

$$= \left(\operatorname{cosec} A-\frac{1}{\operatorname{cosec} A}\right)\left(\sec A-\frac{1}{\sec A}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}^2 A-1}{\operatorname{cosec} A}\times\frac{\sec^2 A-1}{\sec A} = \frac{\cot^2 A}{\operatorname{cosec} A}\times\frac{\tan^2 A}{\sec A}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{\tan A}\times\tan A\right)^2}{\dfrac{1}{\sin A\cos A}} = \frac{(1)^2}{\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sin^2 A}{\sin A\cos A}+\dfrac{\cos^2 A}{\sin A\cos A}}$$

$$= \frac{1}{\tan A+\cot A} = \text{R.H.S.}$$

$\therefore$ L.H.S. = R.H.S. इति सिद्धम्।

(x) $\left(\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right)=\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A.$

हल : L.H.S. $=\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\frac{\sec^2 A}{\text{cosec}^2 A}$

$=\left(\frac{\sec A}{\text{cosec } A}\right)^2=\left(\frac{1}{\cos A}\times\frac{\sin A}{1}\right)^2=\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2$

$= (\tan A)^2 = \tan^2 A = $ R.H.S.

R.H.S. $=\left(\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2$

$=\left[\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}\times\frac{\sin A}{\sin A-\cos A}\right]^2$

$=\left[\frac{-(\sin A-\cos A)}{\cos A}\times\frac{\sin A}{(\sin A-\cos A)}\right]^2$

$=\left[\frac{-\sin A}{\cos A}\right]^2 = [-\tan A]^2$

$= \tan^2 A =$ R.H.S.

$\therefore$ L.H.S. = M.H.S. = R.H.S. **इति सिद्धम्।**

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. त्रिकोणमितीय अनुपात tan A को sec A के पदों मे लिखिए।

संकेत : $\tan A = \pm\sqrt{(\sec^2 A-1)}$

प्रश्न 2. sin 60° sec 30° tan 45° का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\times 1 = \frac{(\sqrt{3}\times 2)}{(2\times\sqrt{3})}=1$

प्रश्न 3. $\tan^2 60° + 3\cos^2 30°$ का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : $3+3\left(\frac{3}{4}\right)=3+\frac{9}{4}=\frac{12}{4}+\frac{9}{4}=\frac{21}{4}.$

प्रश्न 4. $\sin^2 30° + 2\cos^2 45° + 3\tan^2 60°$ का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : $\frac{1}{4}+2\left(\frac{1}{2}\right)+3(3)=\frac{1}{4}+1+9=\frac{1}{4}+10=\frac{41}{4}$

प्रश्न 5. $\frac{\cos 45°-\cos 60°}{\sin 45°+\sin 30°}$ का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\sin 45° = \frac{1}{2}$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$ हल करें।

प्रश्न 6. यदि $3\cot A = 4$ तो $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)}{\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)}=\frac{\left(\frac{7}{16}\right)}{\left(\frac{25}{16}\right)}=\frac{7}{25}.$

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि—

$$\tan^4\theta+\tan^2\theta=\sec^4\theta-\sec^2\theta.$$

हल : उपपत्ति:

दायाँ पक्ष $=\sec^4\theta-\sec^2\theta$

$=\sec^2\theta(\sec^2\theta-1)=\sec^2\theta.\tan^2\theta$

बायाँ पक्ष $=\tan^4\theta+\tan^2\theta$

$=\tan^2\theta(\tan^2\theta+1)]=\tan^2\theta.\sec^2\theta$

चूँकि $\tan^2\theta.\sec^2\theta=\sec^2\theta.\tan^2\theta$

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए—

$$\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}+\frac{\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta}=\sec^2\theta-\cos^2\theta.$$

हल : बायाँ पक्ष $=\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}+\frac{\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta}$

$=\frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}+\frac{\cot^2\theta}{\text{cosec}^2\theta}=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष = 1 **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए—

$$\sec^2\theta-\frac{\sin^2\theta-2\sin^4\theta}{2\cos^4\theta-\cos^2\theta}=1$$

हल : बायाँ पक्ष $= \dfrac{(\sin A - 2\sin^3 A)}{(2\cos^3 A - \cos A)}$

$$= \frac{[\sin A(1-2\sin^2 A)}{[\cos A(2\cos^2 A - 1)]}$$

$= \dfrac{\sin A}{\cos A} = \tan A =$ दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए—

$$\sqrt{\frac{\mathbf{1-\sin\theta}}{\mathbf{1+\sin\theta}}} = \mathbf{\sec\theta - \tan\theta}$$

हल : बायाँ पक्ष $= \sqrt{\dfrac{(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)}}$

$$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{(1-\sin^2\theta)}} = \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{(1-\sin^2\theta)}}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}\right]} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$= \sec\theta - \tan\theta =$ दायाँ पक्ष।

प्रश्न 11. $3 \sin 60° - 4 \sin^3 60°$ का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : $3 \sin 60° - 4 \sin^3 60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 0.$

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि—
$4 \sin 30° \sin^2 60° + 3 \cos 60° \tan 45° = 2 \sec^2 45° - \text{cosec } 90°$

संकेत : $4\times\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2}$ ...(i)

तथा $3\times\dfrac{1}{2}\times 1 = \dfrac{3}{2}$ ...(ii)

(i) और (ii) को जोड़ने पर बायाँ पक्ष $= \dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2} = 3$

दायाँ पक्ष : $\sec 45° = \sqrt{2}$, $\sec^2 45° = 2$

$\text{cosec } 90° = 1$

मान रखने पर, $2 \times 2 - 1= 4 - 1 = 3$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष।

प्रश्न 13. यदि $\cot (A + B) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ और $\cot (A - B) = \sqrt{3}$ है जहाँ $0° < A + B \le 90°$ तथा $A > B$ हो, तो A और B के मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\cot(A + B) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$A + B = 60°$ ...(i)

$\cot(A - B) = \sqrt{3}$

$A - B = 30°$ ...(ii)

समी. (i) और (ii) को हल करने पर,

$A = 45°$ तथा $B = 15°$.

प्रश्न 14. निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए—

$\sec^6\theta - \tan^6\theta = 1 + 3\tan^2\theta + 3\tan^4\theta$

हल : बायाँ पक्ष $= (\sec^2\theta)^3 - (\tan^2\theta)^3$

($a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$ से)

$= (\sec^2\theta - \tan^2\theta)^3 + 3\sec^2\theta\tan^2\theta(\sec^2\theta - \tan^2\theta)$ $(\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$

बायाँ पक्ष $= (1)^3 + 3\sec^2\theta\tan^2\theta\,(1)$

$= 1 + 3\sec^2\theta\tan^2\theta$

बायाँ पक्ष $= 1 + 3(1 + \tan^2\theta)\tan^2\theta$

$= 1 + 3\tan^2\theta + 3\tan^4\theta$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष।

प्रश्न 15. सिद्ध कीजिए कि—

$$\frac{\mathbf{\tan\alpha+\tan\beta}}{\mathbf{\cot\alpha+\cot\beta}} = \mathbf{\tan\alpha\tan\beta}$$

हल : बायाँ पक्ष $= \dfrac{(\tan\alpha+\tan\beta)}{(\cot\alpha+\cot\beta)}$

हम जानते हैं : $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ और $\cot\beta = \dfrac{1}{\tan\beta}$

$$= (\tan\alpha+\tan\beta)\times\frac{(\tan\alpha\tan\beta)}{(\tan\alpha+\tan\beta)} = \tan\alpha\tan\beta$$

= दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए कि—

$$\mathbf{\sin\theta} = \frac{\mathbf{\tan\theta}}{\sqrt{\mathbf{1+\tan^2\theta}}}$$

हल : दायाँ पक्ष $= \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{(1+\tan^2\theta)}} = \dfrac{\tan\theta}{\sqrt{(\sec^2\theta)}} = \dfrac{\tan\theta}{\sec\theta}$

$= \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\times\cos\theta = \sin\theta =$ बायाँ पक्ष।

प्रश्न 17. यदि $1 + \sin^2\theta = 3\sin\theta\cos\theta$ तब सिद्ध कीजिए कि $\tan\theta = 1$ या $\frac{1}{2}$.

हल : दिया है : $1 + \sin^2\theta = 3\sin\theta\cos\theta$

$$\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}$$

$\Rightarrow \quad \sec^2\theta + \tan^2\theta = 3\tan\theta$

$\Rightarrow \quad 1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta = 3\tan\theta$

$\Rightarrow \quad 1 + 2\tan^2\theta = 3\tan\theta$

सभी पद एक ओर लाएँ : $2\tan^2\theta - 3\tan^2\theta + 1 = 0$

गुणनखंड करें : $(2\tan\theta - 1)(\tan\theta - 1) = 0$

अत: $\tan\theta = 1$ या $\tan\theta = \frac{1}{2}$ **सिद्ध हुआ।**

प्रश्न 18. यदि $\sin\theta = \frac{3}{5}$ हो, तो $\cos\theta$ और $\operatorname{cosec}\theta$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $\sin\theta = \frac{3}{5}$ तथा $\cos\theta = \frac{4}{5}$

अब, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{5}{3}$.

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए—

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$$

हल : बायाँ पक्ष $= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos^2\theta)}} = \frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$$

= दायाँ पक्ष।

प्रश्न 2. त्रिभुज ABC में कोण C समकोण है तथा $AB = 25$ सेमी तथा $BC = 24$ सेमी है, तो कोण A के सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : $AB^2 = BC^2 + AC^2$

$25^2 = 24^2 + AC^2$

$625 = 576 + AC^2$

$AC^2 = 49$

$AC = 7$ सेमी

$\sin A = \frac{24}{25}$; $\cos A = \frac{7}{25}$

$\tan A = \frac{24}{7}$; $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{25}{24}$

$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{25}{7}$; $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{7}{24}$

प्रश्न 3. यदि $\cos\theta = \frac{5}{13}$ हो, तो $\sin\theta$, $\tan\theta$ के मान त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर सम्बन्धों की सहायता से ज्ञात कीजिए, जबकि θ एक न्यूनकोण है।

हल : दिया है, $\cos\theta = \frac{5}{13}$

हम जानते हैं, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \quad \sin^2\theta + \frac{25}{169} = 1$

$\sin^2\theta = \frac{144}{169} \Rightarrow \sin\theta = \frac{12}{13}$

अब, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\left(\frac{12}{13}\right)}{\left(\frac{5}{13}\right)} = \frac{12}{5}$

प्रश्न 4. यदि $4\tan\theta = 3$ है, तो $\left(\frac{4\sin\theta - \cos\theta + 1}{4\sin\theta + \cos\theta - 1}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $4\tan\theta = 3$ या $\tan\theta = \frac{3}{4}$

माना एक समकोण त्रिभुज में,

लम्ब$= 3k$, आधार $= 4k$, कर्ण $= \sqrt{(9k^2 + 16k^2)}$

इसलिए $\sin\theta = \frac{3}{5}$ तथा $\cos\theta = \frac{4}{5}$

अब व्यंजक में मान रखने पर,

$$= \frac{\left[4\left(\frac{3}{5}\right) - \frac{4}{5} + 1\right]}{\left[4\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{4}{5} - 1\right]} = \frac{\left[\frac{12}{5} - \frac{4}{5} + \frac{5}{5}\right]}{\left[\frac{12}{5} + \frac{4}{5} - \frac{5}{5}\right]} = \frac{13}{11}$$

प्रश्न 5. निम्नलिखित सर्वसमिका सिद्ध कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यूनकोण है।

$$\mathbf{\frac{1+\cot^2 A}{1+\tan^2 A}=\left(\frac{1-\cot A}{1-\tan A}\right)^2}$$

हल : बायाँ पक्ष $= \dfrac{1+\cot^2 A}{1+\tan^2 A}$

हम जानते हैं, $\dfrac{\text{cosec}^2 A}{\sec^2 A} = \dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \cot^2 A$

दायाँ पक्ष $= \dfrac{(1-\cot A)^2}{(1-\tan A)^2} = \left[\dfrac{1-\dfrac{\cos A}{\sin A}}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}}\right]^2$

$$= \left[\frac{\sin A-\cos A}{\sin A}\times\frac{\cos A}{\cos A-\sin A}\right]^2$$

$$= \left[\frac{-(\cos A-\sin A)}{\sin A}\times\frac{\cos A}{\cos A-\sin A}\right]^2$$

$$= \left[\frac{-\cos A}{\sin A}\right]^2 = \cot^2 A$$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष $= \cot^2 A$.

प्रश्न 6. $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \text{cosec}\,\theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $(1 + \tan\theta + \sec)(1 + \cot\theta - \text{cosec}\,\theta)$

$$= \left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)$$

$$= \left[\frac{(\cos\theta+\sin\theta+1)(\sin\theta+\cos\theta-1)}{(\sin\theta\cos\theta)}\right]$$

$$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2.$$

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए—

$$\mathbf{\frac{\sin\theta}{\cot\theta+\text{cosec}\,\theta} = 2+\frac{\sin\theta}{\cot\theta-\text{cosec}\,\theta}}$$

हल : उपपत्ति— $\dfrac{\sin\theta}{\cot\theta+\text{cosec}\,\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cot\theta-\text{cosec}\,\theta}=2$

बायाँ पक्ष $= \sin\theta\left[\dfrac{1}{\cot\theta+\text{cosec}\,\theta}-\dfrac{1}{\cot\theta-\text{cosec}\,\theta}\right]$

$$= \sin\theta\left[\frac{(\cot\theta-\text{cosec}\,\theta)-(\cot\theta+\text{cosec}\,\theta)}{(\cot\theta+\text{cosec}\,\theta)(\cot\theta-\text{cosec}\,\theta)}\right]$$

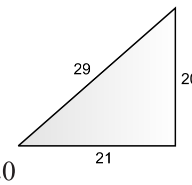
$= \sin\theta\left[\dfrac{-2\,\text{cosec}\,\theta}{\cot^2\theta-\text{cosec}^2\,\theta}\right] = \sin\theta\times\dfrac{2}{\sin\theta} = 2$ दायाँ पक्ष।

प्रश्न 8. यदि $\cos\theta = \dfrac{21}{29}$ हो, तो $\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta-\sin\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $\cos\theta = \dfrac{21}{29}$; निकालना है $= \dfrac{\sec\theta}{\tan\theta-\sin\theta}$

माना त्रिभुज का कर्ण = 29

आधार = 21



अत: लम्ब $= \sqrt{29^2-21^2}$

$= \sqrt{841-441} = 20$

त्रिकोणमितीय अनुपात

$$\sin\theta = \frac{20}{29},\ \tan\theta = \frac{20}{21},\ \sec\theta = \frac{29}{21}$$

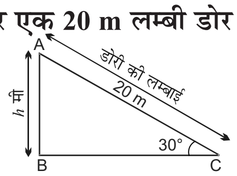
$$\frac{\sec\theta}{\tan\theta-\sin\theta} = \frac{\frac{29}{21}}{\frac{20}{21}-\frac{20}{29}} = \frac{\frac{29}{21}}{\frac{580-420}{609}}$$

$$= \frac{29}{21}\times\frac{609}{160} = \frac{29\times29}{160} = \frac{841}{160}.$$

9 त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

प्रश्नावली 9.1

प्रश्न 1. सर्कस का एक कलाकार एक 20 m लम्बी डोर पर चढ़ रहा है जो अच्छी तरह से तनी हुई है और भूमि पर सीधे लगे खम्भे के शिखर से बंधा हुआ है। यदि भूमि स्तर के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण 30° का हो, तो खम्भे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल : माना कि खम्भे की ऊँचाई $AB = h$ मीटर

तथा डोरी की लम्बाई $AC = 20$ मीटर

भूमि स्तर के साथ डोरी द्वारा बनाया गया कोण 30° है,

अर्थात् $\angle ACB = 30^\circ$

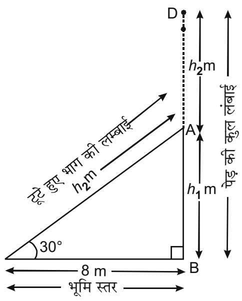
समकोण ΔABC में,

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{20}$$

$$\therefore \quad h = \frac{20}{2} = 10 \text{ मीटर}$$

अत: खम्भे की ऊँचाई 10 मीटर है। **उत्तर**

प्रश्न 2. आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ 30° का कोण बनाता है। पेड़ के पाद-बिन्दु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छूता है, 8 मीटर है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल : माना आँधी से पहले पेड़ की लम्बाई BD है। आँधी के पश्चात् पेड़ A स्थान से टूटकर पेड़ का शिखर जमीन पर C बिन्दु पर पड़ता है अर्थात् $AD = AC = h_2$ मीटर (माना), $AB = h_1$ मीटर (माना) और $BC = 8$ मीटर

टूटा हुआ भाग जमीन से 30° का कोण बनाता है।

अत : $\angle ACB = 30^\circ$

चित्र से, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$ तथा $\cos 30^\circ = \frac{BC}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{h_2} \Rightarrow h_2\sqrt{3} = 16 \Rightarrow h_2 = \frac{16}{\sqrt{3}} \text{ मीटर}$$

पेड़ की कुल लम्बाई $(BD) = AB + AD = \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}}$

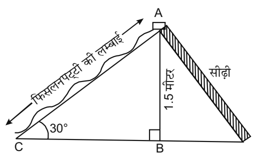
$$= 8\sqrt{3} = 8 \times 1.732 = 13.86 \text{ मीटर}$$

अत: पेड़ की ऊँचाई 13.86 मीटर या $8\sqrt{3}$ मीटर है। **उत्तर**

प्रश्न 3. एक ठेकेदार बच्चों को खेलने के लिए एक पार्क में दो फिसलनपट्टी लगाना चाहती है। 5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए वह एक ऐसी फिसलनपट्टी लगाना चाहती है जिसका शिखर 1.5 मीटर की ऊँचाई पर हो और भूमि के साथ 30° के कोण पर झुका हुआ हो, जबकि इससे अधिक उम्र के बच्चों के लिए वह 3 मीटर की ऊँचाई पर एक अधिक ढाल की फिसलनपट्टी लगाना चाहती है, जो भूमि के साथ 60° का कोण बनाती हो। प्रत्येक स्थिति में फिसलनपट्टी की लम्बाई क्या होनी चाहिए?

हल : स्थिति I. जब ठेकेदार 5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए फिसलनपट्टी लगाता है तो उसकी ऊँचाई $AB = 1.5$ मीटर तथा फिसलनपट्टी का भूमि के साथ कोण $ACB = 30°$ है। माना फिसलनपट्टी की लम्बाई $AC = x$ मीटर है।

समकोण ΔABC में,

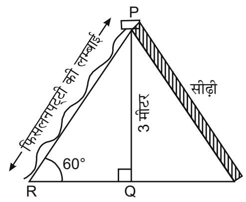


$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1.5}{x} \Rightarrow x = 1.5 \times 2$$

$\therefore AC = 3$ मीटर

स्थिति II. जब ठेकेदार 5 वर्ष से अधिक उम्र के बच्चों के लिए फिसलनपट्टी लगाता है, तो उसकी ऊँचाई $PQ = 3$ मीटर होती है और फिसलनपट्टी का भूमि के साथ कोण 60° है।



अर्थात् $\angle PRQ = 60^\circ$

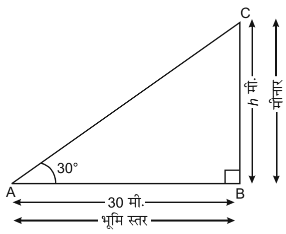
माना फिसलनपट्टी की लम्बाई (PR) y मीटर है।

समकोण ΔPQR में, $\sin 60^\circ = \frac{PQ}{PR} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{y}$

$$\Rightarrow \sqrt{3}y = 3 \times 2 \Rightarrow y = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

अत: 5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए फिसलनपट्टी की लम्बाई = 3 मीटर तथा इससे अधिक उम्र के बच्चों के लिए फिसलनपट्टी की लम्बाई = $2\sqrt{3}$ मीटर। **उत्तर**

प्रश्न 4. भूमि के एक बिन्दु से, जो मीनार के पाद-बिन्दु से 30 मीटर की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल : माना मीनार की ऊँचाई BC h मीटर है। मीनार के आधार B से 30 मीटर दूर भूमि पर स्थित बिन्दु A है अर्थात् $AB = 30$ मीटर। मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है ।

अर्थात् $\angle BAC = 30^\circ$

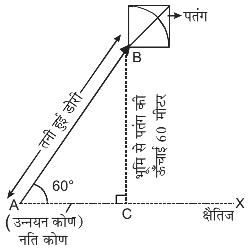
समकोण ΔABC में, $\tan 30^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$

हल करने पर, $h = 10 \times 1.732 = 17.32$ m (लगभग)

अत: मीनार की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ मीटर या 17.32 मीटर है।

प्रश्न 5. भूमि से 60 मीटर की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिन्दु से बाँध दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढील नहीं है, डोरी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना AX एक क्षैतिज रेखा है। रेखा पर स्थित बिन्दु C से 60 मीटर की ऊँचाई पर एक पतंग B उड़ रही है। यह पतंग B, भूमि पर स्थित एक बिन्दु A से तनी हुई डोरी AB द्वारा बँधी हुई है। डोरी AB का भूमि के साथ कोण $CAB = 60^\circ$ है।



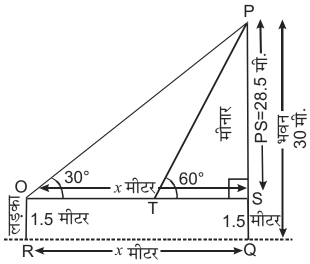
समकोण ΔACB में, $\sin 60^\circ = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{60}{AB}$

$\therefore \quad AB = 69.28$ मीटर

अत: डोरी की लम्बाई $= 40\sqrt{3}$ मीटर या 69.28 मीटर।

प्रश्न 6. 1.5 मीटर लम्बा एक लड़का 30 मीटर ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितनी दूरी तक चलकर गया है?

हल : माना PQ एक भवन है जिसकी ऊँचाई 30 मीटर है। भवन के आधार Q से x मीटर की दूरी पर बिन्दु R पर एक लड़का OR खड़ा है जिसकी ऊँचाई OR 1.5 मीटर है।



तब $OS \parallel RQ$

तथा $OR \parallel SQ$

$\therefore \; SQ = OR = 1.5$ मीटर $\Rightarrow PS = PQ - SQ$

$= 30 - 1.5 = 28.5$ मीटर

लड़के की आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है तथा लड़का भवन की ओर कुछ दूरी चलता है, तो भवन के शिखर का उन्नयन कोण 60° हो जाता है, तब

$$\angle POS = 30^\circ \text{ तथा } \angle PTS = 60^\circ$$

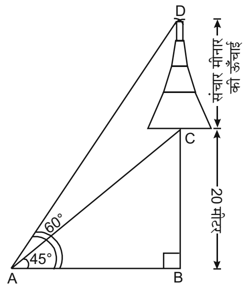
चित्र से, $\tan 30^\circ = \dfrac{PS}{OS}$ तथा $\tan 60^\circ = \dfrac{PS}{TS}$

सरल करने पर, $OT = 19\sqrt{3}$ मीटर

अत: लड़के द्वारा भवन की ओर तय की गई दूरी $19\sqrt{3}$ मीटर है। **उत्तर**

प्रश्न 7. भूमि के एक बिन्दु से एक 20 मीटर ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमश: 45° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

संकेत: माना कि BC एक भवन है, जिसकी ऊँचाई 20 मीटर है। भवन के शिखर बिन्दु C पर एक संचार मीनार CD है। संचार मीनार के तल C और शिखर D से उन्नयन कोण क्रमश: 45° और 60° हैं।



चित्र से, $\tan 45^\circ = \dfrac{BC}{AB}$

$\Rightarrow 1 = \dfrac{20}{AB}$

$\therefore AB = 20$ मीटर

तथा $\tan 60^\circ = \dfrac{BD}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{BD}{20}$

$\therefore \quad BD = 20\sqrt{3}$ मीटर

संचार मीनार की ऊँचाई $CD = BD - BC = 20\sqrt{3} - 20$

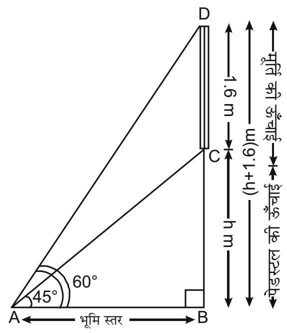
सरल करने पर, $= 20 \times 0.732 = 14.64$ मीटर **उत्तर**

प्रश्न 8. एक पेडस्टल के शिखर पर एक 1.6 मीटर ऊँची मूर्ति लगी है। भूमि के एक बिन्दु से मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और उसी बिन्दु से पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। पेडस्टल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

संकेत : माना पेडस्टल की ऊँचाई $BC = h$ मीटर

दिया है : मूर्ति की ऊँचाई $CD = 1.6$ मीटर है।

क्षैतिज भूमि पर स्थित बिन्दु A से मूर्ति के शिखर D का उन्नयन कोण $BAD = 60^\circ$ तथा पेडस्टल के शिखर C का उन्नयन कोण $BAC = 45^\circ$ है।



चित्र से, $\tan 45^\circ = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow$

$1 = \dfrac{h}{AB}$

$\therefore$ तथा $\tan 60^\circ = \dfrac{BD}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{BC + CD}{AB}$

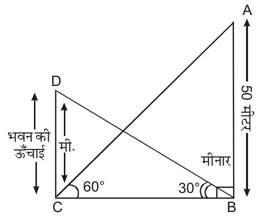
$\Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{h + 1.6}{h}$

सरल करने पर, $h = 0.8\,(\sqrt{3} + 1)$ मीटर

अत: पेडस्टल की ऊँचाई $= 0.8\,(\sqrt{3} + 1)$ मीटर। **उत्तर**

प्रश्न 9. एक मीनार के पाद-बिन्दु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद-बिन्दु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 50 मीटर ऊँची हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

संकेत : माना कि AB कोई मीनार है। जिसकी ऊँचाई 50 मीटर है। मीनार के पाद बिन्दु B से भवन की चोटी D का उन्नयन कोण 30^o है जबकि भवन के आधार बिन्दु C से मीनार की चोटी A का उन्नयन कोण 60^o है।



अर्थात् $\angle CBD = 30^o$ और $\angle ACB = 60^o$

माना भवन की ऊँचाई $CD = h$ मीटर

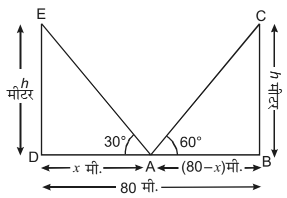
चित्र से, $\tan 60^o = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{50}{BC}$

$\therefore BC = \dfrac{50}{\sqrt{3}}$ मीटर तथा $\tan 30^o = \dfrac{CD}{BC} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{\frac{50}{\sqrt{3}}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\,h}{50} \Rightarrow h = \dfrac{50}{3} = 16\dfrac{2}{3}$ मीटर

प्रश्न 10. एक 80 मीटर चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान लम्बाई वाले दो खम्भे लगे हुए हैं। इन दोनों खम्भों के बीच सड़क के एक बिन्दु से खम्भों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° हैं। खम्भों की ऊँचाई और खम्भों से बिन्दु की दूरी ज्ञात कीजिए।

संकेत : माना BC और DE दो बराबर ऊँचाई के खम्भे हैं जिनकी ऊँचाई h मीटर है। इन दोनों खम्भों के बीच सड़क BD पर एक बिन्दु A से खम्भों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° हैं।

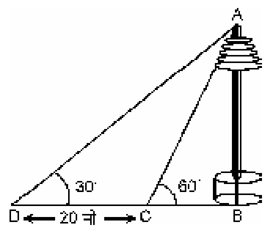


चित्र से, $\tan 30^o = \dfrac{ED}{DA} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{x}$

तथा $\tan 60^o = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{h}{80 - x}$

हल करके x_1 तथा h का मान ज्ञात करें।

प्रश्न 11. एक नहर के एक तट पर एक टीवी टॉवर ऊर्ध्वाधरतः खड़ा है। टॉवर के ठीक सामने दूसरे तट के एक अन्य बिन्दु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। इसी तट पर इस बिन्दु से 20 मी दूर और इस बिन्दु को मीनार के पाद से मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक अन्य बिन्दु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 30° है (देखिए आकृति)। टॉवर की ऊँचाई और नहर की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।



हल : माना नहर की चौड़ाई $BC = x$ मीटर है।

तथा टीवी टॉवर की ऊँचाई $AB = h$ मीटर है।

$$\tan 60^o = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$\therefore \qquad h = x\sqrt{3}$ मीटर ...(i)

पुनः समकोण ΔABD में, $\tan 30^o = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AB}{DC + BC}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{20 + x} \Rightarrow \sqrt{3} \times x\sqrt{3} = 20 + x$

अतः $\qquad x = BC = 10$ मीटर

समी. (i) में x का मान प्रतिस्थापन करने पर,

तथा $h = 10\sqrt{3} = 10 \times 1.732 = 17.32$ मीटर

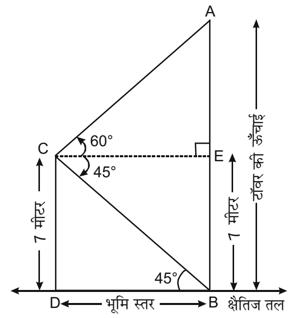
अतः टावर की ऊँचाई = 17.32 मीटर

तथा नहर की चौड़ाई = 10 मीटर

प्रश्न 12. 7 मीटर ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना AB एक केबल टॉवर है। उसी धरातल में एक भवन CD है जिसकी ऊँचाई 7 मीटर है।

केबल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण और पाद का अवनमन कोण क्रमशः 60° और 45° हैं।



अर्थात $\angle ACE = 60^o$

और $\angle ECB = 45^o$

$$BD \parallel CE,\ CD \parallel BE$$

$\therefore \qquad CD = BE = 7$ मीटर

अब समकोण त्रिभुज CBD में,

$$\tan 45^o = \frac{CD}{DB} \Rightarrow 1 = \frac{7}{DB}$$

$\therefore \qquad DB = 7$ मीटर $\Rightarrow CE = DB = 7$ मीटर

पुनः समकोण त्रिभुज AEC में,

$\tan 60^o = \dfrac{AE}{CE} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{AE}{7} \Rightarrow AE = 7\sqrt{3}$ मीटर

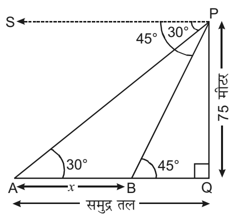
तब टॉवर AB की ऊँचाई $= AE + EB = 7(\sqrt{3} + 1)$ मीटर

प्रश्न 13. समुद्र-तल से 75 मीटर ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो, तो दो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : माना 75 मीटर ऊँचे एक प्रकाश स्तम्भ PQ के शिखर P से, A और B जहाजों के अवनमन कोण क्रमशः 30^o और 45^o हैं।

$\therefore \quad \angle SPA = 30^o = \angle PAQ$ (एकान्तर कोण)

तथा $\quad \angle SPB = 45^o = \angle PBQ$ (एकान्तर कोण)



$\tan 45^o = \dfrac{PQ}{BQ} \Rightarrow 1$

$= \dfrac{75}{BQ} \Rightarrow BQ = 75$ मीटर

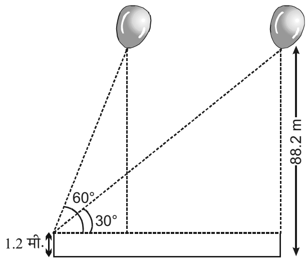
तथा $\tan 30^o = \dfrac{PQ}{AQ}$

$= \dfrac{PQ}{AB+BQ} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{75}{x+75}$

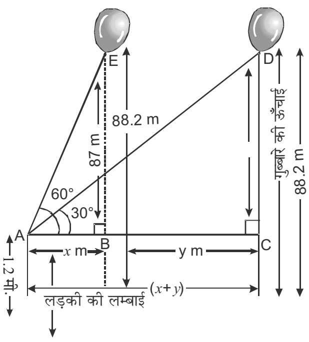
सरल करने पर, $x = 54.90$ मीटर

अतः दो जहाजों के बीच की दूरी $75\,(\sqrt{3}-1)$ या 54.90 मीटर है। **उत्तर**

प्रश्न 14. 1.2 मीटर लम्बी एक लड़की भूमि से 88.2 मीटर की ऊँचाई पर एक क्षैतिज रेखा में हवा में उड़ रहे गुब्बारे को देखती है। किसी भी क्षण लड़की की आँख से गुब्बारे का उन्नयन कोण 60^o है। कुछ समय बाद उन्नयन कोण घटकर 30^o हो जाता है (देखिए आकृति)। इस अन्तराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।



हल : माना 1.2 मीटर लम्बी लड़की की आँख 'A' है। भूमि से 88.2 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहे गुब्बारे की विभिन्न दूरियों पर उन्नयन कोण क्रमशः 60^o और 30^o हैं।



$\therefore \quad \angle BAE = 60^o$ और $\angle DAC = 30^o$

$BE = CD$

$= 88.2 - 1.2 = 87$ मीटर

$\tan 60^o = \dfrac{BE}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{87}{x} \Rightarrow x = \dfrac{87}{\sqrt{3}}$ ...(1)

तथा $\quad \tan 30^o = \dfrac{CD}{AC} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{87}{x+y}$

$\Rightarrow \quad x = 87\sqrt{3} - y$ ...(2)

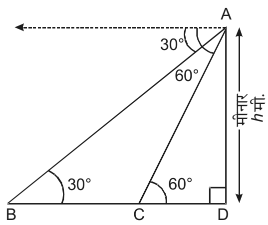
समीकरण (1) व (2) को हल करने पर,

$\Rightarrow \quad y = 58\sqrt{3}$ मीटर

अतः गुब्बारे द्वारा तय की गई दूरी $= 58\sqrt{3}$ मीटर **उत्तर**

प्रश्न 15. एक सीधा राजमार्ग एक मीनार के पाद तक जाता है। मीनार के शिखर पर खड़ा एक आदमी एक कार को 30^o के अवनमन कोण पर देखता है जो कि मीनार के पाद की ओर एकसमान चाल से जाती है। छः सेकण्ड बाद कार का अवनमन कोण 60^o हो गया। इस बिन्दु से मीनार के पाद तक पहुँचने में कार द्वारा लिया गया समय ज्ञात कीजिए।

संकेत : माना BCD एक सीधा राजमार्ग है जिसके बिन्दु D पर, AD मीनार खड़ी है जिसकी ऊँचाई h मीटर है। मीनार के शिखर A से एक कार B का अवनमन कोण 30^o है। 6 सेकण्ड बाद कार का अवनमन कोण 60^o हो जाता है।



$\because$ 6 सेकण्ड में कार द्वारा तय की गई दूरी $= BC$

चित्र से, $\tan 30^o = \dfrac{AD}{BD}$ ...(i)

तथा $\tan 60^o = \dfrac{AD}{CD}$

चूँकि कार एक समान चाल से चल रही है तथा CD दूरी BC की आधी है। अतः CD दूरी चलने में लगा समय

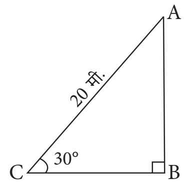
$= \dfrac{1}{2} \times BC$ दूरी चलने में लगा समय

$= \dfrac{1}{2} \times 6 = 3$ सेकण्ड **उत्तर**

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

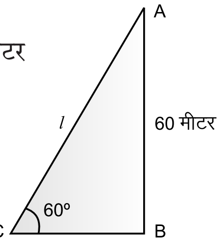
प्रश्न 1. निम्न आकृति में अच्छी तरह से तनी हुई एक 20 मी लम्बी रस्सी भूमि पर सीधे लगे खंभे के शिखर से बंधी है। यदि भूमि स्तर के साथ रस्सी द्वारा बनाया गया कोण $30°$ का है, तो खंभे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



संकेत : $\sin 30° = \dfrac{\text{खंभे की ऊँचाई } (h)}{\text{रस्सी की लम्बाई}}$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 10 \text{ मीटर}$$

प्रश्न 2. भूमि से 60 मीटर की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिन्दु से बाँध दिया गया है भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोइ ढील नहीं है। डोरी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल : माना डोरी की लम्बाई = l मीटर

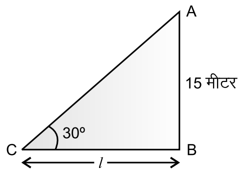
समकोण त्रिभुज में,

$$\sin 60° = \frac{\text{पतंग की ऊँचाई}}{\text{डोरी की लम्बाई}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{l}$$

$\Rightarrow \quad l = 40 \times 1.732 \approx 69.28$ मीटर

प्रश्न 3. नदी के 15 मीटर ऊँचे पुल से किसी नाव का अवनमन कोण 30° है। यदि नाव 6 किमी/घंटा की गति से चल रही है तब नाव को नदी के पुल के नीचे पहुँचने में लगा समय ज्ञात कीजिए।



संकेत : माना नाव की पुल से दूरी = d मीटर

$$\tan 30° = \frac{\text{पुल की ऊँचाई}}{\text{नाव की दूरी}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{15}{d} \Rightarrow d = 25.98 \text{ मीटर} \approx 26 \text{ मीटर}$$

नाव की गति = 6 किमी/घंटा या $\dfrac{5}{3}$ मीटर/सेकंड

$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{गति}} = \frac{15\sqrt{3}}{\frac{5}{3}} = 9\sqrt{3} \text{ सेकंड}$$

लगभग $9\sqrt{3}$ सेकंड या 15.6 सेकंड।

प्रश्न 4. एक समतल जमीन पर 2 मी लम्बे छात्र की छाया की लम्बाई 1 मी है। उस समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 5 मी हो, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिये।

संकेत : ∵ छात्र और मीनार दोनों एक ही समय पर जमीन पर खड़े हैं, इसलिए सूर्य के प्रकाश द्वारा बनाया गया कोण दोनों के लिए समान होगा।

माना मीनार की ऊँचाई = h मीटर

सूर्य का कोण समान होने से वस्तुओं की ऊँचाई और उनकी छाया की लम्बाई का अनुपात समान होगा।

$$\frac{h}{5} = \frac{2}{1} \Rightarrow h = 10 \text{ मीटर।}$$

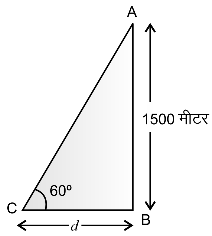
प्रश्न 5. एक समतल जमीन पर 1.5 मीटर लम्बे छात्र की छाया की लम्बाई 1 मीटर है तथा उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 5 मीटर है तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

संकेत : माना मीनार की ऊँचाई = h मी.

समरूपता के नियम के अनुसार, ऊँचाई और छाया का अनुपात स्थिर रहता है।

$$\frac{h}{5} = \frac{1.5}{1} \Rightarrow h = 7.5 \text{ मी.।}$$

प्रश्न 6. पृथ्वी से 1500 मीटर ऊँचाई पर उड़ते हुए वायुयान का हवाई अड्डे से उन्नयन कोण 60° है। वायुयान की हवाई अड्डे से क्षैतिज दूरी ज्ञात कीजिए।

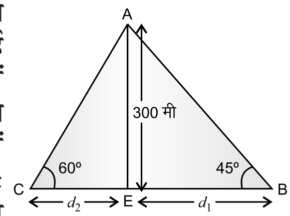


संकेत :

$$\tan 60° = \frac{\text{ऊँचाई}}{\text{क्षैतिज दूरी}} \quad \sqrt{3} = \frac{1500}{d}$$

$\Rightarrow \quad d = 500 \times 1.732 = 866$ मीटर

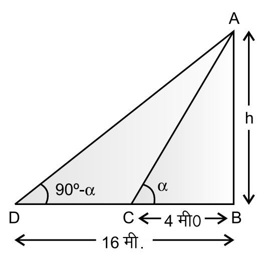
प्रश्न 7. एक हवाई जहाज भूतल से ऊपर 300 मी की ऊँचाई पर उड़ रहा है। इस ऊँचाई पर उड़ते हुए हवाई जहाज से एक नदी के दोनों किनारों पर परस्पर विपरीत दिशाओं में स्थित दो बिंदुओं के अवनमन कोण क्रमशः 45° तथा 60° हैं। नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।



संकेत : नदी की चौड़ाई $= \dfrac{300}{\tan 45°} + \dfrac{300}{\tan 60°}$

$= 300 + 173.2 = 473.2$ मीटर

प्रश्न 8. एक मीनार के पाद से गुजरने वाली सीधी रेखा पर पाद से क्रमशः 4 मी तथा 16 मी की दूरियों पर दो बिंदु *C* व *D* स्थित हैं। यदि *C* व *D* से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण एक-दूसरे के पूरक हों, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

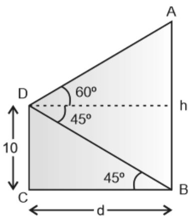


संकेत : $\tan \alpha = \frac{h}{4}$ तथा $\tan(90° - \alpha) = \frac{h}{16}$

(यहाँ $\tan(90° - \alpha) = \cot \alpha$ रखिये)

सरल करने पर, मीनार की ऊँचाई = 8 मीटर।

प्रश्न 9. 10 मीटर ऊँचे भवन के शिखर से एक टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



संकेत :

माना टॉवर की ऊँचाई = H मीटर

माना क्षैतिज दूरी = d मीटर

चित्र से, $\tan 45° = \frac{10}{d} \Rightarrow d = 10$ मीटर

$\tan 60° = \frac{H-10}{d} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{H-10}{10}$

सरल करने पर, $H = 10(1 + 1.732) = 27.32$ मीटर

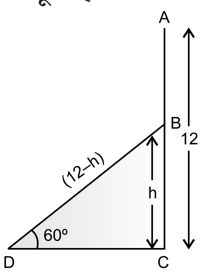
प्रश्न 10. एक 12 मीटर ऊँचा पेड़ तेज हवा से इस प्रकार टूट जाता है कि उसका शीर्ष जमीन को छूने लगता है और जमीन के साथ 60° का कोण बनाता है। ज्ञात करें कि तेज हवा से पेड़, जमीन से कितनी ऊँचाई से टूटा है।

हल : माना पेड़ जमीन से h ऊँचाई से टूटा है।

टूटा हुआ हिस्सा = $12 - h$ मी.

समकोण त्रिभुज में, $\sin \theta$

$$\sin 60° = \frac{h}{12-h}$$



हल करने पर,

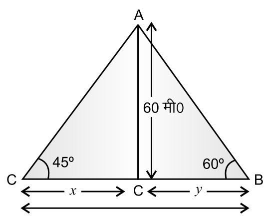
$$h = \frac{12\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$ या 5.57 मी. (लगभग)।

प्रश्न 11. समुद्र तल से 60 मी. ऊँचे लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहजों के अवनमन कोण 45° तथा 60° है। यदि दोनों जहाज लाइट हाउस की विपरीत दिशाओं में हो, तो दोनों जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

संकेत :

चित्र से,

$\tan 45° = \frac{60}{x}$ या $x = 60$



इसी प्रकार,

$\tan 30° = \frac{60}{y} \Rightarrow y = \frac{60}{\sqrt{3}}$

दोनों जहाजों के बीच की कुल दूरी

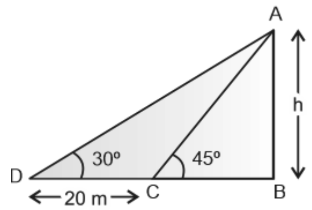
$$x + y = 60 + \frac{60}{\sqrt{3}} = 60\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{60(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$$

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. क्षैतिज तल पर किसी निश्चित बिन्दु से एक मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। यदि प्रेक्षक 20 मीटर मीनार की ओर चलता है, तो मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 15° बढ़ जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो।

संकेत :



चित्र से,

$\tan 45° = \frac{h}{BC}$ या $BC = h$ ...(i)

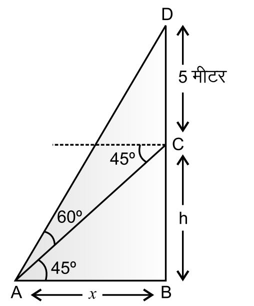
तथा $\tan 30° = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{20+h}$

या $h = \frac{20}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{20(\sqrt{3}+1)}{2} = 10(\sqrt{3}+1)$

प्रश्न 2. 5 मीटर ऊँचाई का एक खम्भा किसी ऊर्ध्वाधर मीनार की चोटी पर लगा है। भूमि पर स्थित एक बिन्दु 'A' से खम्भे के शीर्ष का उन्नयन कोण 60° है। और मीनार की चोटी से बिन्दु 'A' का अनवमन कोण 45° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

संकत : मान लीजिए मीनार की ऊँचाई = h मीटर

मीनार के आधार से बिन्दु A की दूरी = x मी.



चित्र से,

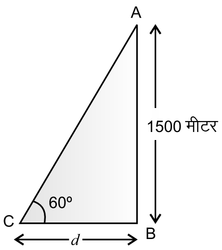
$\tan 45° = \frac{h}{x}$ या $h = x$ ...(i)

तथा $\tan 60° = \frac{h+5}{x}$

हल करने पर, $h = 6.83$ मी.।

प्रश्न 3. धरातल के एक बिन्दु *A* से एक हवाई जहाज का उन्नयन कोण 60° है। 15 सेकण्ड की उड़ान के पश्चात्, उन्नयन कोण 30° का हो जाता है। यदि हवाई जहाज एक निश्चित ऊँचाई $1500\sqrt{3}$ मीटर पर उड़ रहा हो, तो हवाई-जहाज की गति किमी/घंटा में ज्ञात कीजिए। अतः हवाई जहाज की चाल 720 किमी/घंटा है।

हल : ऊँचाई (h) = $1500\sqrt{3}$ मी.



पहले आधार की दूरी = x

$$\tan 60° = \frac{1500\sqrt{3}}{x} \quad ...(i)$$

$$x = \frac{1500\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1500 \text{ मी.}$$

15 सेकंड बाद आधार की दूरी ($x + d$)

$$\tan 30° = \frac{h}{x+d} \quad ...(ii)$$

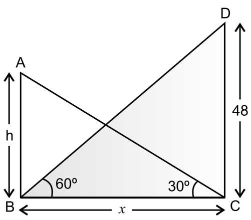
समीकरण (i) व (ii) को हल करने पर,

तय की गई दूरी (d) = 4500 – 1500 = 3000 मी.

$$\text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{3000}{15} = 200 \text{ मी/से.}$$

= 720 किमी/घंटा।

प्रश्न 4. एक मीनार के पाद से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार की ऊँचाई 48 मी है तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।



हल : माना भवन की ऊँचाई = h मी.

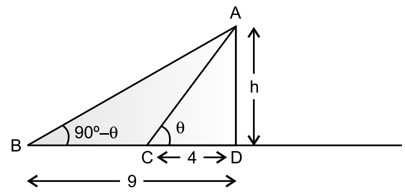
दोनों के बीच की दूरी = x

चित्र से, $\tan 60° = \frac{48}{x}$ तथा $\tan 30° = \frac{h}{x}$

दोनों को हल करने पर, h = 16 मी.।

प्रश्न 5. मीनार के आधार से और एक सरल रेखा में 4 मीटर तथा 9 मीटर की दूरी पर स्थित दो बिन्दुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण है सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6 मीटर है।

हल : माना ऊँचाई = h, कोण θ और (90 – θ) है।



$$\tan\theta = \frac{h}{4} \quad ...(i)$$

$$\tan(90° - \theta) = \frac{h}{9} \text{ या } \cot\theta = \frac{h}{9} \quad ...(ii)$$

समीकरण (i) और (ii) का गुणा करने पर,

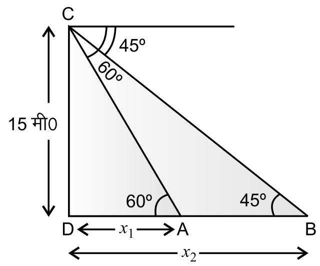
$$\tan\theta \times \cot\theta = \frac{h}{4} \times \frac{h}{9}$$

$$1 = \frac{h^2}{36} \Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = 6 \text{ मी।}$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 6. एक मीनार के एक ही ओर तथा इसके आधार से एक ही सरल रेखा में दो बिंदु *A* तथा *B* हैं। मीनार के शिखर से इन बिंदुओं के अवनमन कोण क्रमशः 60° व 45° हैं। यदि मीनार की ऊँचाई 15 मी हो, तो इन बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : पहले बिन्दु की दूरी $x_1 = \frac{15}{\tan 60°} = \frac{15}{\sqrt{3}}$ मी.



दूसरे बिन्दु की दूरी (x_2) = $\frac{15}{\tan 45°}$

x_2 = 15 मी.

दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी

$$x_2 - x_1 = \frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}} \text{ मी.}$$

10 वृत्त

प्रश्नावली 10.1

प्रश्न 1. एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं ?

हल : अनन्त

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे .... बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है।

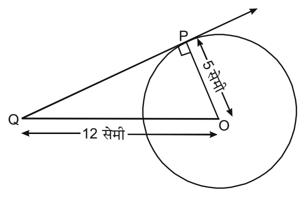
(ii) वृत्त को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को .... कहते हैं।

(iii) एक वृत्त की .... समांतर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।

(iv) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिंदु को .... कहते हैं।

उत्तर : (i) केवल एक, (ii) छेदक, (iii) अधिकतम दो, (iv) स्पर्श बिंदु

प्रश्न 3. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि $OQ = 12$ सेमी, PQ की लम्बाई है :



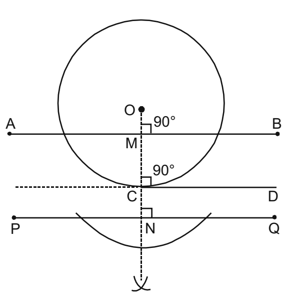
(A) 12 सेमी **(B) 13 सेमी**

(C) 8·5 सेमी **(D) $\sqrt{119}$ सेमी।**

उत्तर : (D)

प्रश्न 4. एक वृत्त खींचिए और एक दी गई रेखा के समान्तर दो ऐसी रेखाएँ खींचिए कि उनमें से एक स्पर्श रेखा हो तथा दूसरी छेदक रेखा हो।

हल : माना O केन्द्र का एक वृत्त है और PQ एक दी गई रेखा है। हमें PQ के समान्तर दो रेखाएँ (माना CD व AB) खींचनी हैं जिनमें CD स्पर्श रेखा और AB छेदक रेखा हो।



रचना विधि : (i) रेखा PQ पर केन्द्र-बिन्दु से लम्ब ON खींचा जो वृत्त को C पर काटे। (ii) त्रिज्या OC के बिन्दु C पर लम्ब CD खींचा। CD **स्पर्श रेखा** है। (iii) OC पर एक बिन्दु M से लम्ब AB खींचा। AB **छेदक रेखा** है।

प्रश्नावली 10.2

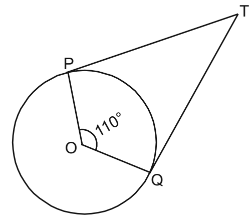
प्रश्न सं. 1, 2, 3 में सही विकल्प चुनिए एवं उचित कारण दीजिए।

प्रश्न 1. एक बिन्दु Q से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 24 सेमी तथा Q की केन्द्र से दूरी 25 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या है :

(A) 7 सेमी (B) 12 सेमी (C) 15 सेमी (D) 24.5 सेमी

उत्तर : (A)

प्रश्न 2. चित्र में, यदि TP, TQ केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\angle POQ = 110°$, तो $\angle PTQ$ बराबर है :



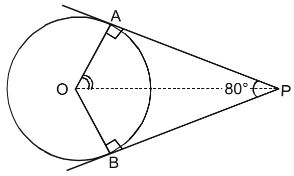
(A) 60° **(B) 70°**

(C) 80° **(D) 90°**

उत्तर : (B)

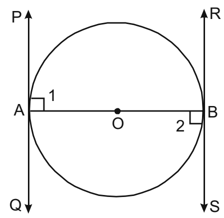
प्रश्न 3. यदि एक बिन्दु P से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 80° के कोण पर झुकी हों, तो $\angle POA$ है :

(A) 50° **(B) 60°** **(C) 70°** **(D) 80°**



उत्तर : (A)

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समान्तर होती हैं।



हल : दिया है : एक वृत्त जिसका केन्द्र O तथा व्यास AB है। PQ और RS बिन्दु A व B पर स्पर्श रेखाएँ हैं।

सिद्ध करना है :

$$PQ \parallel RS$$

उपपत्ति : $\because$ OA त्रिज्या है और PQ स्पर्श रेखा, OA त्रिज्या पर लम्ब है।

$\therefore$ $\angle 1 = 90°$

इसी प्रकार, $RS \perp OB$

$\therefore \qquad \angle 2 = 90°$

अब $\qquad \angle 1 = \angle 2$

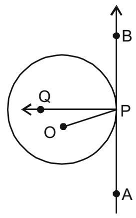
परन्तु यह दो समान्तर रेखाओं के एकान्तर कोण हैं, जब एक तिर्यक रेखा उन्हें काटती है।

$\therefore \qquad PQ \parallel RS$

अत: किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि स्पर्श बिन्दु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लम्ब वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

हल : दिया है : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। AB इसकी स्पर्श रेखा है जो वृत्त को P पर स्पर्श करती है।



सिद्ध करना है : लम्ब PQ वृत्त के केन्द्र O से जाता है।

उपपत्ति : यदि सम्भव हो, तो माना PQ, AB के लम्बवत् है, जो O से नहीं गुजरती है।

OP को मिलाया।

$\because$ वृत्त के बिन्दु पर स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु पर त्रिज्या के लम्बवत् होती है, इसलिए

$AB \perp OP$ अर्थात् $\angle OPB = 90°$

तथा $\angle QPB = 90°$ (रचना से)

$\therefore \angle QPB = \angle OPB$, जो सम्भव नहीं है क्योंकि रेखाखण्ड OP रेखा PQ के बराबर नहीं हो सकता है।

यह हमारी कल्पना के विपरीत है।

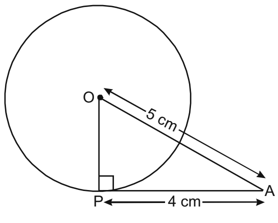
अत: स्पर्श रेखा AB के स्पर्श बिन्दु P पर खींचा गया लम्ब PQ, वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

प्रश्न 6. एक बिन्दु A से, जो एक वृत्त के केन्द्र से 5 सेमी दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 4 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : एक वृत्त जिसका केन्द्र 'O' है। वृत्त के बाहर इसके केन्द्र से 5 सेमी की दूरी पर कोई बिन्दु A है।

स्पर्श रेखा की लम्बाई

$= PA = 4$ सेमी



$\because$ हम जानते हैं कि वृत्त पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से होकर खींची गई त्रिज्या पर लम्ब होती है।

$\therefore \qquad \angle OPA = 90°$

समकोण ΔOPA में, पाइथागोरस प्रमेय से,

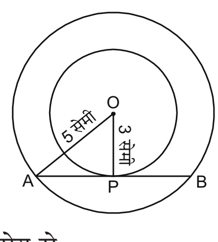
$$OA^2 = OP^2 + PA^2$$

$$(5)^2 = OP^2 + (4)^2$$

$\Rightarrow \qquad OP^2 = 9 \Rightarrow OP = \sqrt{9} = 3$ सेमी

प्रश्न 7. दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 सेमी तथा 3 सेमी हैं। बड़े वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो। (CBSE 2020 Std.)

हल : माना O केन्द्र वाले दो संकेन्द्रीय वृत्त हैं जिनकी त्रिज्याएँ OA तथा OP क्रमश: 5 सेमी व 3 सेमी हैं।



बड़े वृत्त की एक जीवा AB है जो छोटे वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है।

$\therefore \quad OP \perp AB$ तथा $\angle OPA = 90°$

$\therefore$ समकोण ΔOPA में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AP^2 + OP^2 = OA^2$$

$\Rightarrow \qquad AP^2 + (3)^2 = (5)^2$

$\Rightarrow \qquad AP^2 = (5)^2 - (3)^2 = 16$

$\therefore \qquad AP = 4$ सेमी

परन्तु बड़े वृत्त में, जीवा AB पर केन्द्र O से OP लम्ब है।

$\therefore$ बिन्दु P, जीवा AB को समद्विभाजित करता है।

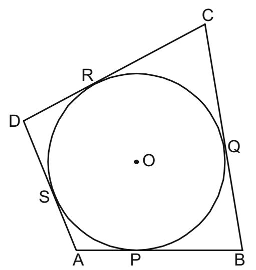
$$AP = BP = 4 \text{ सेमी}$$

जीवा AB की लम्बाई $= AP + BP = 4 + 4 = 8$ सेमी

अत: बड़े वृत्त की जीवा की लम्बाई = 8 सेमी। **उत्तर**

प्रश्न 8. एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज $ABCD$ खींचा गया है। सिद्ध कीजिए : $AB + CD = AD + BC$

हल : दिया है : O केन्द्र वाले वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज $ABCD$ खींचा जिसकी भुजाएँ AB, BC, CD तथा DA वृत्त को क्रमश: बिन्दुओं P, Q, R और S पर स्पर्श करती हैं।



सिद्ध करना है :

$$AB + CD = AD + BC$$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर होती है।

अब B, वृत्त के बाहर स्थित कोई बिन्दु है और BP, BQ वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं।

$\therefore \qquad BP = BQ \qquad \ldots(1)$

इसी प्रकार, $\qquad AP = AS \qquad \ldots(2)$

और $\qquad DR = DS \qquad \ldots(3)$

और $\qquad CR = CQ \qquad \ldots(4)$

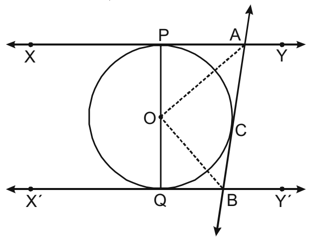
समीकरण (1), (2), (3) व (4) को जोड़ने पर,

$$BP + AP + DR + CR = BQ + AS + DS + CQ$$

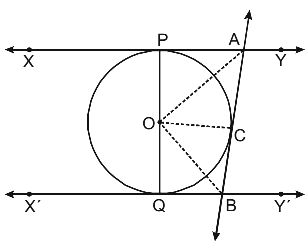
$\Rightarrow (AP + BP) + (CR + DR) = (AS + DS) + (BQ + CQ)$

$\Rightarrow \qquad AB + CD = AD + BC.$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 9. आकृति में, XY तथा $X'Y'$ O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर दो समान्तर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A पर तथा $X'Y'$ को B पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि $\angle AOB = 90°$ है।



हल : दिया है : XY तथा $X'Y'$, O केन्द्र वाले वृत्त पर दो समान्तर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिन्दु C पर एक अन्य स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा $X'Y'$ को B पर प्रतिच्छेद करती है। OA तथा OB को मिलाया।



सिद्ध करना है : $\angle AOB = 90°$

रचना : OC मिलाया।

उपपत्ति : XY और $X'Y'$ वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ हैं, जो वृत्त को P और Q पर स्पर्श करती हैं। बिन्दु C से वृत्त की स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा $X'Y'$ को B पर काटती है।

$\therefore$ बिन्दु A से वृत्त पर AP व AC स्पर्श रेखाएँ हैं।

$\therefore \quad AP = AC$

ΔOPA तथा ΔOCA में,

$OP = OC$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$AP = AC$ (बाह्य बिन्दु से वृत्त की स्पर्श रेखाएँ)

$OA = OA$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore \quad \Delta OPA \cong \Delta OCA$ (SSS सर्वांगसमता गुणधर्म से)

सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण समान होते हैं।

$\angle POA = \angle AOC$ …(1)

इसी प्रकार बिन्दु B से वृत्त पर BQ और BC स्पर्श रेखाएँ हैं।

अतः $\quad BQ = BC$

ΔOQB तथा ΔOBC में,

$OQ = OC$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$BQ = BC$ (बिन्दु B से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ)

$OB = OB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore \quad \Delta OQB \cong \Delta OCB$

$\Rightarrow \quad \angle BOQ = \angle COB$ …(2)

$\because \angle POA + \angle AOC + \angle COB + \angle BOQ = 180°$

समीकरण (1) व (2) से,

$\Rightarrow \angle AOC + \angle AOC + \angle COB + \angle COB = 180°$

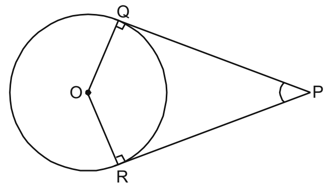
$\Rightarrow \quad 2(\angle AOC + \angle COB) = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle AOC + \angle COB = \dfrac{180°}{2} = 90°$

$\therefore \quad \angle AOB = 90°$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण का सम्पूरक होता है।

हल : दिया है : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है। वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु P से PQ और PR दिए गए वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं।



सिद्ध करना है : $\angle ROQ + \angle QPR = 180°$

उपपत्ति : OQ त्रिज्या है तथा बिन्दु P से PQ स्पर्श रेखा है जो वृत्त को बिन्दु Q पर स्पर्श करती है।

$\angle OQP = 90°$ [$\because$ स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से होकर खींची गई त्रिज्या पर लम्ब होती है]

इसी प्रकार, $\quad \angle ORP = 90°$

अब चतुर्भुज $ROQP$ में,

$\angle ROQ + \angle PRO + \angle OQP + \angle QPR = 360°$

$\Rightarrow \quad \angle ROQ + 90° + 90° + \angle QPR = 360°$

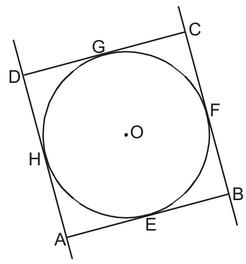
$\Rightarrow \quad \angle ROQ + \angle QPR = 360° - 180°$

$\Rightarrow \quad \angle ROQ + \angle QPR = 180°$

अतः $\angle QPR$, $\angle ROQ$ का सम्पूरक है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समान्तर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

हल : दिया है : केन्द्र O वाले वृत्त के परिगत एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ खींचा जिसकी भुजाएँ वृत्त को क्रमशः E, F, G व H बिन्दुओं पर स्पर्श करती हैं।



सिद्ध करना है : $ABCD$ एक समचतुर्भुज है।

उपपत्ति : $\because$ बाहरी बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई दोनों स्पर्श रेखाओं की लम्बाई समान होती है।

अब वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु B से BE और BF वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

$\therefore \quad BE = BF$ …(1)

इसी प्रकार, $\quad AE = AH$ …(2)

$CG = CF$ …(3)

तथा $\quad DG = DH$ …(4)

समीकरण (1), (2), (3) व (4) को जोड़ने पर,

$(BE + AE) + (CG + DG) = (BF + CF) + (AH + DH)$

$\Rightarrow \quad AB + CD = BC + AD \quad \ldots(5)$

$\because$ दिया है, $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore \quad AB = CD$ और $BC = AD \quad \ldots(6)$

समीकरण (5) व (6) से,

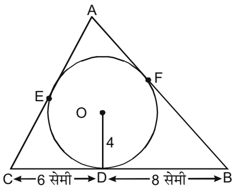
$$AB + AB = BC + BC$$

$\Rightarrow \quad 2AB = 2BC \Rightarrow AB = BC$

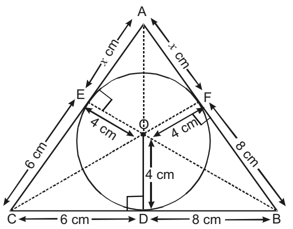
$\therefore \quad AB = BC = CD = AD$

अत: $ABCD$ एक समचतुर्भुज है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 12. 4 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के परिगत एक त्रिभुज *ABC* इस प्रकार खींचा गया है कि रेखाखण्ड *BD* और *DC* (जिनमें स्पर्श बिन्दु *D* द्वारा *BC* विभाजित है) की लम्बाइयाँ क्रमश: 8 सेमी और 6 सेमी हैं। भुजाएँ *AB* और *AC* ज्ञात कीजिए।



संकेत : किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाई समान होती है तथा वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु से होकर खींची गई त्रिज्या पर लम्ब होती है।



ΔABC में, $b = AC = (x + 6)$ सेमी

$a = CB = (6 + 8)$ सेमी $= 14$ सेमी

$c = BA = (8 + x)$ सेमी

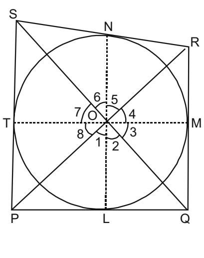
(ΔABC) का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{शीर्षलम्ब}$$

ΔABC का क्षेत्रफल $= \Delta OBC$ का क्षेत्रफल $+ \Delta BOA$ का क्षेत्रफल $+ \Delta AOC$ का क्षेत्रफल

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के परिगत बने चतुर्भुज की आमने-सामने की भुजाएँ केन्द्र पर सम्पूरक कोण अन्तरित करती हैं।



हल : दिया है : केन्द्र O वाले वृत्त के परिगत बना चतुर्भुज $PQRS$ जिसकी भुजाएँ PQ, QR, RS और SP वृत्त को क्रमश: L, M, N, T बिन्दुओं पर स्पर्श करती हैं।

सिद्ध करना है :

$\angle POQ + \angle SOR = 180°$ और $\angle SOP + \angle ROQ = 180°$

रचना : वृत्त के केन्द्र O से P, Q, R, S, L, M, N तथा T को मिलाया।

उपपत्ति : OL, OM, ON तथा OT वृत्त की त्रिज्याएँ हैं तथा QL, MQ, RN तथा ST वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं।

$QL \perp OL$, $QM \perp OM$, $RN \perp ON$ तथा $ST \perp OT$

अब समकोण ΔOMQ तथा समकोण ΔOLQ में

$\angle OMQ = \angle OLQ$ (प्रत्येक 90° है)

कर्ण $OQ =$ कर्ण OQ (उभयनिष्ठ भुजा)

तथा $OM = OL$ (वृत्त की समान त्रिज्याएँ)

$\therefore \quad \Delta OMQ \cong \Delta OLQ$ (RHS सर्वांगसमता गुणधर्म से)

$\Rightarrow \quad \angle 3 = \angle 2$ (CPCT)

इसी प्रकार, $\angle 4 = \angle 5$

$\angle 6 = \angle 7$ तथा $\angle 8 = \angle 1$

$\because$ वृत्त के केन्द्र-बिन्दु O पर बने सभी कोणों का योग 360° होता है।

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360°$

$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 6 + \angle 1 = 360°$

$\Rightarrow \quad 2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6) = 360°$

$\Rightarrow \quad (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 5 + \angle 6) = 180°$

$\angle POQ + \angle SOR = 180°$

$[\because \angle 1 + \angle 2 = \angle POQ$ तथा $\angle 5 + \angle 6 = \angle SOR]$

इसी प्रकार $\angle SOP + \angle ROQ = 180°$

अत: वृत्त के परिगत बने चतुर्भुज के आमने-सामने की भुजाएँ केन्द्र पर सम्पूरक कोण अन्तरित करती हैं। **इति सिद्धम्।**

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं?

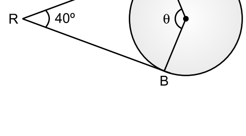
हल : अनंत।

प्रश्न 2. 4 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु पर कितनी स्पर्श रेखाओं की रचना की जा सकती है?

हल : केवल एक।

प्रश्न 3. यदि बिन्दु *R* से *O* केन्द्र वाले किसी वृत्त पर *RA* व *RB* स्पर्श रेखाएँ परस्पर θ के कोण पर झुकी हों तथा $\angle AOB = 40°$ हो तो कोण θ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : जब किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जाती हैं, तो $\angle AOB + \theta = 180°$



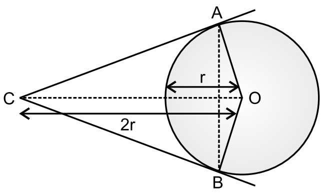
प्रश्न 4. एक बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जबकि बिन्दु की वृत्त के केन्द्र से दूरी 13 सेमी है और वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है।

संकेत : पाइथागोरस प्रमेय प्रयोग करें।

प्रश्न 5. O केन्द्र वाले वृत्त पर बाह्य बिन्दु C से CA तथा CB दो स्पर्श रेखाएँ खींची जाती है। यदि CO की लम्बाई वृत्त के व्यास के बराबर हो, तो सिद्ध करो कि ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।

हल : दिया है : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है।

बाह्य बिन्दु C से वृत्त पर CA तथा CB दो स्पर्श रेखाएँ खींची गई हैं, जो क्रमशः A और B पर वृत्त को स्पर्श करती हैं।



CO की लम्बाई वृत्त के व्यास के बराबर है।

मान लेते हैं कि वृत्त की त्रिज्या $= r$

अतः व्यास $= 2r$ इसलिए $CO = 2r$

सिद्ध करना है : त्रिभुज ABC एक समबाहु त्रिभुज है।

सिद्ध : चूँकि स्पर्श बिन्दु पर खींची गई त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है। अतः $OA \perp CA$ तथा $OB \perp CB$

समकोण त्रिभुज OAC में,

$$AC^2 = OC^2 - OA^2 \Rightarrow AC = \sqrt{3}r$$

इसी प्रकार, समकोण त्रिभुज OBC, में

$$BC = \sqrt{3}r \Rightarrow AC = BC$$

अब त्रिभुज OAC में,

$$\cos\angle ACO = \frac{OA}{OC} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

इससे $\angle ACO = 60°$

अतः $\angle ACB = \angle ACO + \angle BCO$

$= 60° + 60° = 120°$

बाह्य बिन्दु से खींची गई दो स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण, केन्द्र पर बने कोण का सम्पूरक होता है।

अतः $\angle ACB = 180° - \angle AOB$

$120° = 180° - \angle AOB$

$\angle AOB = 60°$

चूँकि $OA = OB$

इसलिए त्रिभुज AOB समद्विबाहु है।

अतः $\angle OAB = \angle OBA = 60°$

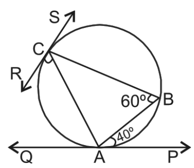
इस प्रकार त्रिभुज ABC के सभी कोण $60°$ हैं।

अतः त्रिभुज ABC समबाहु त्रिभुज है। **सिद्ध हुआ।**

प्रश्न 6. 15 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा के बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि $OQ = 39$ सेमी, तो PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

संकेत : पाइथागोरस प्रमेय प्रयोग करें।

प्रश्न 7. आकृति में PQ तथा RS एक वृत्त पर क्रमशः बिन्दु A और C पर स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि $\angle ABC = 60°$ और $\angle BAP = 40°$ हो तो $\angle BCR$ ज्ञात कीजिए।



हल : एकांतर वृत्तखण्ड प्रमेय के अनुसर,

$$\angle BAP = \angle ACB$$

अतः $\angle ACB = 40°$

तथा $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$

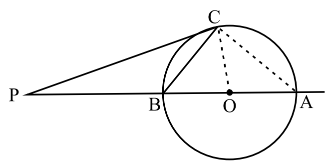
$60° + \angle BAC + 40° = 180°$

$\angle BAC = 80°$

एकांतर वृत्तखण्ड प्रमेय के अनुसार,

$$\angle BCR = \angle BAC = 80°.$$

प्रश्न 8. किसी वृत्त की बिन्दु C पर खींची गई स्पर्श रेखा और व्यास AB को बढ़ाने पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle PCA = 120°$ तो $\angle CBA$ ज्ञात कीजिए।



हल : $\angle BCA = 90°$

चित्र से स्पष्ट है कि $\angle PCA$ दो कोणों का योग है :

$\angle PCA = \angle PCB + \angle BCA$

$120° = \angle PCB + 90°$

$\angle PCB = 30°$

एकांतर वृत्तखण्ड प्रमेय के अनुसार, स्पर्श रेखा (PC) और जीवा (BC) के बीच का कोण, एकांतर वृत्तखण्ड में बने कोण $\angle CAB$ के बराबर होता है।

$\angle CAB = \angle PCB = 30°$

अब ΔABC में, तीनों कोणों का योग $180°$ होता है :

$\angle CBA = 180° - \angle BCA + \angle CAB$

$= 180° - (90° + 30°) = 60°$

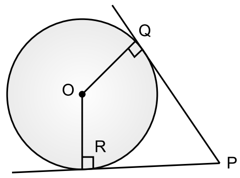
प्रश्न 9. O केन्द्र वाले वृत्त के बाह्य बिन्दु P से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PQ और PR खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए कि $QORP$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

हल : $OQ \perp PQ$ (स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लंब)

$OR \perp PR$ (स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लंब)

$\angle OQP = 90°$

$\angle ORP = 90°$



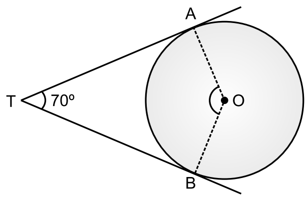
$\angle OQP + \angle ORP$

$= 90° + 90° = 180°.$

चक्रीय चतुर्भुज $OQRP$ के सम्मुख कोणों का योग 180° है। **इति सिद्धम्।**

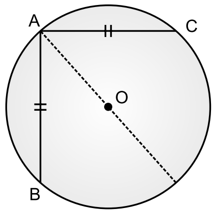
प्रश्न 10. यदि एक बिन्दु *T* से *O* केन्द्र वाले किसी वृत्त पर *TA* व *TB* स्पर्श रेखाएँ परस्पर 70° के कोण पर झुकी हों तो $\angle AOB$ को ज्ञात कीजिए।

हल :



$\angle AOB = 180° - 70° = 110°$

प्रश्न 11. एक वृत्त की दो जीवा *AB* तथा *AC* लम्बाई में समान है। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC$ का समद्विभाजक वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरता है।



हल : माना O वृत्त का केंद्र है और $AB = AC$।

चूँकि $AB = AC$ (समान जीवाएँ)

त्रिभुज ABC में, $AB = AC$

इसलिए, $\angle ABC = \angle ACB$

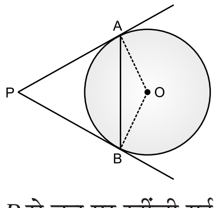
(समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

$\angle BAC$ का समद्विभाजक AD खींचते हैं।

समद्विभाजक समान भुजाओं वाले त्रिभुज के आधार पर लंब होता है और केंद्र O से भी BC पर लंब होता है (समान जीवाओं से समान दूरी)।

अत: AD केंद्र O से होकर जाता है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 12. सिद्ध करो कि वृत्त की किसी जीवा के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ, जीवा से समान कोण बनाती हैं।



हल : दिया है : एक वृत्त जिसका केंद्र O है, AB एक जीवा है।

बिन्दु A और B से खींची गई स्पर्श रेखाएँ P पर मिलती हैं।

सिद्ध करना है : $\angle PAB = \angle PBA$

उपपत्ति: (i) PA और PB बाहय बिन्दु P से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ हैं। (ii) बाहय बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं।

अत: $PA = PB$

$\because$ त्रिभुज PAB में $PA = PB$.

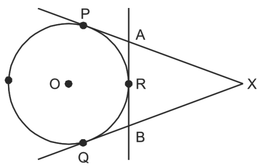
$\therefore$ यह एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

त्रिभुज में, बराबर भुजाओं के सामने के कोण बराबर होते हैं।

$\angle PAB = \angle PBA$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 13. निम्न आकृति में *XP* तथा *XQ*, केन्द्र *O* वाले वृत्त पर बिन्दु *X* से खींची गई स्पर्श रेखाएँ हैं तथा *AB* वृत्त के बिंदु *R* पर स्पर्श रेखा है।

सिद्ध कीजिए— $XA + AR = XB + BR$



हल : सिद्ध करना है : $XA + AR = XB + BR$

उपपत्ति—हम जानते हैं कि वृत्त के किसी बाहरी बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाई बराबर होती है।

बिन्दु x से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ XP और XQ हैं।

अत: $XP = XQ$ ...(i)

बिन्दु A से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ AP और AR हैं।

$AP = AR$ ...(ii)

बिन्दु B से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ BQ और BR हैं।

अत: $BQ = BR$ ...(iii)

अब, समीकरण (i) से,

$XP = XQ$ ...(iv)

चित्रानुसार, $XP = XA + AP$

और $XQ = XB + BQ$

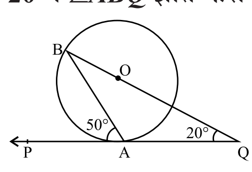
समीकरण (iv) में मान रखने पर,

$XA + AP = XB + BQ$

समीकरण (ii) और (iii) से AP और BQ के मान रखने पर

$XQ + AR = XB + BR$ **इति सिद्धम्।**

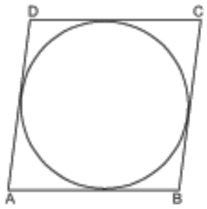
प्रश्न 14. दिए गये चित्र में *O*, वृत्त का केन्द्र है। वृत्त के बिन्दु *A* पर *PQ* एक स्पर्श रेखा है। यदि $\angle PAB = 50°$ तथा $\angle AQB = 20°$। $\angle ABQ$ ज्ञात करो।



हल : $\angle PAQ = 180° - \angle PAB$ (रेखीय कोण)

तथा $\angle ABQ = 180° - (130° + 20°) = 30°$

प्रश्न 15. चित्र में एक वृत्त चतुर्भुज *ABCD* की चारों भुजाओं को अन्तः स्पर्श करता है। यदि *AB* = 6 सेमी, *BC* = 7 सेमी और *CD* = 4 सेमी हो, तो *AD* ज्ञात कीजिए।

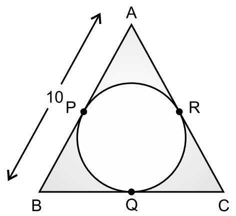


हल : जब कोई वृत्त किसी चतुर्भुज की चारों भुजाओं को स्पर्श करता है, तो आमने-सामने की भुजाओं का योग बराबर होता है ($AB + CD = BC + AD$)।

$AB = 6$ सेमी, $BC = 7$ सेमी और $CD = 4$ सेमी मान रखने पर,

$$6 + 4 = 7 + AD \Rightarrow AD = 10 - 7 = 3 \text{ सेमी।}$$

प्रश्न 16. एक वृत्त के परिगत ΔABC इस प्रकार खींचा जाता है जिसकी भुजाएँ *AB*, *BC* तथा *CA* वृत्त को क्रमशः *P*, *Q* तथा *R* पर स्पर्श करता है। यदि *AB* = 10 सेमी, *AR* = 7 सेमी तथा *CR* = 5 सेमी है तो *BC* की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल : वृत्त के किसी बाहरी बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाई समान होती है।

$AP = AR = 7$ सेमी

$\because \; AB = 10$ सेमी

$\therefore \quad BP = AB - BP = 10 - 7 = 3$ सेमी

$BQ = BP = 3$ सेमी

$CQ = CR = 5$ सेमी

$BC = BQ + CQ = 3 + 5 = 8$ सेमी

$BC = 8$ सेमी।

निबन्धात्मक प्रश्न

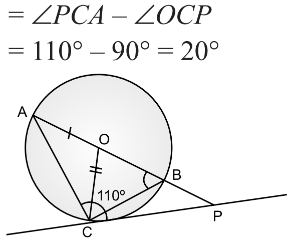
प्रश्न 1. किसी वृत्त के बिन्दु *C* पर खींची गई स्पर्श रेखा और इसके व्यास *AB* को बढ़ाया जाता है तो बिन्दु *P* पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle PCA = 110^\circ$, तो $\angle CBA$ का मान बताओ।

हल : केन्द्र *O* से स्पर्श बिन्दु *C* को मिलाया ($OC \perp PC$)

$\therefore \quad \angle OCP = 90^\circ$

$\angle OCA = \angle PCA - \angle OCP$

$= 110^\circ - 90^\circ = 20^\circ$

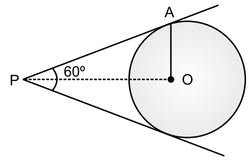


ΔABC में, $\angle CBA = 180^\circ - (\angle ACB + \angle BAC)$

$= 180^\circ - (90^\circ + 20^\circ) = 70^\circ.$

प्रश्न 2. यदि त्रिज्या 3 सेमी वाले एक वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ ऐसे खींची जाएँ कि उनके बीच का कोण 60° हो, तो प्रत्येक स्पर्श रेखा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

संकेत :

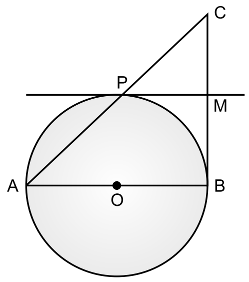


चित्र से, $\tan 30^\circ = \dfrac{OA}{AP} \Rightarrow AP = 3\sqrt{3}$

अतः दोनों की लम्बाई $3\sqrt{3}$ सेमी

प्रश्न 3. एक समकोण त्रिभुज *ABC* में जिसमें $\angle B = 90^\circ$ है, *AB* को व्यास मानकर एक वृत्त खींचा गया है जो कर्ण *AC* को बिन्दु *P* पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिये कि बिन्दु *P* पर वृत्त की स्पर्श रेखा *BC* को समद्विभाजित करती है।

हल :



उपपत्ति : *AB* वृत्त का व्यास है, इसलिए अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है। $\angle APB = 90^\circ$

ΔABC में, $\angle B = 90^\circ$ (दिया है)

अतः $\angle APB = \angle ABC$

अतः बिन्दु *A*, *P* और *C* एक ही सरल रेखा पर स्थित होंगे।

बिन्दु *P* पर खींची गई स्पर्श रेखा *PM* तथा जीवा *PB* के लिए,

(स्पर्श रेखा – जीवा प्रमेय के अनुसार)

$\angle MPB = \angle MCB$

$\because$ *A*, *P* और *C* एक ही रेखा पर हैं

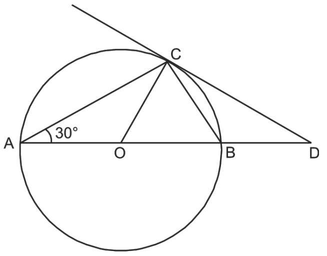
$\therefore \quad \angle MPB = \angle MBC$

अतः ΔMBC में, $\angle MBC = \angle MCB$

समद्विबाहु त्रिभुज के भुजा से

$\therefore \quad BM = MC$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 4. निम्न आकृति में, *O* केंद्र वाले वृत्त का व्यास *AB* है तथा *AC* इसकी एक जीवा है। $\angle BAC = 30^\circ$ है। यदि बिंदु *C* पर खींची गई स्पर्श-रेखा, बढ़ाए गए व्यास *AB* को बिन्दु *D* पर प्रतिच्छेद करती है, तो दर्शाइए कि *BC* = *BD*।



हल : चित्र से, $\angle ABC = 180° - (90 + 30) = 60°$

तथा $\angle BCD = \angle BAC = 30°$

ΔBCD में बाहरी कोण

$$\angle ABC = \angle BCD + \angle BDC$$
$$60° = 30° + \angle BDC$$
$$\angle BDC = 30°$$

$\because$ $\angle BCD = \angle BDC = 30°$

$\therefore$ इनकी सम्मुख भुजाएँ $BC = BD$ होगी।

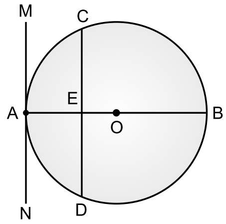
प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि एक वृत्त का व्यास AB उन सभी जीवाओं को समद्विभाजित करता है जो बिन्दु A पर स्पर्श रेखा के समान्तर है।

हल : दिया गया है : AB केन्द्र O वाले वृत्त का व्यास है।

MN बिन्दु A पर वृत्त की स्पर्श रेखा है।

CD स्पर्श रेखा MN के समांतर कोई जीवा है।

सिद्ध करना है : व्यास AB जीवा CD को समद्विभाजित करता है (अर्थात् यदि AB, CD को बिन्दु E पर काटता है, तो $CE = ED$)



उपपत्ति : चूँकि MN बिन्दु A पर वृत्त की स्पर्श रेखा है, और OA स्पर्श बिन्दु पर त्रिज्या है, इसलिए OA लम्बवत् MN (स्पर्श बिन्दु पर त्रिज्या, स्पर्श रेखा के लम्बवत् होती है)

अत: कोण $MAO = 90$ अंश

चूँकि CD समांतर MN (दिया है कि CD स्पर्श रेखा के समांतर है) और AB इन समांतर रेखाओं को काटने वाली तिर्यक रेखा है।

कोण CEO = कोण MAO (तिर्यक् रेखा द्वारा समांतर रेखाओं को काटने पर संगत कोण बराबर होते हैं)

अत: कोण $CEO = 90$ अंश

इसका अर्थ है कि OE लम्बवत् CD।

वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब, जीवा को समद्वि भाजित करता है।

चूँकि OE लम्बवत् CD और O वृत्त का केन्द्र है।

$$CE = ED$$

चूँकि CD, बिन्दु A पर स्पर्श रेखा के समांतर कोई भी स्वेच्छ जीवा थी, इसलिए हम निष्कर्ष निकालते हैं कि व्यास AB बिन्दु A पर स्पर्श रेखा के समान्तर सभी जीवाओं को समद्विभाजित करता है। **इति सिद्धम्।**

●●

11 वृत्तों से सम्बन्धित क्षेत्रफल

प्रश्नावली 11.1

प्रश्न 1. 6 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्य खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है।

हल : त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \pi r^2 \times \dfrac{\theta}{360°}$

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times \frac{60°}{360°} = 18{\cdot}857 \text{ वर्ग सेमी}$$ **उत्तर**

प्रश्न 2. एक वृत्त के चतुर्थांश (quadrant) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 22 सेमी है।

हल : वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{22}{2\pi}\right)^2 = \frac{77}{8} = 9.625 \text{ वर्ग सेमी}$$

उत्तर

प्रश्न 3. एक घड़ी की मिनट की सुई की लम्बाई 14 सेमी है। इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : मिनट की सुई 5 मिनट में $\dfrac{360°}{60°} \times 5$

$= 30°$ का कोण बनाती है।

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \pi r^2 \times \dfrac{\theta}{360°}$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times \frac{30^o}{360^o} = \frac{154}{3} = 51.33$ वर्ग सेमी **उत्तर**

प्रश्न 4. 10 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर एक समकोण अन्तरित करती है। निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) संगत लघु वृत्तखण्ड

(ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड ($\pi = 3{\cdot}14$ का प्रयोग कीजिए)।

हल : दिया है : (i) वृत्त की त्रिज्या (r) = 10 सेमी

जीवा द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण (θ) = 90^o

$\therefore$ संगत लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360^o} - \frac{r^2}{2} \sin\theta$$

$$= \frac{3{\cdot}14 \times (10)^2 \times 90^o}{360^o} - \frac{(10)^2 \sin 90^o}{2}$$

$$= \frac{3{\cdot}14 \times 100 \times 90^o}{360^o} - \frac{100}{2} \times 1$$

$$= \frac{3{\cdot}14 \times 100}{4} - \frac{100}{2} = \frac{57}{2} = 28{\cdot}5 \text{ वर्ग सेमी}$$

(ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \ (360° - 90°)}{360°} = \frac{3{\cdot}14 \times 10^2 \times 270°}{360°}$$

$$= 314 \times \frac{3}{4} = 235{\cdot}5 \text{ सेमी}^2$$

प्रश्न 5. त्रिज्या 21 सेमी वाले वृत्त का एक चाप केन्द्र पर 60^o का कोण अन्तरित करता है। ज्ञात कीजिए :

(i) चाप की लम्बाई

(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

(iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल।

हल : (i) चाप की लम्बाई (L) = $2\pi r \times \frac{\theta}{360^o}$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times \frac{60^o}{360^o} = 22 \text{ सेमी}$$

(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \pi r^2 \times \frac{\theta}{360^o} = \frac{22}{7} \times (21)^2 \times \frac{60^o}{360^o}$$

$$= \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times \frac{1}{6} = 231 \text{ वर्ग सेमी}$$

(iii) संगत जीवा द्वारा बने वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360^o} - \frac{r^2}{2} \sin\theta$$

$$= \frac{22 \times (21)^2 \times 60^o}{7 \times 360^o} - \frac{(21)^2}{2} \sin 60^o$$

$$= \frac{22 \times 441}{7 \times 6} - \frac{441}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

= 231 – 190·95 (लगभग) = 40·05 वर्ग सेमी

प्रश्न 6. 15 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर 60^o का कोण अन्तरित करती है। संगत लघु और दीर्घ वृत्तखण्डों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : $\therefore$ संगत लघु वृत्तखण्ड़ का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360^o} - \frac{r^2}{2} \sin\theta$$

$$= \frac{3.14 \times (15)^2 \times 60^o}{360^o} - \frac{(15)^2}{2} \sin 60°$$

$$= \frac{3.14 \times 225 \times 60^o}{360^o} - \frac{225}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

हल करने पर, $= \frac{245.25}{12} = 20.4375$ वर्ग सेमी

दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

= वृत्त का क्षेत्रफल – लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$= \pi r^2 - 20.4375 = 3.14 \times (15)^2 - 20.4375$

$= 3.14 \times 225 - 20.4375$

= 706.50 – 20.4375 = 686.0625 वर्ग सेमी

प्रश्न 7. त्रिज्या 12 सेमी वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर 120^o का कोण अन्तरित करती है। संगत वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : संगत (लघु) वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360^o} - \frac{r^2}{2} \sin\theta$$

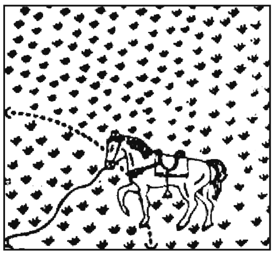
$$= \frac{3.14 \times (12)^2 \times 120^o}{360^o} - \frac{(12)^2}{2} \sin 120^o$$

$$= \frac{3.14 \times 144}{3} - \frac{144}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

= 150.72 – 62.28 = 88.44 वर्ग सेमी

प्रश्न 8. चित्र में 15 मीटर भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूँटे से एक घोड़े को

5 मीटर लम्बी रस्सी से बाँध दिया गया है। ज्ञात कीजिए— (i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोड़ा घास चर सकता है। (ii) चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि, यदि घोड़े को 5 मीटर लम्बी रस्सी के स्थान पर 10 मीटर लम्बी रस्सी से बाँध दिया जाए। ($\pi = 3{\cdot}14$ का प्रयोग कीजिए।)



हल : वर्गाकार मैदान की भुजा = 15 मीटर

वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2 = (15)^2$

= 225 वर्ग मीटर

(i) $\therefore$ घोड़ा एक 5 मीटर लम्बी रस्सी से बँधा है

$\because$ वह अधिकतम 5 मीटर त्रिज्या वाले वृत्त के त्रिज्यखण्ड में घास चर सकेगा अर्थात् $r = 5$ मीटर

तथा मैदान के कोने पर बना कोण $(\theta) = 90^\circ$

संगत त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = $\dfrac{\pi r^2\theta}{360^\circ}$

$= \dfrac{3.14\times(5)^2\times 90^\circ}{360^\circ} = \dfrac{3.14\times5\times5}{4} = 19.625$ वर्ग मीटर

(ii) यदि रस्सी की लम्बाई 10 मीटर कर दी जाए अर्थात् $r = 10$ मीटर

तो त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = $\dfrac{\pi r^2\theta}{360^\circ}$

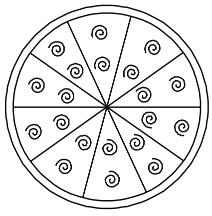
$= \dfrac{3.14\times(10)^2\times 90^\circ}{360^\circ} = \dfrac{3.14\times10\times10}{4} = 78.5$ वर्ग मीटर

अत: घोड़ा 78.5 वर्ग मीटर क्षेत्र में घास चर सकेगा।

$\therefore$ क्षेत्रफल में वृद्धि = 78.5 – 19.625

= 58.875 वर्ग मीटर। **उत्तर**

प्रश्न 9. एक वृत्ताकार ब्रूच (brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाना है जिसका व्यास 35 मिमी है। तार को वृत्त के 5 व्यासों को बनाने में भी प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्य- खण्डों में विभाजित करता है जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है तो ज्ञात कीजिए : (i) कुल वांछित चाँदी के तार की लम्बाई (ii) ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल



हल : (i) $\because$ चाँदी के ब्रूच के वृत्तीय भाग की माप (परिधि)

$= 2\pi r = \pi\times \text{व्यास} = \dfrac{22}{7}\times 35 = 110$ मिमी

तथा 5 व्यासों की लम्बाई = $35\times5 = 175$ मिमी

$\therefore$ चाँदी के तार की कुल लम्बाई = 110 + 175 = 285 मिमी

(ii) $\because$ वृत्ताकार ब्रूच का क्षेत्रफल = πr^2

$= \dfrac{22}{7}\times\left(\dfrac{35}{2}\right)^2 = \dfrac{1925}{2}$ वर्ग मिमी

$\because$ ब्रूच को 10 बराबर त्रिज्यखण्डों में विभाजित किया गया है।

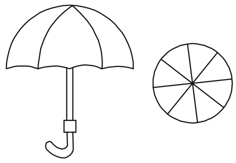
$\therefore$ 1 त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$= \dfrac{\text{वृत्ताकार ब्रूच का क्षेत्रफल}}{10} = \dfrac{1925}{2\times10} = 96.25$ वर्ग मिमी

अत: ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

= 96.25 वर्ग मिमी। **उत्तर**

प्रश्न 10. एक छतरी में आठ तानें हैं, जो बराबर दूरी पर लगी हुई हैं। छतरी को 45 सेमी त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है : छतरी की त्रिज्या (r) = 45 सेमी

$\because$ दो क्रमागत तानों के बीच एक त्रिज्यखण्ड बनता है।

$\therefore$ त्रिज्यखण्ड का कोण $(\theta) = \dfrac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

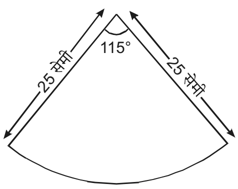
$\therefore$ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = $\pi r^2\times\dfrac{\theta}{360^\circ}$

$= \dfrac{22}{7}\times(45)^2\times\dfrac{45^\circ}{360^\circ} = \dfrac{22}{7}\times45\times45\times\dfrac{1}{8}$

$= \dfrac{22275}{28}$ वर्ग सेमी = $795{\cdot}536$ वर्ग सेमी (लगभग)

अत: दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल = $795{\cdot}536$ (लगभग) वर्ग सेमी **उत्तर**

प्रश्न 11. किसी कार के दो वाइपर (Wipers) हैं, जो परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते हैं। प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लम्बाई 25 सेमी है और 115° के कोण तक घूमकर सफाई कर सकता है। पत्तियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है : वाइपर की पत्ती की लम्बाई

$= \text{त्रिज्या } (r) = 25$ सेमी

त्रिज्यखण्ड का कोण $(\theta) = 115^\circ$

प्रत्येक वाइपर द्वारा साफ किया गया क्षेत्रफल

= त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \pi r^2 \times \frac{\theta}{360^\circ} = \frac{22}{7} \times (25)^2 \times \frac{115^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{158125}{252} \text{ वर्ग सेमी}$$

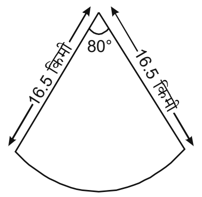
दोनों वाइपरों के द्वारा साफ किया गया क्षेत्रफल

$$= 2 \times \frac{158125}{252} = \frac{158125}{126} = 1254{\cdot}96 \text{ वर्ग सेमी}$$

प्रश्न 12. जहाजों को समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए एक लाइट हाउस (light house) 80° कोण वाले एक त्रिज्यखण्ड में 16·5 किमी की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलाता है। समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें जहाजों को चेतावनी दी जा सके। ($\pi = 3{\cdot}14$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : दिया है : त्रिज्यखण्ड का कोण $(\theta) = 80^\circ$

त्रिज्यखण्ड की त्रिज्या $(r) = 16{\cdot}5$ किमी $= \frac{33}{2}$ किमी



समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल जिसमें जहाजों को चेतावनी दी जा सके

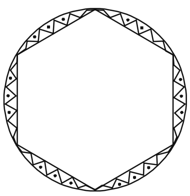
= त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \pi r^2 \times \frac{\theta}{360^\circ}$$

$$= 3{\cdot}14 \times \left(\frac{33}{2}\right)^2 \times \frac{80^\circ}{360^\circ}$$

$= 3{\cdot}14 \times 60{\cdot}5 = 189{\cdot}97$ वर्ग किमी

प्रश्न 13. एक गोल मेजपोश पर छः समान डिजाइन बने हुए हैं जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। यदि मेजपोश की त्रिज्या 28 सेमी है, तो ₹ 0·35 प्रतिवर्ग सेमी की दर से इन डिजाइनों को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{3} = 1{\cdot}7$ का प्रयोग कीजिए)

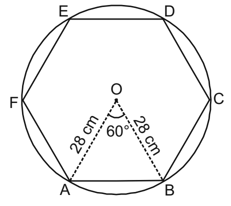


हल : दिया है : समान डिजाइनों की संख्या = 6

मेजपोश के वृत्त की त्रिज्या $(r) = 28$ सेमी

प्रत्येक डिजाइन त्रिज्यखण्ड के आकार है और जीवाओं द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण (θ)

$$= \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$



$\therefore$ प्रत्येक वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} - \frac{r^2}{2} \sin \theta$$

$$= \frac{22}{7} \times (28)^2 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} - \frac{(28)^2}{2} \sin 60^\circ$$

$$= \frac{22}{7} \times 28 \times 28 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} - \frac{28 \times 28}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$= 410{\cdot}67 - 333{\cdot}2 = 77{\cdot}47$ वर्ग सेमी

$\therefore$ छः वृत्तखण्डों का क्षेत्रफल $= 77{\cdot}47 \times 6$

$= 464{\cdot}82$ वर्ग सेमी

$\because$ 1 वर्ग सेमी डिजाइन बनाने का खर्च = ₹ 0·35

$\therefore$ 464·82 वर्ग सेमी डिजाइन बनाने का खर्च

= ₹ 464·82 × 0·35 = ₹ 162·68

प्रश्न 14. निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए :

त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल जिसका कोण P° है, निम्नलिखित है :

(A) $\frac{P^\circ}{180^\circ} \times 2\pi R$ **(B)** $\frac{P^\circ}{180^\circ} \times \pi R^2$

(C) $\frac{P^\circ}{360^\circ} \times 2\pi R$ **(D)** $\frac{P^\circ}{720^\circ} \times 2\pi R^2$

उत्तर : (D)

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. किसी वृत्त का त्रिज्यखंड उस वृत्त का चतुर्थांश है, तो त्रिज्यखंड में केन्द्र पर बनने वाले कोण का माप क्या होगा?

संकेत : कोण = 90 डिग्री।

प्रश्न 2. त्रिज्या r वाले वृत्त के एक त्रिज्यखंड जिसका कोण अंश में θ है। चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

संकेत : चाप की लंबाई $= \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$

प्रश्न 3. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 सेमी है।

संकेत : क्षेत्रफल $= \pi r^2 = 7 = 154$ सेमी^{2}।

प्रश्न 4. 44 सेमी परिधि वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : क्षेत्रफल = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{44}{2\pi}$ = 154 सेमी^{2}

प्रश्न 5. त्रिज्या 21 सेमी. वाले वृत्त का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अन्तरित करता है, तो संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : लघु त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\frac{60}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 231$ सेमी^{2}

दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$= \pi r^2 - 231 = \frac{22}{7} \times 21 \times 21 - 231$

$= 1386 - 231 = 1155$ सेमी^{2}।

प्रश्न 6. किसी वृत्त का व्यास समबाहु त्रिभुज की भुजा के बराबर है, तो बताइए कि उनके क्षेत्रफलों का अनुपात क्या होगा?

हल : समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

अनुपात = $\left(\frac{\pi a^2}{4}\right) : \left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right) = \pi : \sqrt{3}$

प्रश्न 7. एक वृत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 44 सेमी है।

हल : चतुर्थांश का क्षेत्रफल = $\frac{90}{360} \times \pi r^2$

$= \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{22}{7}\right) \times \left(\frac{44}{2\pi}\right)^2 = 38.5$ सेमी।

प्रश्न 8. 7 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त में कोण 120° के संगत दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दीर्घ त्रिज्यखंड = $\pi r^2 - \frac{120}{360} \times \pi r^2$

$= 154 - \frac{154}{3} = \frac{308}{3} = 102.67$ सेमी^{2}

प्रश्न 9. 14 सेमी व्यास वाले वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।

हल : परिधि = $\pi d = \frac{22}{7} \times 14 = 44$ सेमी।

प्रश्न 10. वृत्त के एक त्रिज्यखंड को परिधि 16.4 सेमी है। यदि त्रिज्या 5.2 सेमी है, तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : परिधि = $2x$ + चाप की लम्बाई

16.4 = 2 × 5.2 + चाप

चाप = 16.4 – 10.4 = 6 सेमी

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times r \times$ चाप

$= \frac{1}{2} \times 5.2 \times 6 = 15.6$ वर्ग सेमी।

प्रश्न 11. एक मोटरसाइकिल के पहिये की त्रिज्या 35 सेमी है। 66 किमी/घंटा की चाल रखने के लिए, पहिए को प्रति मिनट कितने चक्कर लगाने चाहिए?

हल : 66 किमी/घंटा = 1100 मी/मिनट

= 110000 सेमी/मिनट

चक्करों की संख्या = $\frac{\text{दूरी}}{\text{परिधि}} = \frac{110000}{2 \times \pi \times 35} = 500.$

प्रश्न 12. एक वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है और त्रिज्यखंड का कोण 90° है, वृत्त के लघु त्रिज्यखंड के चाप की लम्बाई तथा उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

संकेत : चाप की लंबाई = $\left(\frac{\theta}{360}\right) \times 2\pi r$

क्षेत्रफल = $\left(\frac{\theta}{360}\right) \times \pi r^2$

प्रश्न 13. वृत्त के चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण 50° है। यदि चाप की लम्बाई 5π सेमी हो, तो चाप द्वारा बने लघु त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : चाप की लंबाई = $\left(\frac{\theta}{360}\right) \times 2\pi r$

$5\pi = \left(\frac{50}{360}\right) \times 2\pi r \Rightarrow r = 18$ सेमी

क्षेत्रफल= $\left(\frac{50}{360}\right) \times \pi \times 18^2 = 141.3$ सेमी^{2}।

प्रश्न 14. एक वृत्त के चाप की लम्बाई 4 सेमी तथा त्रिज्या 6 सेमी है। वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times r \times$ चाप = $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$ वर्ग सेमी।

प्रश्न 15. निम्नलिखित वृत्तों की त्रिज्याएँ ज्ञात कीजिए जबकि— (i) वृत्त की परिधि 132 सेमी है।

(ii) वृत्त की परिधि 176 सेमी है।

हल : (i) वृत्त की परिधि = 132 सेमी

परिधि = $2\pi r$

$$132 = 2 \times \left(\frac{22}{7}\right) \times r \Rightarrow r = 21 \text{ सेमी।}$$

(ii) इसी प्रकार, $r = 28$ सेमी।

प्रश्न 16. संलग्न चित्र में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

संकेत : आयत का विकर्ण $\sqrt{4^2+3^2}$ = 5 सेमी

वृत्त का क्षेत्रफल πr^2

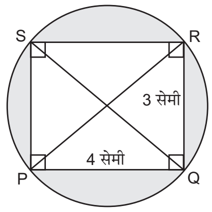
$= 3.14 \times (2.5)^2$

आयत का क्षेत्रफल

$= 4 \times 3 = 12$ सेमी^{2}

छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$19.625 - 12 = 7.625$ सेमी^{2}।



प्रश्न 17. एक वृत्ताकार तालाब का व्यास 17.5 मीटर है। इसके अनुदिश बाहर की ओर 2 मीटर चौड़ा एक पथ बना हुआ है। ₹ 25 प्रति वर्ग मीटर की दर से इस पथ के निर्माण की लागत ज्ञात कीजिए।

हल : बाहरी त्रिज्या = $\frac{17.5}{2} + 2 = 10.75$ मी.

पथ का क्षेत्रफल = 122.57 वर्ग मी।

लागत = $122.57 \times 25 = 3064.25$ रुपये।

प्रश्न 18. 14 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा वृत्त के केन्द्र पर 30° का कोण बनाती है। इससे बनने वाले लघु वृत्तखंड तथा दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

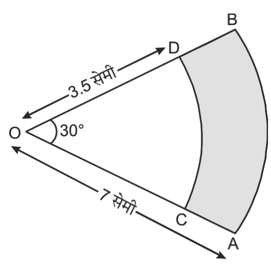
$$= \left(\frac{30}{360}\right) \times \pi \times r^2$$

$$= \left(\frac{1}{12}\right) \times \frac{22}{7} \times 14^2 = 51.33 \text{ वर्ग सेमी}$$

दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल = 616 – 51.33

= 564.67 वर्ग सेमी।

प्रश्न 19. संलग्न चित्र में 7 सेमी और 3.5 सेमी त्रिज्याओं वाले दो संकेन्द्रीय वृत्तों के त्रिज्यखंड प्रदर्शित किए गए हैं। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



संकेत : छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= \left(\frac{\theta}{360}\right) \times \pi \times (R^2 - r^2)$$

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. एक घड़ी के घंटे की सुई 6 सेमी लम्बी है। 9 मिनट में इस सुई द्वारा बनाये गये त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल :

$$= \left(\frac{\theta}{360}\right) \times \pi \times r^2 = \left(\frac{9 \times \frac{360}{720}}{360}\right) \times \left(\frac{22}{7}\right) \times 6 \times 6$$

$$= \left(\frac{1}{80}\right) \times \left(\frac{22}{7}\right) \times 36 = \left(\frac{11}{70}\right) \times \frac{9}{1} = \frac{99}{70}$$

= 1.41 वर्ग सेमी।

प्रश्न 2. एक कागज का आयत *ABCD* आकार का है जिसमें *AB* = 40 सेमी तथा *AD* = 28 सेमी है। यदि इसमें से *AD* व्यास का एक अर्द्धवृत्ताकार भाग काट लिया जाता तो शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

संकेत : आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

अर्धवृत्त का क्षेत्रफल = $\left(\frac{1}{2}\right) \times \pi \times r^2$

शेष भाग का क्षेत्रफल

शेष क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल – अर्धवृत्त का क्षेत्रफल

शेष क्षेत्रफल = 1120 – 308 = 812 वर्ग सेमी।

प्रश्न 3. 10 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के एक जीवा *PQ* वृत्त के केन्द्र पर 60° का कोण अंतरित करती है। वृत्त के लघु तथा दीर्घ वृत्तखंडों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

संकेत : त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \left(\frac{60}{360}\right) \times 3.14 \times 10 \times 10$$

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times r^2$

लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल =

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल — समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{(628-519)}{12} = \frac{109}{12} = 9.03 \text{ वर्ग सेमी}$$

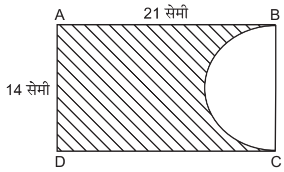
दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल

वृत्त का कुल क्षेत्रफल = $3.14 \times 10 \times 10 = 314$ वर्ग सेमी

दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल

= कुल क्षेत्रफल – लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

प्रश्न 4. दी गई आकृति में, *ABCD* एक आयत हैं जिसकी विमाएँ 21 सेमी × 14 सेमी हैं। *BC* की व्यास मान का एक अर्द्धवृत्त खींचा गया है। आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल तथा परिमाप ज्ञात कीजिए।



संकेत : छायांकित भाग का क्षेत्रफल :

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

अर्धवृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \pi \times r \times r$

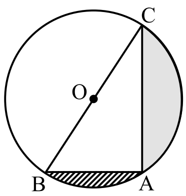
छायांकित भाग का क्षेत्रफल = 294 – 77 = 217 वर्ग सेमी

छायांकित भाग का परिमाप:

परिमाप = भुजा *AB* + भुजा *AD* + भुजा *CD* + अर्धवृत्त का घेरा (चाप)

अर्धवृत्त का घेरा (चाप) $= \pi \times r$

प्रश्न 5. संलग्न आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि *AB* = 5 सेमी, *AC* = 12 सेमी तथा *O* वृत्त का केन्द्र है।



संकेत : पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार,

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$

अर्धवृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \pi \times r \times r$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{13}{2}\right) \times \left(\frac{13}{2}\right)$

अर्धवृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{11}{7} \times \frac{169}{4} = \frac{1859}{28}$ वर्ग सेमी

त्रिभुज *ABC* का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$ वर्ग सेमी

छायांकित भाग का क्षेत्रफल :

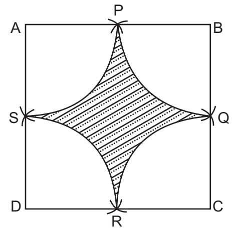
क्षेत्रफल = अर्धवृत्त का क्षेत्रफल – त्रिभुज का क्षेत्रफल

$= \left(\frac{1859}{28}\right) - 30 = \left(\frac{1859 - 30 \times 28}{28}\right)$

$= \left(\frac{1859 - 840}{28}\right)$

$= \frac{1019}{28}$ वर्ग सेमी = 36.39 वर्ग सेमी।

प्रश्न 6. दी गई आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। वर्ग *ABCD* के शीर्षों *A*, *B*, *C* तथा *D* को केन्द्र मानकर खींची गई चापें भुजाओं *AB*, *BC*, *CD* तथा *DA* के मध्य बिन्दुओं क्रमशः *P*, *Q*, *R* तथा *S* पर दो-दो के जोड़ों में काटती हैं तथा वर्ग की भुजा 12 सेमी है।



हल : दिया है, वर्ग *ABCD* की भुजा = 12 सेमी

P, *Q*, *R* और *S* भुजाओं के मध्य बिंदु है।

अतः प्रत्येक चतुर्थांश की त्रिज्या, वर्ग की भुजा की आधी 6 सेमी होगी।

वर्ग का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2 = (12)^2 = 144$ सेमी^{2} ...(i)

अतः चारों चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= 3.14 \times (6)^2 = 113.04$ सेमी^{2} ...(ii)

छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= वर्ग का क्षेत्रफल – चारों चतुर्थांशों का क्षेत्रफल

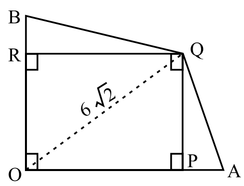
= 144 – 113.04 = 30.96 सेमी^{2}।

प्रश्न 7. एक वृत्त के त्रिज्यखंड का परिमाप 31 सेमी है। यदि वृत्त की त्रिज्या 6.5 सेमी है, तो त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

संकेत : परिमाप= $2r$ + चाप की लम्बाई

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times r \times$ चाप

प्रश्न 8. दी गई आकृति में, एक वृत्त के चतुर्थांश *OAQB* के अन्तर्गत एक वर्ग *OPQR* बना हुआ है। यदि वृत्त की त्रिज्या $6\sqrt{2}$ सेमी है, तो छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : चतुर्थांश के अंदर बने वर्ग का विकर्ण

= त्रिज्या = $6\sqrt{2}$ सेमी; वर्ग का विकर्ण = भुजा × $\sqrt{2}$

$6\sqrt{2}$ = भुजा × $\sqrt{2}$; भुजा = 6 सेमी

चतुर्थांश का क्षेत्रफल $= \left(\frac{1}{4}\right) \times \pi \times r^2$

$= \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{22}{7}\right) \times (6\sqrt{2})^2 = 56.57$ वर्ग सेमी (लगभग)

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा = 36 वर्ग सेमी

छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल : 56.57 – 36 = 20.57 वर्ग सेमी।

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

प्रश्नावली 12.1

प्रश्न 1. दो घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन 64 सेमी^{3} है, के संलग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि घन की प्रत्येक भुजा = x सेमी

घन का आयतन = 64 सेमी^{3} (दिया है)

हम जानते हैं,

घन का आयतन = (भुजा)^3

$\Rightarrow$ $64 = (x)^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64}$

$\therefore$ घन की भुजा (x) = 4 सेमी

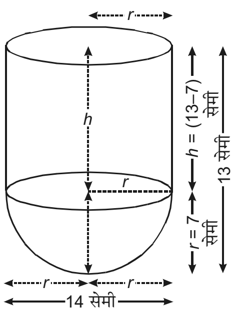
$\because$ जब दोनों घनों को साथ-साथ जोड़ा जाता है, तो घनाभ बन जाता है। जिसकी लम्बाई (l) = 8 सेमी, चौड़ाई (b) = 4 सेमी, ऊँचाई (h) = 4 सेमी

$\therefore$ घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2 \times (lb + bh + hl)$

$= 2 \times (8 \times 4 + 4 \times 4 + 4 \times 8)$

$= 2 \times 80 = 160$ वर्ग सेमी

प्रश्न 2. कोई बर्तन एक खोखले अर्धगोले के आकार का है जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अध्यारोपित है। अर्द्धगोले का व्यास 14 सेमी है और इस बर्तन (पात्र) की कुल ऊँचाई 13 सेमी है। इस बर्तन का आन्तरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : बर्तन का आन्तरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल

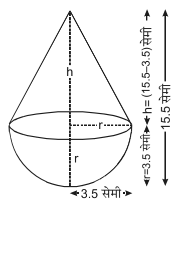
= बेलन का आन्तरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्द्धगोले का आन्तरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (6 + 7)$

$= 44 \times 13 = 572$ वर्ग सेमी

प्रश्न 3. एक खिलौना त्रिज्या 3.5 सेमी वाले एक शंकु के आकार का है, जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की सम्पूर्ण ऊँचाई 15.5 सेमी है। इस खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) = $\sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{(3{\cdot}5)^2 + (12)^2} = \sqrt{12{\cdot}25 + 144} = \sqrt{156{\cdot}25}$

$\therefore$ $l = 12.5$ सेमी

बर्तन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

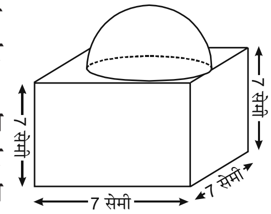
= शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्द्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \pi r(l + 2r) = \frac{22}{7} \times 3.5 \times (12.5 + 2 \times 3.5)$

$= 22 \times 0.5 \times (12.5 + 7) = 11 \times 19.5 = 214.5$ सेमी^{2}

अतः बर्तन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 214.5 वर्ग सेमी **उत्तर**

प्रश्न 4. भुजा 7 सेमी वाले एक घनाकार ब्लॉक के ऊपर एक अर्द्धगोला रखा हुआ है। अर्द्धगोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है? इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है,

$\because$ अर्द्धगोले का आधार घन के ऊपरी फलक पर टिका है।

$\therefore$ अर्द्धगोले का अधिकतम व्यास = घन की भुजा

= 7 सेमी (दिया है)

$\therefore$ अर्द्धगोले की त्रिज्या (r) = $\frac{7}{2}$ सेमी

ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

= घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्द्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल – वृत्तीय आधार का क्षेत्रफल

$= 6 \times (\text{भुजा})^2 + 2\pi r^2 - \pi r^2$

$= 6 \times (\text{भुजा})^2 + \pi r^2$

$= 6 \times (7)^2 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

$= 294 + 38.5 = 332.5$ वर्ग सेमी।

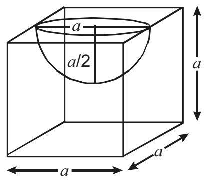
प्रश्न 5. एक घनाकार ब्लॉक के एक फलक को अन्दर की ओर से काटकर एक अर्द्धगोलाकार गड्ढा इस प्रकार बनाया गया है कि अर्द्धगोले का व्यास घन के एक किनारे के बराबर है। शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि घन की भुजा = a

$\therefore$ अर्द्धगोले का व्यास

= घन की भुजा

$\Rightarrow \quad 2r = a \Rightarrow r = \dfrac{a}{2}$



शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

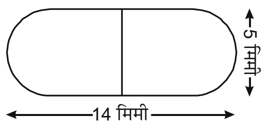
= घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल – घन के तल का क्षेत्रफल + अर्द्धगोले का आन्तरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 6a^2 - \pi r^2 + 2\pi r^2 = 6a^2 + \pi r^2$

$= 6a^2 + \pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = 6a^2 + \pi\dfrac{a^2}{4}$

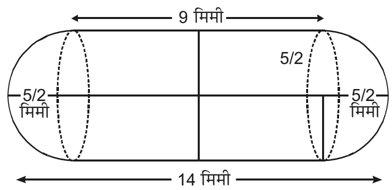
$= a^2\left[6+\dfrac{\pi}{4}\right] = \dfrac{a^2}{4}(24+\pi)$ सेमी^{2}

प्रश्न 6. दवा का एक कैप्सूल (capsule) एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक-एक अर्द्धगोला लगा हुआ है (देखिए आकृति)। पूरे कैप्सूल की लम्बाई 14 मिमी है और उसका व्यास 5 मिमी है।
इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है, कैप्सूल का व्यास = 5 मिमी

$\therefore$ बेलनाकार भाग तथा अर्ध गोले की उभयनिष्ठ त्रिज्या $(r) = \dfrac{5}{2}$ मिमी



कैप्सूल की आन्तरिक लम्बाई (h) = 14 मिमी

बेलनाकार भाग की लम्बाई = $\left[14-\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{2}\right]$ मिमी

= (14 – 5) मिमी = 9 मिमी

कैप्सूल का पृष्ठीय क्षेत्रफल

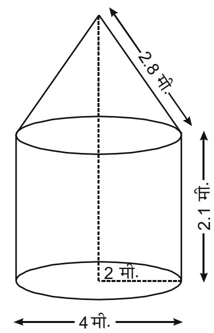
= बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल + 2 अर्द्धगोलों का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2 \times (2\pi r^2)$

$= 2\pi rh + 4\pi r^2 = 2\pi r\,(h + 2r)$

$= 2\times\dfrac{22}{7}\times\dfrac{5}{2}\times\left(9+2\times\dfrac{5}{2}\right) = 220$ मिमी^{2}

प्रश्न 7. कोई तम्बू एक बेलन के आकार का है जिस पर एक शंकु अध्यारोपित है। यदि बेलनाकार भाग की ऊँचाई और व्यास क्रमश: 2.1 मीटर और 4 मीटर हैं तथा शंकु की तिर्यक ऊँचाई 2.8 मीटर है तो इस तम्बू को बनाने में प्रयुक्त कैनवास (canvas) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही, ₹ 500 प्रति वर्ग मीटर की दर से इसमें प्रयुक्त कैनवास की लागत ज्ञात कीजिए। (ध्यान दीजिए कि तम्बू के आधार को कैनवास से नहीं ढका जाता है।)



हल : तम्बू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलनाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंक्वाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + \pi rl = \pi r\,(2h + l)$

$= \dfrac{22}{7} \times 2 \times (2 \times 2.1 + 2.8)$

$= \dfrac{44}{7} \times (4.2 + 2.8) = \dfrac{44}{7} \times 7 = 44$ मीटर^2

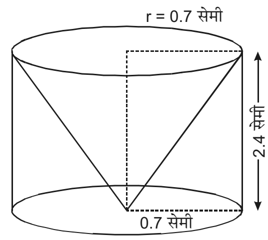
$\therefore$ तम्बू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 44 मीटर^2

$\because$ 1 मीटर^2 कैनवास की लागत = ₹ 500

$\therefore$ 44 मीटर^2 कैनवास की लागत = 44 × 500 = ₹ 22000

अत: कैनवास की कुल लागत = ₹ 22000 **उत्तर**

प्रश्न 8. ऊँचाई 2.4 सेमी और व्यास 1.4 सेमी वाले एक ठोस बेलन में से इसी ऊँचाई और इसी व्यास वाला एक शंक्वाकार खोल (cavity) काट लिया जाता है। शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेण्टीमीटर तक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है, बेलन का व्यास = 1.4 सेमी

$\therefore$ बेलन तथा शंकु की उभयनिष्ठ त्रिज्या (r)

$= \dfrac{1.4}{2} = 0.7$ सेमी

बेलन की ऊँचाई (h) = 2.4 सेमी

शंक्वाकार खोल की तिर्यक ऊँचाई (l)

$= \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(0\cdot7)^2 + (2\cdot4)^2}$

$= \sqrt{0\cdot49 + 5\cdot76} = \sqrt{6\cdot25} = 2.5$ सेमी

शेष बचे ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
+ बेलन के आधार का क्षेत्रफल
+ शंक्वाकार का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

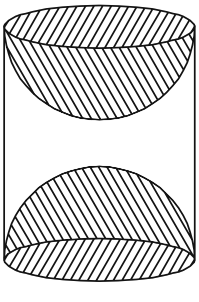
$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi rl = \pi r\,(2h + r + l)$

$= \dfrac{22}{7} \times 0.7 \times [2 \times 2.4 + 0.7 + 2.5]$

$= 2.2 \times [4.8 + 0.7 + 2.5]$

$= 2.2 \times 8 = 17.6 \approx 18$ वर्ग सेमी

प्रश्न 9. लकड़ी के एक ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्द्धगोला खोदकर निकालते हुए, एक वस्तु बनाई गई है, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 सेमी है और आधार की त्रिज्या 3.5 सेमी है, तो इस वस्तु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



संकेत : वस्तु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल
+ दोनों अर्द्धगोलों का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2 \times 2\pi r^2 = 2\pi rh + 4\pi r^2 = 2\pi r\,(h + 2r)$

$= 2 \times \dfrac{22}{7} \times 3.5 \times (10 + 2 \times 3.5)$

$= 2 \times 22 \times 0.5 \times (10 + 7) = 22 \times 17 = 374$ वर्ग सेमी

प्रश्नावली 12.2

प्रश्न 1. एक ठोस एक अर्द्धगोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है जिनकी त्रिज्याएँ 1 सेमी हैं तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस ठोस का आयतन π के पदों में ज्ञात कीजिए।

हल : अर्द्धगोले का आयतन

$= \dfrac{2}{3}\pi r^3 = \dfrac{2}{3} \times \pi \times (1)^3 = \dfrac{2}{3}\pi$ घन सेमी

शंक्वाकार भाग का आयतन

$= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \times (1)^2 \times (1) = \dfrac{1}{3}\pi$ घन सेमी

$\therefore$ ठोस का आयतन

= अर्द्धगोले का आयतन + शंक्वाकार भाग का आयतन

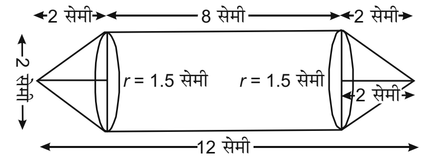
$= \left(\dfrac{2}{3}\pi + \dfrac{1}{3}\pi\right)$ घन सेमी $= \pi = 3.14$ घन सेमी

प्रश्न 2. एक इंजीनियरिंग के विद्यार्थी रचेल से एक पतली ऐलुमिनियम की शीट का प्रयोग करते हुए एक मॉडल बनाने को कहा गया जो एक ऐसे बेलन के आकार का हो जिसके दोनों सिरों पर दो शंकु जुड़े हुए हों। इस मॉडल का व्यास 3 सेमी है और इसकी लम्बाई 12 सेमी है। यदि प्रत्येक शंकु की ऊँचाई 2 सेमी हो, तो रचेल द्वारा बनाए गए मॉडल में अन्तर्विष्ट हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। (यह मान लीजिए कि मॉडल की आन्तरिक और बाहरी विमाएँ लगभग बराबर हैं।)

हल : दिया है,

शंकु की त्रिज्या (r) = बेलन की त्रिज्या (r)

$= \dfrac{3}{2}$ सेमी $= 1.5$ सेमी



$\because$ प्रत्येक शंकु की ऊँचाई $(h) = 2$ सेमी

$\therefore$ बेलन की ऊँचाई $(H) = (12 - 2 - 2)$ सेमी $= 8$ सेमी

बेलन में हवा का आयतन = बेलन का आयतन
+ 2 × शंकु का आयतन

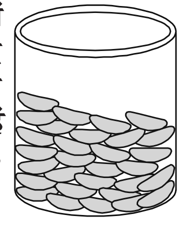
$= \pi r^2 H + 2 \times \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \pi r^2 \left[H + \dfrac{2}{3}h\right] = \dfrac{22}{7} \times 1{\cdot}5 \times 1{\cdot}5 \left[8 + \dfrac{2}{3} \times 2\right]$

सरल करने पर,

$= 22 \times 3 = 66$ घन सेमी।

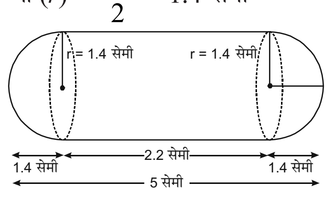
प्रश्न 3. एक गुलाबजामुन में उसके आयतन की लगभग 30% चीनी की चाशनी होती है। 45 गुलाबजामुनों में लगभग कितनी चाशनी होगी, यदि प्रत्येक गुलाब जामुन एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरे अर्द्ध–गोलाकार हैं तथा इसकी लम्बाई 5 सेमी और व्यास 2.8 सेमी है (देखिए आकृति)।



हल : दिया है,

बेलनाकार गुलाब जामुन का व्यास = 2.8 सेमी

गुलाब जामुन के बेलनाकार भाग तथा अर्द्धगोलाकार भाग की उभयनिष्ठ त्रिज्या $(r) = \dfrac{2{\cdot}8}{2} = 1.4$ सेमी



बेलनाकार भाग की ऊँचाई (h)

$= (5 - 1.4 - 1.4)$ सेमी $= 2.2$ सेमी

एक गुलाबजामुन का आयतन

= बेलनाकार भाग का आयतन

+ 2 × अर्द्धगोलाकार भाग का आयतन

$$= \pi r^2 h + 2 \times \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi r^2 \left[h + \frac{4}{3}r\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times 1{\cdot}4 \times 1{\cdot}4 \left[2{\cdot}2 + \frac{4}{3} \times 1{\cdot}4\right]$$

सरल करने पर,

$$= \frac{22 \times 28}{100} \times 4{\cdot}066 = 25.05 \text{ घन सेमी}$$

$\therefore$ एक गुलाब जामुन का आयतन = 25.05 घन सेमी

$\therefore$ 45 गुलाब जामुन का आयतन = 45 × 25.05 घन सेमी

= 1127.28 घन सेमी

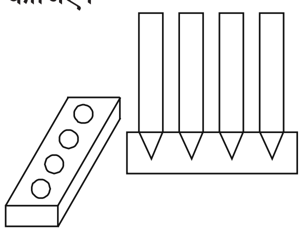
चीनी की चाशनी का आयतन

= 45 गुलाब जामुन के आयतन का 30%

$$= 1127.28 \times \frac{30}{100} = 338.184 \text{ घन सेमी}$$

अत: चीनी की चाशनी की मात्रा = 338 घन सेमी (लगभग)।

प्रश्न 4. निम्न चित्र में एक कलमदान घनाभ के आकार की एक लकड़ी से बना है जिसमें कलम रखने के लिए चार शंक्वाकार गड्ढे बने हुए हैं। घनाभ की विमाएँ 15 सेमी × 10 सेमी × 3.5 सेमी हैं। प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5 सेमी है और गहराई 1.4 सेमी है। पूरे कलमदान में लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए।



हल : घनाभ का आयतन $= l \times b \times h$

$= 15 \times 10 \times 3.5 = 525$ घन सेमी

प्रत्येक शंक्वाकार गड्ढे का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h'$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 0{\cdot}5 \times 0{\cdot}5 \times 1{\cdot}4 = \frac{1.1}{3} \text{ घन सेमी}$$

चार शंक्वाकार गड्ढों का आयतन

$$= 4 \times \frac{1.1}{3} = 1.467 \text{ घन सेमी}$$

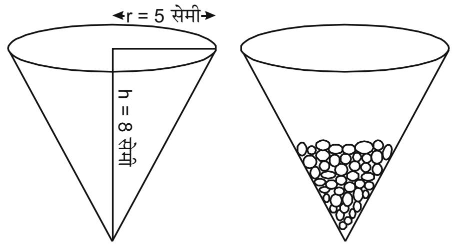
$\therefore$ कलमदान में लगी लकड़ी का आयतन

= घनाभ का आयतन – 4 शंक्वाकार गड्ढों का आयतन

$= (525 - 1.467)$ घन सेमी $= 523.533$ घन सेमी

प्रश्न 5. एक बर्तन एक उल्टे शंकु के आकार का है। इसकी ऊँचाई 8 सेमी है और इसके ऊपरी सिरे (जो खुला हुआ है) की त्रिज्या 5 सेमी है। यह ऊपर तक पानी से भरा हुआ है। जब इस बर्तन में सीसे की कुछ गोलियाँ जिनमें प्रत्येक 0.5 सेमी त्रिज्या वाला एक गोला है, डाली जाती हैं तो इसमें से भरे हुए पानी का एक-चौथाई भाग बाहर निकल जाता है। बर्तन में डाली गई सीसे की गोलियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल :



$\therefore$ शंक्वाकार बर्तन या उसमें भरे पानी का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times (5)^2 \times 8 = \frac{200\pi}{3} \text{ घन सेमी}$$

$\because$ सीसे की गोलियाँ डालने से $\frac{1}{4}$ भाग पानी बाहर निकलता है।

$\therefore$ बाहर निकले पानी का आयतन

$$= \frac{1}{4} \times \frac{200\pi}{3} = \frac{50\pi}{3} \text{ घन सेमी}$$

सीसे की 1 गोली का आयतन

$$= \frac{4}{3}\pi (r')^3 = \frac{4}{3}\pi (0{\cdot}5)^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \times 0{\cdot}125 = \frac{0.5}{3}\pi = \frac{\pi}{6} \text{ घन सेमी}$$

$\therefore$ गोलियों की संख्या

$$= \frac{\text{गोलियों द्वारा विस्थापित पानी का आयतन}}{\text{1 गोली का आयतन}}$$

$$= \frac{\frac{50\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{50\pi}{3} \times \frac{6}{\pi} = 100$$

अत: बर्तन में डाली गई गोलियों की संख्या = 100 **उत्तर**

प्रश्न 6. ऊँचाई 220 सेमी और आधार व्यास 24 सेमी वाले एक बेलन, जिस पर ऊँचाई 60 सेमी और त्रिज्या 8 सेमी वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लोहे का एक स्तम्भ बना है। इस स्तम्भ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है 1 घन सेमी लोहे का द्रव्यमान लगभग 8 ग्राम होता है।

हल : इस बेलन का आयतन $= \pi R^2 H = \pi \times (12)^2 \times 220$

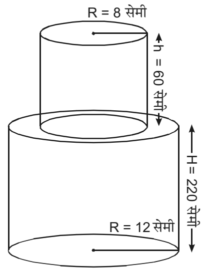
$= \pi \times 144 \times 220 = 31680\pi$ घन सेमी

अब, दूसरे बेलन की त्रिज्या $(r) = 8$ सेमी

तथा ऊँचाई $(h) = 60$ सेमी

दूसरे बेलन का आयतन $= \pi r^2 h = \pi \times (8)^2 \times 60$

$= \pi \times 64 \times 60 = 3840\pi$ घन सेमी



$\therefore$ पूरे स्तम्भ का आयतन

= एक बेलन का आयतन + दूसरे बेलन का आयतन

$= 31680\pi + 3840\pi$

$= 35520\pi$ घन सेमी

$= 35520 \times 3.14$ घन सेमी

$= 111532.8$ घन सेमी

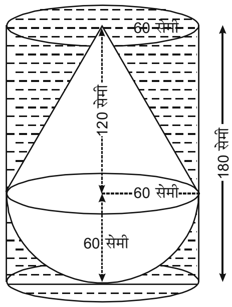
बेलनाकार स्तम्भ का द्रव्यमान

= आयतन × 1 घन सेमी लोहे का भार

$= 111532.8 \times 8$ ग्राम $= 892262.4$ ग्राम

$= 892.2624$ किग्रा $= 892.26$ किग्रा

अत: स्तम्भ का द्रव्यमान $= 892.26$ किग्रा **उत्तर**



प्रश्न 7. एक ठोस में, ऊँचाई 120 सेमी और त्रिज्या 60 सेमी वाला एक शंकु सम्मिलित है, जो 60 सेमी त्रिज्या वाले एक अर्द्धगोले पर आरोपित है। इस ठोस को पानी से भरे हुए एक लम्बवृत्तीय बेलन में इस प्रकार सीधा डाल दिया जाता है कि बेलन की तली को स्पर्श करे। यदि बेलन की त्रिज्या 60 सेमी है और ऊँचाई 180 सेमी है तो बेलन में शेष बचे पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : बेलनाकार बर्तन में पानी का आयतन $= \pi r^2 H$

$= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 \times 180 = 2036571.4$ घन सेमी

बेलन में डाले गये ठोस का आयतन

= अर्द्धगोले का आयतन + शंकु का आयतन

$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \,[2r + h]$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 60 \times 60\,[2 \times 60 + 120]$

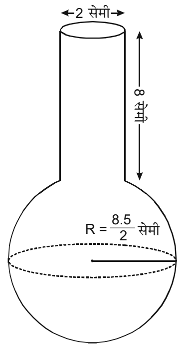
$= 905142.86$ घन सेमी

$\therefore$ बेलन में शेष बचे पानी का आयतन

= बेलन का आयतन – बर्तन में डाले गए ठोस का आयतन

$= 2036571.4 - 905142.86 = 1131428.5$ घन सेमी

$= \frac{1131428.5}{100 \times 100 \times 100}$ घन मीटर $= 1.131$ घन मीटर



प्रश्न 8. एक गोलाकार काँच के बर्तन की एक बेलन के आकार की गर्दन है जिसकी लम्बाई 8 सेमी है और व्यास 2 सेमी है जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5 सेमी है। इसमें भरे जा सकने वाले पानी की मात्रा माप कर, एक बच्चे ने यह ज्ञात किया कि इस बर्तन का आयतन 345 सेमी³ है। जाँच कीजिए कि उस बच्चे का उत्तर सही है या नहीं, यह मानते है हुए कि उपर्युक्त मापन आन्तरिक मापन है और $\pi = 3.14$.

हल : दिया है,

बर्तन में पानी का आयतन

= गोलाकार भाग का आयतन + बेलनाकार भाग का आयतन

$= \frac{4}{3}\pi R^3 + \pi r^2 h$

$= \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{8.5}{2}\right)^3 + \pi \times (1)^2 \times 8$

सरल करने पर

अत: बच्चे का उत्तर 345 घन सेमी गलत है।

बर्तन का आयतन $= 346.51$ घन सेमी। **उत्तर**

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. 7 सेमी त्रिज्या के गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : क्षेत्रफल $= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 616$ वर्ग सेमी।

प्रश्न 2. एक खुले डिब्बे की विमायें 25 सेमी × 20 सेमी तथा 65 मिमी हैं। इस डिब्बे को बनाने में कितना गत्ता लगेगा?

हल : गत्ते का क्षेत्रफल (खुला डिब्बा) $= 2(lh + bh) + lb$

क्षेत्रफल $= 2(25 \times 6.5 + 20 \times 6.5) + (25 \times 20)$

$= 1085$ वर्ग सेमी।

प्रश्न 3. एक घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 1014 वर्ग मीटर है। घन की भुजा ज्ञात कीजिए।

हल : घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 1014$ वर्ग मीटर

$6 \times (\text{भुजा})^2 = 1014 \Rightarrow$ भुजा $= 13$ मीटर।

प्रश्न 4. एक लम्ब वृत्तीय शंकु के आधार की त्रिज्या 5 सेमी तथा ऊँचाई 12 सेमी हैं। शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : सम्पूर्ण पृष्ठ$= \pi \times r \times (l + r) = \frac{22}{7} \times 5 \times (13 + 5)$

$= \frac{1980}{7} = 282.85$ वर्ग सेमी

प्रश्न 5. एक माचिस की डिब्बी की माप 4 सेमी × 2.5 सेमी × 1.5 सेमी है। इस तरह की 12 डिब्बियों के एक पैकिट का आयतन क्या होगा?

हल : एक डिब्बी का आयतन $= 4 \times 2.5 \times 1.5 = 15$ घन सेमी
12 डिब्बियों का आयतन $= 12 \times 15 = 180$ घन सेमी।

प्रश्न 6. यदि घनाभ की लम्बाई 12 मीटर, चौड़ाई 9 मीटर तथा ऊँचाई 8 मीटर है, तो घनाभ के विकर्ण की

हल :विकर्ण= वर्गमूल (लंबाई^2 + चौड़ाई^2 + ऊँचाई^2)

विकर्ण = वर्गमूल (144 + 81 + 64)

= वर्गमूल (289) = 17 मीटर।

प्रश्न 7. एक बन्द लकड़ी के बक्से की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 90 सेमी, 50 सेमी तथा 30 सेमी है। बक्से का बाहरी सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : क्षेत्रफल $= 2(90 \times 50 + 50 \times 30 + 90 \times 30)$

$= 2(4500 + 1500 + 2700)$

$= 2 \times 8700 = 17400$ वर्ग सेमी या 1.74 वर्ग मी.

प्रश्न 8. एक रोलर की लम्बाई 2 मीटर और व्यास 1.4 मीटर है, ज्ञात कीजिए 5 चक्कर लगाने में रोलर कितना क्षेत्र समतल करेगा?

संकेत : एक रोलर बेलन के आकार का होता है। जब वह जमीन पर चलता है, तो वह अपने बाहरी वक्र हिस्से से जमीन को समतल करता है। यहाँ रोलर की लंबाई (ऊँचाई) 2 मीटर है और व्यास 1.4 मीटर है। व्यास को आधा कर पर त्रिज्या 0.7 मीटर प्राप्त होती है।

पाँच चक्कर में समतल होने वाला क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल × 5

$= 2 \times \pi \times$ त्रिज्या $\times$ ऊँचाई $\times 5$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 0.7 \times 2 \times 5 = 44$ वर्ग मीटर

प्रश्न 9. यदि एक शंकु का वक्रपृष्ठ 2035 वर्ग सेमी तथा आधार का व्यास 35 सेमी हो तो शंकु की तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

संकेत: वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$ (l तिर्यक ऊँचाई)

$\Rightarrow \quad 2035 = \frac{22}{7} \times 17.5 \times l$

प्रश्न 10. एक शंकु का आयतन 16632 घन सेमी है और ऊँचाई 9 सेमी है। इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : आयतन $= \left(\frac{1}{3}\right) \times \pi \times$ (त्रिज्या)^2 × ऊँचाई

$16632 = \left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{22}{7} \times$ (त्रिज्या)$^2 \times 9$

सरल करने पर,

$\Rightarrow$ त्रिज्या $= \sqrt{\frac{16632 \times 7}{66}} = \sqrt{1764} = 42$ सेमी

प्रश्न 11. लम्ब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई 8 सेमी तथा आधार की त्रिज्या 6 सेमी है। उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : आयतन $= \left(\frac{1}{3}\right) \times \pi \times$ (त्रिज्या का वर्ग) × ऊँचाई

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 8 = \frac{22 \times 2 \times 6 \times 8}{7} = 301.71$ घन सेमी।

प्रश्न 12. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 1884.4 मीटर^2 है तथा इसकी तिर्यक ऊँचाई 49.96 मीटर है। इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल πrl

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi \times r \times 49.96 = 1884.4$

$r = \frac{1884.4}{(3.14 \times 49.96)} = 12$ मीटर

प्रश्न 13. किसी शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई में अनुपात 5 : 12 और आयतन 2512 घन सेमी है तो शंकु की तिर्यक ऊँचाई तथा आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : आयतन

$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$2512 = \frac{1}{3} \times 3.14 \times (5x)^2 \times 12x$

सरल करने पर,

$x = 2$

$\therefore \quad r = 5x = 10$ सेमी तथा $h = 12x = 24$ सेमी

त्रिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{(r^2 + h^2)}$

$= \sqrt{(10^2 + 24^2)} = \sqrt{(676)} = 26$ सेमी

प्रश्न 14. एक गेंद के पृष्ठ का क्षेत्रफल 1386 वर्ग सेमी है। गेंद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

संकेत : गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4 \times \pi \times$ (त्रिज्या^{2})

प्रश्न 15. 6 सेमी, 8 सेमी तथा 10 सेमी व्यास की धातु की तीन गोलियों को पिघलाकर एक गोली तैयार की गई है, नयी गोली की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

संकेत: नई गोली का आयतन = तीनों गोलियों के आयतन का योग।

प्रश्न 16. दो गोलों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात 4 : 9 है। इसके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

संकेत : आयतनों का अनुपात $= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

प्रश्न 17. एक अर्धगोले की त्रिज्या 3.5 सेमी है तो इसका आयतन तथा सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए?

संकेत: आयतन $= \left(\frac{2}{3}\right) \times \pi \times r^3$

सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3 \times \pi \times r^3$

प्रश्न 18. सीसे के एक गोले की त्रिज्या 5 सेमी है। इससे 5 मिमी. त्रिज्या की कितनी गोलियाँ बनाई जा सकती है?

संकेत: गोलियों की संख्या $= \frac{\text{बड़े गोले का आयतन}}{\text{छोटी गोली का आयतन}}$

प्रश्न 19. दो घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन 27 सेमी^{3} है, दो संलग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

संकेत : प्रश्नावली-12.1 के प्रश्न-1 के अनुसार हल करें।

प्रश्न 20. 4.2 सेमी. त्रिज्या वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर 7 सेमी. त्रिज्या वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

संकेत : गोले का आयतन = बेलन का आयतन

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. एक शंकुनुमा टेण्ट की ऊँचाई 14 मी है तथा आधार का क्षेत्रफल 346.5 मी^{2} है। यह टैन्ट 1.5 मीटर चौड़े कैनवास से बना है तो कैनवास की लम्बाई ज्ञात करो।

संकेत : आधार क्षेत्रफल $= \pi r^2 = 346.5$

तिरछी ऊँचाई $(l) = \sqrt{(r^2 + h^2)}$

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$

प्रश्न 2. 8 सेमी व्यास वाले एक ठोस धातु के गोले को पिघलाकर एक समान मोटाई के बेलनाकार तार के रूप में खींचा गया है। यदि तार की लम्बाई 12 मी हो, तो तार की मोटाई ज्ञात कीजिए।

संकेत: गोले का आयतन$= \frac{4}{3}\pi r_1^3$

तार का आयतन $= \pi r_2^2 h$

$\pi r_2^2 h = \frac{4}{3}\pi r_1^3$

हल करने पर, $r_2 = \frac{16}{60} = 0.27$ सेमी।

प्रश्न 3. 1 सेमी त्रिज्या और 2 सेमी लम्बे ताँबे की एक छड़ को एक समान चौड़ाई वाले 18 मीटर लम्बे एक तार के रूप में बदला जाता है। तार की मोटाई ज्ञात कीजिए।

संकेत : छड़ का आयतन= तार का आयतन

$\pi \times 12 \times 2 = \pi R^2 \times 1800$

प्रश्न 4. एक प्लॉट 30 मीटर लम्बा और 20 मीटर चौड़ा है। प्लॉट के बाहर 15 मीटर लम्बा, 10 मीटर चौड़ा और 5 मीटर गहरा गड्ढा खोदकर उससे निकाली गई मिट्टी को इस प्लॉट में बिछाया गया है। प्लॉट में बिछाई गई मिट्टी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : गड्ढे का आयतन $= 15 \times 10 \times 5 = 750$ मी^{3}

प्लॉट का क्षेत्रफल $= 30 \times 30 = 600$ मी^{2}

ऊँचाई $= \frac{\text{आयतन}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{750}{600} = 1.25$ मी।

प्रश्न 5. पानी से भरी हुई अर्द्धगोलाकार टंकी को एक पाइप द्वारा 5 लीटर प्रति सेकण्ड की दर से खाली किया जाता है। यदि टंकी का व्यास 3.5 मीटर है तो टंकी कितने समय में आधी खाली हो जायेगी?

हल : अर्धगोले का आयतन $= \left(\frac{2}{3}\right)\pi r^3$

$= \left(\frac{2}{7}\right) \times \left(\frac{22}{7}\right) \times (1.75)^3 = 11.22$ मी^{3}

आधा आयतन = 5.61 मी^{3} = 5610 लीटर

समय = 5610 ÷ 5 = 1122 सेकंड

समय = 1122 सेकंड या 18 मिनट 42 सेकंड

प्रश्न 6. 3.5 सेमी व्यास तथा 3 सेमी ऊँचे 504 शंकुओं को पिघलाकर एक धात्विक गोला बनाया गया। गोले का व्यास ज्ञात कीजिए। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

संकेत : दिया है, शंकु की त्रिज्या $= \frac{3.5}{2}$ सेमी

ऊँचाई = 3 सेमी

$504 \times \left(\frac{1}{3}\right)\pi r^2 h = \left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3$

सरल करने पर, $r = 10.5$

पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 10.5 \times 10.5 = 1386$ सेमी^{2}।

प्रश्न 7. एक लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन 1232 सेमी^{3} है तथा उसकी ऊँचाई 24 सेमी है तो शंकु की तिरछी ऊँचाई ज्ञात करो।

हल : $\left(\frac{1}{3}\right)\pi r^2 h = 1232$

$r^2 = 49 \Rightarrow r = 7$ सेमी

तिरछी ऊँचाई $= \sqrt{(r^2 + h^2)}$

$= \sqrt{(49 + 576)} = \sqrt{625} = 25$ सेमी

● ●

13 सांख्यिकी

प्रश्नावली 13.1

प्रश्न 1. विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा पर्यावरण संचेतना अभियान के अंतर्गत एक सर्वेक्षण किया गया, जिसमें उन्होंने एक मोहल्ले के 20 घरों में लगे हुए पौधों से सम्बन्धित निम्नलिखित आँकड़े एकत्रित किए। प्रति घर माध्य पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

पौधों की संख्या	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10	10 – 12	12 – 14
घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

माध्य ज्ञात करने के लिए आपने किस विधि का प्रयोग किया और क्यों ?

हल : उपर्युक्त सारणी में पौधों की संख्या और घरों की संख्या के मान अत्यधिक कम होने के कारण प्रत्यक्ष विधि का प्रयोग करेंगे :

पौधों की संख्या	घरों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$f_i x_i$
0 – 2	1	1	1
2 – 4	2	3	6
4 – 6	1	5	5
6 – 8	5	7	35
8 – 10	6	9	54
10 – 12	2	11	22
12 – 14	3	13	39
योग	$\sum f_i = 20$		$\sum f_i x_i = 162$

$$\therefore \quad \text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{162}{20} = 8{\cdot}1$$

अत: प्रति घर में पौधों की माध्य संख्या = 8.1 पौधे। **उत्तर**

प्रश्न 2. किसी फैक्टरी के 50 श्रमिकों की दैनिक मजदूरी के निम्नलिखित बंटन पर विचार कीजिए :

दैनिक मजदूरी (रुपयों में)	500 – 520	520 – 540	540 – 560	560 – 580	580 – 600
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

एक उपयुक्त विधि का प्रयोग करते हुए, इस फैक्टरी के श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी ज्ञात कीजिए।

हल :

दैनिक मजदूरी (रुपयों में) वर्ग	श्रमिकों की संख्या बारम्बारता (f_i)	मध्य बिन्दु (x_i)	$f_i \times x_i$
500 – 520	12	510	6120
520 – 540	14	530	7420
540 – 560	8	550	4400
560 – 580	6	570	3420
580 – 600	10	590	5900
योग	$\sum f_i = 50$		$\sum f_i x_i = 27260$

$$\therefore \text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{27260}{50} = ₹\ 545.20$$

अत: श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी = ₹ 545.20 **उत्तर**

प्रश्न 3. निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेब खर्च को दर्शाता है। माध्य जेब खर्च ₹ 18 है। लुप्त बारम्बारता f ज्ञात कीजिए :

दैनिक जेब भत्ता (रुपयों में)	11 – 13	13 – 15	15 – 17	17 – 19	19 – 21	21 – 23	23 – 25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

हल : माना कि कल्पितमाध्य (A) = 18

दैनिक जेब भत्ता (रुपयों में)	बच्चों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न x_i	$d_i = x_i - A = x_i - 18$	$f_i d_i$
11 – 13	7	12	–6	–42 ⎤
13 – 15	6	14	–4	–24 ⎥ – 84
15 – 17	9	16	–2	–18 ⎦
17 – 19	13	$18 = A$	0	0
19 – 21	f	20	2	$2f$ ⎤
21 – 23	5	22	4	20 ⎥ $2f + 44$
23 – 25	4	24	6	24 ⎦
योग	$\sum f_i = 44 + f$			$\sum f_i d_i = 2f - 40$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 18 + \frac{2f - 40}{44 + f}$$

प्रश्नानुसार माध्य $(\bar{x}) = 18$

$\therefore \quad 18 = 18 + \dfrac{2f - 40}{44 + f}$ या $\dfrac{2f - 40}{44 + f} = 18 - 18 = 0$ या $2f - 40 = 0$ या $2f = 40$ $\therefore$ $f = \dfrac{40}{2} = 20$

अत: लुप्त बारम्बारता $f = 20$ है। **उत्तर**

प्रश्न 4. किसी अस्पताल में, एक डॉक्टर द्वारा 30 महिलाओं की जाँच की गई और उनके हृदय स्पंदन (beat) की प्रति मिनट संख्या नोट करके नीचे दर्शाए अनुसार संक्षिप्त रूप में लिखी गई। एक उपयुक्त विधि चुनते हुए, इन महिलाओं के हृदय स्पंदन की प्रति मिनट माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

हृदय स्पंदन की प्रति मिनट संख्या	65 – 68	68 – 71	71 – 74	74 – 77	77 – 80	80 – 83	83 – 86
महिलाओं की संख्या	2	4	3	8	7	4	2

हल : माना स्पन्दन का कल्पित माध्य $A = 75.5$।

हृदय स्पंदन की प्रति मिनट संख्या	महिलाओं की संख्या f_i	मध्य-बिन्दु x_i	$d_i = x_i - A = x - 75{\cdot}5$	$f_i d_i$
65 – 68	2	66.5	– 9	– 18 ⎤
68 – 71	4	69.5	– 6	– 24 ⎥ – 51
71 – 74	3	72.5	– 3	– 09 ⎦
74 – 77	8	$75.5 = A$	0	00
77 – 80	7	78.5	+3	+21 ⎤
80 – 83	4	81.5	+6	+24 ⎥ + 63
83 – 86	2	84.5	+9	+18 ⎦
योग	$\sum f_i = 30$			$\sum f_i d_i = +12$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 75{\cdot}5 + \frac{12}{30} = 75.5 + 0.4 = 75.9$$

अत: महिलाओं के हृदय स्पंदन की प्रति मिनट माध्य संख्या = 75.9 **उत्तर**

प्रश्न 5. किसी फुटकर बाजार में, फल विक्रेता पेटियों में रखे आम बेच रहे थे। इन पेटियों में आमों की संख्याएँ भिन्न-भिन्न थी। पेटियों की संख्या के अनुसार, आमों का बंटन निम्नलिखित था :

आमों की संख्या	50 – 52	53 – 55	56 – 58	59 – 61	62 – 64
पेटियों की संख्या	15	110	135	115	25

एक पेटी में रखे आमों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए। आपने माध्य ज्ञात करने की किस विधि का प्रयोग किया है?

हल : माना कल्पित माध्य $(A) = 57$, वर्ग माप $(h) = 3$

पद-विचलन विधि द्वारा :

आमों की संख्या	पेटियों की संख्या (f_i)	मध्य-बिन्दु (x_i)	$u_i = \frac{x_i - A}{h} = \frac{x_i - 57}{3}$	$f_i u_i$
50 – 52	15	51	– 2	– 30 ⎤ –140
53 – 55	110	54	– 1	– 110 ⎦
56 – 58	135	57 = A	0	0
59 – 61	115	60	1	115 ⎤ 165
62 – 64	25	63	2	50 ⎦
योग	$\Sigma f_i = 400$			$\Sigma f_i u_i = 25$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = A + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h \Rightarrow \bar{x} = 57 + \frac{25}{400} \times 3 = 57 + (0.0625) \times 3 = 57.1875 = 57.19 \text{ (लगभग)}$$

अत: पेटी में रखे आमों की माध्य संख्या = 57.19 है। हमने पद विचलन विधि का प्रयोग किया है। **उत्तर**

प्रश्न 6. निम्नलिखित सारणी किसी मोहल्ले के 25 परिवारों में भोजन पर हुए दैनिक व्यय को दर्शाती है :

दैनिक व्यय (रुपयों में)	100 – 150	150 – 200	200 – 250	250 – 300	300 – 350
परिवारों की संख्या	4	5	12	2	2

एक उपयुक्त विधि द्वारा भोजन पर हुआ माध्य व्यय ज्ञात कीजिए। (CBSE 2020 Basic)

हल : माना कल्पित माध्य $(A) = 225$, वर्ग माप $(h) = 50$

पद-विचलन विधि से :

दैनिक व्यय (रुपयों में)	परिवारों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$u_i = \frac{x_i - A}{h}$ या $u_i = \frac{x_i - 225}{50}$	$f_i u_i$
100 – 150	4	125	– 2	– 8 ⎤ –13
150 – 200	5	175	– 1	– 5 ⎦
200 – 250	12	225 = A	0	0
250 – 300	2	275	1	2 ⎤ 6
300 – 350	2	325	2	4 ⎦
योग	$\Sigma f_i = 25$			$\Sigma f_i u_i = -7$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = A + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h = 225 + \frac{(-7)}{25} \times 50 = 225 + (-14) = 211$$

अत: प्रति परिवार भोजन पर होने वाला दैनिक व्यय का माध्य = ₹ 211 **उत्तर**

प्रश्न 7. वायु में सल्फर डाइ-आक्साइड (SO_2) की सान्द्रता (भाग प्रति मिलियन में) को ज्ञात करने के लिए, एक नगर के 30 मोहल्लों से आँकड़े एकत्रित किए गए, जिन्हें नीचे प्रस्तुत किया गया है :

SO_2 की सान्द्रता	0.00 – 0.04	0.04 – 0.08	0.08 – 0.12	0.12 – 0.16	0.16 – 0.20	0.20 – 0.24
बारम्बारता	4	9	9	2	4	2

वायु में SO_2 की सान्द्रता का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल :

SO_2 की सान्द्रता वर्ग	बारम्बारता f_i	मध्य-बिन्दु x_i	$f_i x_i$
0·00 – 0·04	4	0.02	0.08
0·04 – 0·08	9	0.06	0.54
0·08 – 0·12	9	0.10	0.90
0·12 – 0·16	2	0.14	0.28
0·16 – 0·20	4	0.18	0.72
0·20 – 0·24	2	0.22	0.44
योग	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 2.96$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{2\cdot96}{30} = 0.0986 \text{ या } 0.099 \text{ (लगभग)}$$

प्रश्न 8. किसी कक्षा अध्यापिका ने पूरे सत्र के लिए अपनी कक्षा के 40 विद्यार्थियों की अनुपस्थिति निम्नलिखित रूप में रिकॉर्ड (record) की। एक विद्यार्थी जितने दिन अनुपस्थित रहा उनका माध्य ज्ञात कीजिए :

दिनों की संख्या	0 – 6	6 – 10	10 – 14	14 – 20	20 – 28	28 – 38	38 – 40
विद्यार्थियों की संख्या	11	10	7	4	4	3	1

हल :

दिनों की संख्या, वर्ग	विद्यार्थियों की संख्या, f_i	मध्य-बिन्दु, x_i	$f_i x_i$
0 – 6	11	3	33
6 – 10	10	8	80
10 – 14	7	12	84
14 – 20	4	17	68
20 – 28	4	24	96
28 – 38	3	33	99
38 – 40	1	39	39
योग	$\Sigma f_i = 40$		$\Sigma f_i x_i = 499$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{499}{40} = 12.48 \text{ दिन}$$

प्रश्न 9. निम्नलिखित सारणी 35 नगरों की साक्षरता दर (प्रतिशत में) दर्शाती है। माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए :

साक्षरता दर (% में)	45 – 55	55 – 65	65 – 75	75 – 85	85 – 95
नगरों की संख्या	3	10	11	8	3

हल : माना कल्पित माध्य $(A) = 70$ तथा वर्ग माप $(h) = 10$

पद-विचलन विधि से :

साक्षरता दर (% में)	नगरों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$u_i = \frac{x_i - A}{h} = \frac{x_i - 70}{10}$	$f_i u_i$
45 – 55	3	50	– 2	– 6] – 16
55 – 65	10	60	– 1	– 10]
65 – 75	11	70 = A	0	0
75 – 85	8	80	1	8] 14
85 – 95	3	90	2	6]
योग	$\Sigma f_i = 35$			$\Sigma f_i u_i = -2$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = A + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h = 70 + \frac{-2}{35} \times 10 = 70 + \frac{-20}{35} = 70 + (-0.57) = 70 - 0.57 = 69.43\%$$

प्रश्नावली 13.2

प्रश्न 1. निम्नलिखित सारणी किसी अस्पताल में एक विशेष वर्ष में भर्ती हुए रोगियों की आयु को दर्शाती है :

आयु (वर्षों में)	5 – 15	15 – 25	25 – 35	35 – 45	45 – 55	55 – 65
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

उपर्युक्त आँकड़ों से बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए। दोनों केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापों की तुलना कीजिए और उनकी व्याख्या कीजिए।

हल : ● बहुलक के लिए : यहाँ अधिकतम बारम्बारता 23 है। इसका संगत वर्ग-अन्तराल 35—45 है।

$\therefore$ बहुलक वर्ग = 35—45 होगा

$\therefore$ $l = 35, f_1 = 23, f_0 = 21, f_2 = 14$ और $h = 10$

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h = 35 + \left(\frac{23 - 21}{2 \times 23 - 21 - 14}\right) \times 10 = 35 + \frac{2}{46 - 35} \times 10 = 35 + 1.8 = 36.8 \text{ वर्ष}$$

● माध्य के लिए— माना कल्पित माध्य $(A) = 40$ है।

आयु (वर्षों में) वर्ग	रोगियों की संख्या, बारम्बारता f_i	मध्य-बिन्दु x_i	विचलन, $d_i = x_i - 40$	$f_i d_i$
5 _ 15	6	10	– 30	– 180]
15 – 25	11	20	– 20	– 220] – 610
25 – 35	21	30	– 10	– 210]
35 – 45	23	40 = A	0	0
45 – 55	14	50	+10	+140] 240
55 – 65	5	60	+20	+100]
योग	$\Sigma f_i = 80$			$\Sigma f_i d_i = -370$

$\therefore$ माध्य $(\bar{x}) = A + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 40 + \dfrac{(-370)}{80} = 40 + (-4.625) = 35.375$

अत: आँकड़ों का बहुलक = 36.8 वर्ष तथा माध्य = 35.375 वर्ष

प्रश्न 2. निम्नलिखित आँकड़े, 225 बिजली उपकरणों के प्रेक्षित जीवन काल (घण्टों में) की सूचना देते हैं :

जीवन काल (घंटों में)	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100	100 – 120
बारम्बारता	10	35	52	61	38	29

उपकरणों का बहुलक जीवन काल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ अधिकतम बारम्बारता 61 है। इसका संगत वर्ग अन्तराल 60—80 है।

$\therefore$ बहुलक वर्ग = 60 – 80

$l = 60, f_1 = 61, f_0 = 52, f_2 = 38$ और $h = 20$

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h = 60 + \left(\frac{61 - 52}{2 \times 61 - 52 - 38}\right) \times 20$$

$$= 60 + \frac{9}{122 - 52 - 38} \times 20 = 60 + \frac{9}{32} \times 20 = 60 + \frac{180}{32} = 60 + 5.625 = 65.625 \text{ घण्टे}$$

प्रश्न 3. निम्नलिखित आँकड़े किसी गाँव के 200 परिवारों के कुल मासिक घरेलू व्यय के बंटन को दर्शाते हैं। इन परिवारों का बहुलक मासिक व्यय ज्ञात कीजिए। साथ ही, माध्य मासिक व्यय भी ज्ञात कीजिए।

व्यय (रुपयों में)	1000 – 1500	1500 – 2000	2000 – 2500	2500 – 3000	3000 – 3500	3500 – 4000	4000 – 4500	4500 – 5000
परिवारों की संख्या	24	40	33	28	30	22	16	7

हल : ● बहुलक के लिए :

यहाँ, अधिकतम बारम्बारता 40 है। इस बारम्बारता का संगत वर्ग-अन्तराल 1500 – 2000 है।

$\therefore$ बहुलक वर्ग = 1500 – 2000

$\therefore$ $l = 1500, f_1 = 40, f_0 = 24, f_2 = 33$ और $h = 500$

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h = 1500 + \left(\frac{40 - 24}{2 \times 40 - 24 - 33}\right) \times 500$$

$$= 1500 + \left(\frac{16}{80 - 24 - 33}\right) \times 500 = 1500 + \frac{16 \times 500}{23}$$

$$= 1500 + \frac{8000}{23} = 1500 + 347.83 = ₹\ 1847.83.$$

● माध्य के लिए :

माना कल्पित माध्य $(A) = 2750$; वर्ग अन्तराल $(h) = 500$

व्यय (रुपयों में)	परिवारों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$u_i = \frac{x_i - A}{h}$ या $u_i = \frac{x_i - 2750}{500}$	$f_i u_i$
1000 – 1500	24	1250	– 3	– 72
1500 – 2000	40	1750	– 2	– 80 (– 185)
2000 – 2500	33	2250	– 1	– 33
2500 – 3000	28	2750 = A	0	0
3000 – 3500	30	3250	1	30
3500 – 4000	22	3750	2	44 (150)
4000 – 4500	16	4250	3	48
4500 – 5000	7	4750	4	28
योग	$\Sigma f_i = 200$			$\Sigma f_i u_i = -35$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = A + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h = 2750 + \frac{(-35)}{200} \times 500 = 2750 + (-0.175) \times 500 = 2750 - 87.50 = 2662.50$$

अत: परिवारों का बहुलक मासिक व्यय = ₹ 1847.83 तथा माध्य मासिक व्यय = ₹ 2662.50 **उत्तर**

प्रश्न 4. निम्नलिखित बंटन भारत के उच्चतर माध्यमिक स्कूलों में, राज्यों के अनुसार, शिक्षक-विद्यार्थी अनुपात को दर्शाता है। इन आँकड़ों के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए। दोनों मापकों की व्याख्या कीजिए।

प्रति शिक्षक विद्यार्थियों की संख्या	15 – 20	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50	50 – 55
राज्य / संघीय क्षेत्रों की संख्या	3	8	9	10	3	0	0	2

हल : ● बहुलक के लिए :

यहाँ, अधिकतम बारम्बारता 10 है। इस बारम्बारता का संगत वर्ग-अन्तराल 30—35 है।

∴ बहुलक वर्ग = 30—35

∴ $l = 30, f_1 = 10, f_0 = 9, f_2 = 3$ और $h = 5$

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h = 30 + \left(\frac{10-9}{2\times10-9-3}\right) \times 5 = 30 + \frac{1}{20-12} \times 5 = 30 + 0.625 = 30.625$$

● माध्य के लिए :

माना कल्पित माध्य (A) = 27.5 है।

प्रति शिक्षक विद्यार्थियों की संख्या (वर्ग)	राज्य / संघीय क्षेत्रों की संख्या बारम्बारता (f_i)	मध्य बिन्दु x_i	विचलन $d_i = x_i - 27{\cdot}5$	$f_i d_i$
15 – 20	3	17.5	– 10	– 30
20 – 25	8	22.5	– 5	– 40 (– 70)
25 – 30	9	27.5 = A	0	00
30 – 35	10	32.5	+ 5	+50
35 – 40	3	37.5	+10	+30
40 – 45	0	42.5	+15	00 (130)
45 – 50	0	47.5	+20	00
50 – 55	2	52.5	+25	50
योग	$\Sigma f_i = 35$			$\Sigma f_i d_i = 60$

$\therefore$ माध्य $(\bar{x}) = A + \dfrac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 27.5 + \dfrac{60}{35} = 27.5 + 1.7 = 29.2$

अत: बहुलक 30.6 तथा माध्य = 29.2, अधिकांश राज्यों/U.T. में छात्र और अध्यापक का अनुपात 30.6 और औसतन अनुपात 29.2 है। **उत्तर**

प्रश्न 5. दिया हुआ बंटन विश्व के कुछ श्रेष्ठतम बल्लेबाजों द्वारा एक दिवसीय अन्तर्राष्ट्रीय क्रिकेट मैचों में बनाए गए रनों को दर्शाता है :

बनाए गए रन	3000 – 4000	4000 – 5000	5000 – 6000	6000 – 7000	7000 – 8000	8000 – 9000	9000 – 10000	10000 – 11000
बल्लेबाजों की संख्या	4	18	9	7	6	3	1	1

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : बहुलक के लिए, दिए गए आँकड़ों में अधिकतम बारम्बारता 18 है। इसका संगत वर्ग-अन्तराल 4000 — 5000 हैं।

$\therefore$ बहुलक वर्ग = 4000 — 5000

$\therefore$ $l = 4000; f_1 = 18; f_0 = 4; f_2 = 9$ और $h = 1000$

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h = 4000 + \left(\frac{18-4}{2\times18-4-9}\right)\times1000$$

$$= 4000 + \frac{14}{36-13}\times1000 = 4000 + \frac{14000}{23} = 4000 + 608.6956 = 4608.7 \text{ (लगभग)}$$

अत: दिए गए आँकड़ों का बहुलक = 4608.7 रन **उत्तर**

प्रश्न 6. एक विद्यार्थी ने एक सड़क के किसी स्थान से होकर जाती हुई कारों की संख्याएँ नोट कीं और उन्हें नीचे दी हुई सारणी के रूप में व्यक्त किया। सारणी में दिया प्रत्येक प्रेक्षण 3 मिनट के अन्तराल में उस स्थान से होकर जाने वाली कारों की संख्याओं से सम्बन्धित है। ऐसे 100 अन्तरालों पर प्रेक्षण लिए गए। इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

कारों की संख्या	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
बारम्बारता	7	14	13	12	20	11	15	8

हल : दिए गए आँकड़ों में अधिकतम बारम्बारता 20 है। इस बारम्बारता का संगत वर्ग-अन्तराल 40—50 है।

$\therefore$ बहुलक वर्ग = 40—50

$\therefore$ $l = 40; f_1 = 20; f_0 = 12; f_2 = 11$ और $h = 10$

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h = 40 + \left(\frac{20-12}{2\times20-12-11}\right)\times10 = 40 + \frac{8}{40-23}\times10$$

$$= 40 + \frac{80}{17} = 40 + 4.70588 = 40 + 4.7 \text{ (लगभग)} = 44.7 \text{ (लगभग)}$$

प्रश्नावली 13.3

प्रश्न 1. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली की मासिक खपत दर्शाता है। इन आँकड़ों से माध्यक, माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए। इनकी तुलना भी कीजिए।

मासिक खपत (इकाइयों में)	65 – 85	85 – 105	105 – 125	125 – 145	145 – 165	165 – 185	185 – 205
उपभोक्ताओं की संख्या	4	5	13	20	14	8	4

हल : ● माध्यक के लिए : **संचयी बारम्बारता सारणी**

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या (f_i)	संचयी बारम्बारता ($c.f.$)
65 – 85	4	4
85 – 105	5	9
105 – 125	13	22
125 – 145	20	42
145 – 165	14	56
165 – 185	8	64
185 – 205	4	68
योग	$\Sigma f_i = N = 68$	

यहाँ $N = 68$ $\therefore$ $\frac{N}{2} = \frac{68}{2} = 34$ से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 42 के संगत वर्ग-अन्तराल 125 — 145 है।

$\therefore$ माध्यक वर्ग = 125 — 145

अत: $l = 125; N = 68; f = 20, C = 22$ और $h = 20$

$$\text{माध्यक } (M) = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f}\right) \times h = 125 + \left(\frac{\frac{68}{2} - 22}{20}\right) \times 20 = 125 + \frac{34 - 22}{20} \times 20 = 125 + 12 = 137$$

● माध्य के लिए :

माना कल्पित माध्य (A) = 135, वर्ग-अन्तराल (h) = 20

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्ताओं की संख्या f_i	वर्ग चिह्न x_i	$u_i = \frac{x_i - A}{h} = \frac{x_i - 135}{20}$	$f_i u_i$
65 – 85	4	75	– 3	– 12
85 – 105	5	95	– 2	– 10 (– 35)
105 – 125	13	115	– 1	– 13
125 – 145	20	135 = A	0	0
145 – 165	14	155	1	14
165 – 185	8	175	2	16 (42)
185 – 205	4	195	3	12
योग	$\Sigma f_i = 68$			$\Sigma f_i u_i = 7$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = A + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h = 135 + \frac{7}{68} \times 20 = 135 + 0.1029 \times 20 = 135 + 2.05 = 137.05$$

● बहुलक के लिए :

दिए गए आँकड़ों में अधिकतम बारम्बारता 20 है। इसके संगत वर्ग-अन्तराल 125-145 है।

$\therefore$ बहुलक वर्ग = 125 — 145

$\therefore$ $l = 125; f_1 = 20; f_0 = 13; f_2 = 14$ और $h = 20$

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 125 + \left(\frac{20 - 13}{2 \times 20 - 13 - 14}\right) \times 20 = 125 + \frac{7}{40 - 27} \times 20 = 125 + \frac{7 \times 20}{13}$$

$$= 125 + \frac{140}{13} = 125 + 10.76923 = 125 + 10.77 \text{ (लगभग)} = 135.77 \text{ (लगभग)}$$

अत: दिए गए आँकड़ों का माध्यक = 137, माध्य = 137.05 तथा बहुलक = 135.77 (लगभग) मात्रक है। **उत्तर**

प्रश्न 2. यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28·5 हो, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए :

वर्ग - अन्तराल	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	योग
बारम्बारता	5	x	20	15	y	5	60

हल : **संचयी बारम्बारता सारणी**

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता, f_i	संचयी बारम्बारता, $c.f.$
0 – 10	5	5
10 – 20	x	$(5+x)$
20 – 30	20	$(25+x)$
30 – 40	15	$(40+x)$
40 – 50	y	$(40+x+y)$
50 – 60	5	$(45+x+y)$
योग	$\sum f_i = N = 60$	

परन्तु बारम्बारताओं का योग $\Sigma f_i = N = 60$ है। अन्तिम संचयी बारम्बारता वर्ग बारम्बारताओं के योग के बराबर होता है।

$\therefore$ $45 + x + y = 60 \Rightarrow x + y = 60 - 45 \Rightarrow x + y = 15$ ...(i)

अब $\frac{N}{2} = \frac{60}{2} = 30$ तथा बंटन का माध्यक = 28.5 है, जो कि वर्ग-अन्तराल 20 — 30 में स्थित है।

$\therefore$ माध्यक वर्ग = 20 — 30

$\therefore$ $l = 20; f = 20; C = 5 + x$ और $h = 10$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f}\right) \times h \Rightarrow 28.5 = 20 + \left[\frac{\frac{60}{2} - (5+x)}{20}\right] \times 10$$

$$\Rightarrow \quad 28.5 = 20 + \left[\frac{30 - 5 - x}{20}\right] \times 10 \Rightarrow 28.5 = 20 + \left[\frac{25 - x}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 28.5 = \frac{40 + 25 - x}{2} \Rightarrow 28.5 \times 2 = 65 - x \Rightarrow 57 = 65 - x \Rightarrow x = 65 - 57 = 8$$

x का मान समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर, $8 + y = 15 \Rightarrow y = 15 - 8 = 7$

अत: $x = 8$ और $y = 7$ **उत्तर**

प्रश्न 3. एक जीवन बीमा एजेण्ट 100 पॉलिसी धारकों की आयु के बंटन के निम्नलिखित आँकड़े ज्ञात करता है। माध्यक आयु परिकलित कीजिए, यदि पॉलिसी केवल उन्हीं व्याक्तियों को दी जाती है, जिनकी आयु 18 वर्ष या उससे अधिक हो, परन्तु 60 वर्ष से कम हो। (मा.शि.बो.राज. 2013)

आयु (वर्षों में)	20 से कम	25 से कम	30 से कम	35 से कम	40 से कम	45 से कम	50 से कम	55 से कम	60 से कम
पॉलिसी धारकों की संख्या	2	6	24	45	78	89	92	98	100

हल :

आयु वर्ग (वर्षों में)	संचयी बारंबारता (*c.f.*)	पॉलिसी धारकों की संख्या (f_i)
20 से कम	2	$2 = 2$
20 – 25	6	$6 - 2 = 4$
25 – 30	24	$24 - 6 = 18$
30 – 35	45	$45 - 24 = 21$
35 – 40	78	$78 - 45 = 33$
40 – 45	89	$89 - 78 = 11$
45 – 50	92	$92 - 89 = 3$
50 – 55	98	$98 - 92 = 6$
55 – 60	100	$100 - 98 = 2$
योग		$\sum f_i = N = 100$

यहाँ $N = 100$

$\therefore$ $\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$ से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 78 के संगत वर्ग-अन्तराल 35 — 40 है।

$\therefore$ माध्यक वर्ग = 35 — 40

$\therefore$ $l = 35,\ \frac{N}{2} = 50,\ C = 45, f = 33$ और $h = 5$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f}\right) \times h = 35 + \left(\frac{50 - 45}{33}\right) \times 5$$

$$= 35 + \frac{5}{33} \times 5 = 35 + \frac{25}{33} = 35 + 0.7575 = 35 + 0.76 \text{ (लगभग)}$$

माध्यक = 35.76 (लगभग)

अत: दिए गए आँकड़ों से माध्यक आयु 35.76 वर्ष है। **उत्तर**

प्रश्न 4. एक पौधे की 40 पत्तियों की लम्बाइयाँ निकटतम मिलीमीटरों में मापी जाती हैं तथा प्राप्त आंकड़ों को अग्रलिखित सारणी के रूप में निरूपित किया जाता है :

लम्बाई (मिमी में)	118 – 126	127 – 135	136 – 144	145 – 153	154 – 162	163 – 171	172 – 180
पत्तियों की संख्या	3	5	9	12	5	4	2

पत्तियों की माध्यक लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए वर्ग लगातार नहीं हैं। इसलिए पहले इसे लगातार (सतत) वर्ग में बदलेंगे।

लम्बाई (मिमी में)	पत्तियों की संख्या (f_i)	संचयी बारम्बारता (*c.f.*)
117·5 – 126·5	3	$3 = 3$
126·5 – 135·5	5	$3 + 5 = 8$
135·5 – 144·5	9	$8 + 9 = 17$
144·5 – 153·5	12	$17 + 12 = 29$
153·5 – 162·5	5	$29 + 5 = 34$
162·5 – 171·5	4	$34 + 4 = 38$
171·5 – 180·5	2	$38 + 2 = 40$
योग	$\sum f_i = N = 40$	

यहाँ $N = 40$

$\therefore \quad \frac{N}{2} = \frac{40}{2} = 20$ से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 29 के संगत वर्ग-अन्तराल 144.5 — 153.5 है।

$\therefore$ माध्यक वर्ग = 144.5 — 153.5

$l = 144.5, f = 12, C = 17$ और $h = 9$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f}\right) \times h = 144.5 + \left(\frac{20-17}{12}\right) \times 9 = 144.5 + \frac{3}{12} \times 9 = 144.5 + \frac{9}{4} = 144.5 + 2.25 = 146.75$$

अत: पत्तियों की माध्यक लम्बाई = 146.75 मिमी है। **उत्तर**

प्रश्न 5. निम्नलिखित सारणी 400 नीऑन लैम्पों के जीवनकालों (Life time) को प्रदर्शित करती है :

जीवनकाल (घण्टों में)	**1500 – 2000**	**2000 – 2500**	**2500 – 3000**	**3000 – 3500**	**3500 – 4000**	**4000 – 4500**	**4500 – 5000**
लैम्पों की संख्या	**14**	**56**	**60**	**86**	**74**	**62**	**48**

एक लैम्प का माध्यक जीवनकाल ज्ञात कीजिए।

हल :

जीवन काल (घण्टों में)	**लैम्पों की संख्या**	**संचयी बारम्बारता (*c.f.*)**
1500 – 2000	14	14 = 14
2000 – 2500	56	(14 + 56) = 70
2500 – 3000	60	(70 + 60) = 130
3000 – 3500	86	(130 + 86) = 216
3500 – 4000	74	(216 + 74) = 290
4000 – 4500	62	(290 + 62) = 352
4500 – 5000	48	(352 + 48) = 400
योग	$\sum f_i = N = 400$	

यहाँ $N = 400$

$\therefore \quad \frac{N}{2} = \frac{400}{2} = 200$ से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 216 के संगत वर्ग-अन्तराल 3000 — 3500 है।

$\therefore$ माध्यक वर्ग = 3000 — 3500 $\quad \therefore \; l = 3000; \frac{N}{2} = 200; f = 86, C = 130$ और $h = 500$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f}\right) \times h = 3000 + \left(\frac{200-130}{86}\right) \times 500 = 3000 + 406.98 \text{ (लगभग)} = 3406.98$$

अत: एक लैम्प का माध्यक जीवनकाल = 3406.98 घण्टे हैं। **उत्तर**

प्रश्न 6. एक स्थानीय टेलीफोन निर्देशिका से 100 कुलनाम (surnames) लिए गए और उनमें प्रयुक्त अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्नलिखित बारम्बारता बंटन प्राप्त हुआ :

अक्षरों की संख्या	**1 – 4**	**4 – 7**	**7 – 10**	**10 – 13**	**13 – 16**	**16 – 19**
कुलनामों की संख्या	**6**	**30**	**40**	**16**	**4**	**4**

कुलनामों में माध्यक अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। कुलनामों में माध्य अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। साथ ही, कुलनामों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल :

अक्षरों की संख्या वर्ग (Classes)	कुलनामों की संख्या (बारम्बारता) f_i	संचयी बारम्बारता ($c.f.$)	मध्य-बिन्दु x_i	$f_i x_i$
1 – 4	6	6	$\frac{5}{2}$	15
4 – 7	30	36	$\frac{11}{2}$	165
7 – 10	40	76	$\frac{17}{2}$	340
10 – 13	16	92	$\frac{23}{2}$	184
13 – 16	4	96	$\frac{29}{2}$	58
16 – 19	4	100	$\frac{35}{2}$	70
योग	$\Sigma f_i = 100$			$\Sigma f_i x_i = 832$

● **माध्यक के लिए :**

यहाँ $N = 100$

$\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$ से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 76 के संगत वर्ग-अन्तराल 7 — 10 है।

∴ माध्यक वर्ग = 7 — 10

∴ $l = 7,\ \frac{N}{2} = 50, f = 40, C = 36$ और $h = 3$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f}\right) \times h = 7 + \left(\frac{50 - 36}{40}\right) \times 3 = 7 + \frac{14 \times 3}{40} = 7 + 1.05 = 8.05$$

अत: माध्यक = 8.05

● **माध्य के लिए :** $\Sigma f_i x_i = 832, \Sigma f_i = 100$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{\bullet\ f_i x_i}{\bullet\ f_i} = \frac{832}{100} = 8.32$$

● **बहुलक के लिए :**

दिए गए आँकड़ों में अधिकतम बारम्बारता 40 है। इसके संगत वर्ग-अन्तराल 7 — 10 है।

∴ बहुलक वर्ग = 7 — 10

∴ $l = 7, f_1 = 40, f_0 = 30, f_2 = 16$ और $h = 3$

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h = 7 + \left(\frac{40 - 30}{2 \times 40 - 30 - 16}\right) \times 3$$

$$= 7 + \frac{10}{80 - 46} \times 3 = 7 + \frac{30}{34} = 7 + 0.88 \text{ (लगभग)} = 7.88$$

अत: कुलनामों में माध्यक अक्षरों की संख्या = 8.05, माध्य अक्षरों की संख्या = 8.32 तथा बहुलक = 7.88, **उत्तर**

प्रश्न 7. नीचे दिया हुआ बंटन एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों के भार दर्शा रहा है। विद्यार्थियों का माध्यक भार ज्ञात कीजिए। **(CBSE 2020 Basic)**

भार (किलोग्राम में)	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60	60 – 65	65 – 70	70 – 75
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	8	6	6	3	2

हल : माध्यक के लिए संचयी बारम्बारता सारणी

भार (किग्रा में), वर्ग	विद्यार्थियों की संख्या (बारम्बारता), f_i	संचयी बारम्बारता ($c.f.$)
40 – 45	2	2
45 – 50	3	5
50 – 55	8	13
55 – 60	6	19
60 – 65	6	25
65 – 70	3	28
70 – 75	2	30
योग	$\Sigma f_i = 30$	

यहाँ $N = 30$

$\frac{N}{2} = \frac{30}{2} = 15$ से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 19 के संगत वर्ग-अन्तराल 55 — 60 है।

∴ माध्यक वर्ग = 55 — 60

∴ $l = 55,\ \frac{N}{2} = 15,\ C = 13,\ f = 6$ और $h = 5$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - C}{f}\right) \times h = 55 + \left(\frac{15 - 13}{6}\right) \times 5 = 55 + \frac{2}{6} \times 5 = 55 + \frac{5}{3} = 55 + 1.67 = 56.67 \text{ किग्रा (लगभग)}$$

अत: विद्यार्थियों का माध्यक भार = 56.67 किग्रा (लगभग) है। **उत्तर**

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. प्रथम दस विषम संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : अभीष्ट योगफल= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{योगफल}}{\text{संख्याओं की संख्या}}$$

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{100}{10} = 10.$$

प्रश्न 2. यदि $x_1, x_2, ... x_n$ का माध्य $\bar{x}$ हो तो $mx_1, mx_2, ... mx_n$ का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $x_1, x_2, ..., x_n$ का माध्य = $\bar{x}$

अर्थात् $\bar{x} = \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)}{n}$ या $x_1 + x_2 + ... + x_n = n\bar{x}$

अब $mx_1, mx_2, ... mx_n$ का माध्य :

$$= \frac{(mx_1 + mx_2 + ... + mx_n)}{n} = \frac{m(x_1 + x_2 + ... + x_n)}{n}$$

$$= m \times n\frac{\bar{x}}{n} = m\bar{x}$$

प्रश्न 3. 8, 13, 2x, 17 तथा 20 का समान्तर माध्य 18 है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\text{समान्तर माध्य} = \frac{\text{योगफल}}{\text{संख्याओं की संख्या}}$

$\Rightarrow \quad 18 = \frac{(8+13+2x+17+20)}{5} \Rightarrow 18 = \frac{(58+2x)}{5}$

$\Rightarrow 90 = 58 + 2x \Rightarrow 2x = 32 \Rightarrow x = 16.$ **उत्तर**

प्रश्न 4. एक विद्यालय में कार्यरत प्रधानाध्यापक समेत 5 कर्मचारियों का वेतन क्रमशः ₹ 8000, ₹ 5000, ₹ 4000, ₹ 2500, ₹ 1500 मासिक हैं। विद्यालय में कार्यरत कर्मचारियों का औसत मासिक वेतन ज्ञात कीजिए।

हल : औसत वेतन $= \frac{\text{कुल वेतन}}{\text{कर्मचारियों की संख्या}}$

$= \frac{(8000+5000+4000+2500+1500)}{5} = \frac{21000}{5}$

= ₹ 4200 प्रतिमाह। **उत्तर**

प्रश्न 5. निम्न चर मानों का माध्यक ज्ञात कीजिए—37, 31, 42, 43, 46, 25, 39, 45, 32

हल : पहले आरोही क्रम में व्यवस्थित करें : 25, 31, 32, 37, 39, 42, 43, 45, 46

कुल संख्याएँ = 9 (विषम)

माध्यक $= \frac{(n+1)}{2}$ वाँ पद $= \frac{(9+1)}{2}$ = 5 वाँ पद = 39.

प्रश्न 6. 20 व 30 के मध्य स्थित पूर्णांकों का माध्यक बताइए।

हल : 20 और 30 के बीच की संख्याएँ : 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29

कुल संख्याएँ = 9 (विषम)

माध्यक $= \frac{(n+1)}{4}$ वाँ पद $= \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2}$ = 5 वाँ पद = 25

प्रश्न 7. यदि $x_1, x_2, ... x_n$ का माध्य $\bar{x}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संख्या में a जोड़ने पर माध्य $(\bar{x}+a)$ होगा।

हल : मान लीजिए $x_1, x_2, ..., x_n$ का माध्य $= \bar{x}$

तो $\bar{x} = \frac{(x_1+x_2+...+x_n)}{n}$ जब प्रत्येक संख्या में a जोड़ें :

नया माध्य $= \frac{[(x_1+a)+(x_2+a)+...+(x_n+a)]}{n}$

$= \frac{[(x_1+x_2+...+x_n+na]}{n}$

$= \frac{(x_1+x_2+...+x_n)n+na}{n} = \bar{x}+a$

प्रश्न 8. $(a-1)$, $(a+5)$, $(a+11)$ तथा $(a+17)$ का समान्तर माध्य 10 है तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल : समान्तर माध्य

$= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{(a-1)+(a+5)+(a+11)+(a-19)}{4}$

$4a + 32 = 40 \Rightarrow 4a = 40 - 32 \Rightarrow 4a = 8, a = 2$ अतः संख्याएँ 1, 7, 13, 19 हैं।

प्रश्न 9. 17, 26, 60, 45, 33 का माध्यक 33 है यदि 17 के स्थान पर 27 ले लिया जाय तो नया माध्यक क्या होगा?

हल : संख्या को आरोही क्रम में लिखने पर, 17, 26, 33, 45, 60.

यहाँ $x = 5$ तब

माध्यिका $= \frac{n+1}{2}$ वाँ पद $= \frac{5+1}{2}$ वाँ पद = 3 वाँ पद = 33

प्रश्न 10. निम्न आँकड़ों की माध्यक ज्ञात कीजिए— 25, 34, 31, 23, 22, 26, 35, 28, 20, 32

हल : अरोही क्रम में 20, 22, 23, 25, 26, 28, 31, 32, 34, 35

कुल संख्याएँ = 10 (सम)

माध्यक $= \frac{(5 \text{ वें पद} + 6 \text{ वें पद})}{2} = \frac{(26+28)}{2} = 27.$

प्रश्न 11. 20 प्रेक्षणों का समान्तर माध्य 20 है। यदि पहले 10 प्रेक्षणों में प्रत्येक में 2 जोड़ दिया जाय तो निम्न नये 20 प्रेक्षणों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : प्रेक्षणों का कुल योगफल = 20 × 20 = 400

पहले 10 प्रेक्षणों में प्रत्येक में 2 जोड़ने पर कुल वृद्धि = 10 × 2 = 20

नया योगफल = 400 + 20 = 420

नया समान्तर माध्य $= \frac{420}{20} = 21.$

प्रश्न 12. आरोही क्रम में व्यवस्थित चर मान (x) निम्नानुसार हैं 8, 11, 12, 16, $(16+x)$, 20, 25, 30 यदि माध्यक 18 हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : कुल संख्याएँ = 8 (सम)

माध्यक $= \frac{(4 \text{ वें पद} + 5 \text{ वें पद})}{2} \Rightarrow 18 = \frac{(16+16+x)}{2}$

$\Rightarrow 18 = \frac{(32+x)}{2} \Rightarrow 36 = 32 + x \Rightarrow x = 4.$

प्रश्न 13. 20 संख्याओं का समान्तर माध्य 12 है तब इन संख्याओं का योगफल क्या होगा?

हल : समान्तर माध्य $= \frac{\text{योगफल}}{\text{संख्याओं की संख्या}}$

$12 = \frac{\text{योगफल}}{20} \Rightarrow$ योगफल $= 12 \times 20 \Rightarrow$ योगफल $= 240.$

प्रश्न 14. आठ क्रमागत विषम संख्याओं का औसत 16 है तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : 8 क्रमागत विषम संख्याओं का औसत = 16

माना पहली विषम संख्या = a

तो संख्याएँ : $a, a+2, a+4, a+6, a+8, a+10, a+12, a+14$ तब योगफल $= 8a + 56$

औसत= $\frac{(8a+56)}{8} = \frac{8(9+7)}{8} = 9 + 7 = 16$

$\Rightarrow a = 16 - 7 \Rightarrow a = 9$

संख्याएँ= 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23

प्रश्न 15. संख्याओं 23, 14, 10, 12, 11, 12, 23, 20, 18, 12, 10, 12 व 23 का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : संख्याओं को आरोही क्रम में लिखने पर 10, 10, 11, 12, 12, 12, 12, 14, 18, 20, 23, 23, 23

इसमें 12 सबसे अधिक बार आया है। अत: बहुलक = 12.

प्रश्न 16. क्रिकेट की एक टीम के खिलाड़ियों द्वारा बनाए गये रनों की संख्या निम्न प्रकार है—

57, 17, 26, 91, 115, 26, 83, 41, 57, 0, 26

इसका समान्तर माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : समान्तर माध्य :

योगफल= 57 + 17 + 26 + 91 + 115 + 26 + 83 + 41 + 57 + 0 + 26 = 539

संख्याओं की संख्या = 11

समान्तर माध्य $= \frac{539}{11} = 49.$

माध्यक : आरोही क्रम में लिखने पर 0, 17, 26, 26, 26, 41, 57, 57, 83, 91, 115 कुल संख्याएँ = 11 (विषम)

माध्यिका $= \frac{N+1}{2} = \frac{11+1}{2} = 6$ वाँ पद = 41

बहुलक : 26 सबसे अधिक बार आया है। अत: बहुलक = 26.

प्रश्न 17. कक्षा 9(A) के छात्रों के प्राप्तांक 18, 10, 15, 12, 18, 17, 15, 16, 19 हैं। माध्यक ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए प्राप्तांक 18, 10, 15, 12, 18, 17, 15, 16, 19. पहले आरोही क्रम में लिखते हैं।

10, 12, 15, 15, 16, 17, 18, 18, 19

कुल प्रेक्षण (n) = 9 (विषम संख्या)

माध्यक= $\frac{n+1}{2}$ वाँ पद$\Rightarrow \frac{9+1}{2} = 5$ वाँ पद$\Rightarrow$ 5 वाँ पद = 16

प्रश्न 18. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए।

पद	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**
बारम्बारता	**2**	**4**	**8**	**5**	**3**	**7**	**2**

हल : कुल बारम्बारता $N = 2 + 4 + 8 + 5 + 3 + 7 + 2 = 31$

$$\frac{N}{2} = \frac{31}{2} = 15.5$$

संचयी	2	4	6	8	10	12	14
बारम्बारता	2	6	14	19	22	29	31

15.5, 14 और 19 के बीच आता है। अत: माध्यक = 8.

प्रश्न 19. निम्न बारम्बारता बंटन का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
f	**2**	**5**	**6**	**4**	**2**	**2**

हल :

x	f	fx
1	2	2
2	5	10
3	6	18
4	4	16
5	2	10
6	2	12

$$\Sigma f = 21 \text{ तथा } \Sigma fx = 68$$

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{68}{21} = 3.24 \text{ (लगभग)।}$$

प्रश्न 20. निम्नलिखित बारम्बारता वितरण का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

चर x	1.5	2.0	2.4	3.0	3.2	3.4
बारम्बारता f	4	5	8	5	2	1

हल :

x	f	fx
1.5	4	6.0
2.0	5	10.0
2.4	8	19.2
3.0	5	15.0
3.2	2	6.4
3.4	1	3.4

$$\Sigma f = 25 \Rightarrow \Sigma fx = 60.0$$

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{60.0}{25} = 2.4.$$

प्रश्न 21. निम्न सारणी से माध्यक ज्ञात कीजिए?

चर	12	8	10	9	5	7	3
बारम्बारता	6	4	3	8	1	8	6

हल : सबसे पहले चर को आरोही क्रम में लिखते हैं।

अब तालिका बनाएँ (क्रम $f \to x \to cf$)

f	x	संचयी बारम्बारता (cf)
6	3	6
1	5	7
8	7	15
4	8	19
8	9	27
3	10	30
6	12	36

कुल बारम्बारता $N = 36$

$$\frac{N}{2} = 18 = 18 \text{ वाँ पद}$$

15 और 19 के बीच आता है, जो $x = 8$ के सामने है।

अत: माध्यक = 8.

प्रश्न 22. एक कारखाने में 50 अधिकारियों का दैनिक वेतन निम्न प्रकार है—

वेतन (रुपये में) x	450	475	500	525	550
अधिकारियों की संख्या f	12	13	7	10	8

इनके वेतन का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल :

f	x	fx
12	450	5400
13	475	6175
7	500	3500
10	525	5250
8	550	4400
योग	50	24725

समान्तर माध्य $= \frac{24725}{50} = 494.50.$

प्रश्न 23. निम्नलिखित आँकड़ों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

चर x_i	5	6	8	9	11	12
बारम्बारता f_i	3	8	12	9	6	2

हल :

f_i	x_i	f_ix_i
3	5	15
8	6	48
12	8	96
9	9	81
6	11	66
2	12	24
योग	40	330

समान्तर माध्य $= \frac{330}{40} = 8.25.$

प्रश्न 24. निम्नलिखित आँकड़ों का समान्तर माध्य 21.5 है तो K का मान ज्ञात कीजिए।

x_i	5	15	25	35	45
f_i	6	4	3	K	2

हल :

f_i	x_i	f_ix_i
6	5	30
4	15	60
3	25	75
K	35	$35K$
2	45	90
योग	$15 + K$	$225 + 35K$

समान्तर माध्य = 21.5

$$21.5 = \frac{255 + 35K}{15 + K}$$

$$21.5(15 + K) = 255 + 35K$$
$$322.5 - 255 = 35K - 21.5K \Rightarrow 67.5 = 13K$$
$$K = 5.$$

प्रश्न 25. एक सौ परिवारों में बच्चों की संख्या निम्न प्रकार है, इनका माध्यक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	15	20	25	30	35	40	45	50
विद्यार्थियों की संख्या	2	8	16	26	20	16	7	5

हल :

प्राप्तांक	बारम्बारता f	संचयी f बारम्बारता
15	2	2
20	8	10
25	16	26
30	26	52
35	20	72
40	16	88
45	7	95
50	4	99

कुल $N = 99$

$$\frac{330}{40} = 49.5$$

49.5 संचयी बारम्बारता 52 में आता है।

माध्यक = 30.

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. किसी फैक्टरी के 50 श्रमिकों की दैनिक मजदूरी के निम्नलिखित बंटन पर विचार कीजिए—

दैनिक मजदूरी (रुपयों में)	100–120	120–140	140–160	160–180	180–200
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

एक उपयुक्त विधि का प्रयोग करते हुए, इस फैक्टरी के श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी ज्ञात कीजिए।

हल : कल्पित माध्य विधि से,

वर्ग (श्रमिकों की संख्या)	f (वर्ग मध्य)	x_i	d_i $(x_i - 150)$	$f_i d_i$
100 – 120	12	110	– 40	– 480
120 – 140	14	130	– 20	– 280
140 – 160	8	150	0	0
160 – 180	6	170	20	120
180 – 20	10	190	40	40
योग	50			– 240

कल्पित माध्य A = 150

$$\text{माध्य} = A + \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}\right) = 150 + \left(\frac{-240}{50}\right) = 150 + (-4.8) = 145.2.$$

फैक्ट्री के श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी = ₹ 145.20.

प्रश्न 2. निम्न आंकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100	100 – 120	120 – 140
बारम्बारता	6	8	10	12	6	5	3

हल : सबसे अधिक बारम्बारता = 12, बहुलक वर्ग = 60 – 80, $l = 60, h = 20, f_1 = 12, f_0 = 10, f_2 = 6,$

$$\text{बहुलक} = l + \left[\frac{(f_1 - f_0)}{(2f_1 - f_0 - f_2)}\right] \times h = 60 + \left[\frac{(12-10)}{(2\times12-10-6)}\right]\times 20$$

$$\text{बहुलक} = 60 + \left[\frac{2}{24-16}\right]\times 20 = 60 + \left(\frac{2}{8}\right)\times 20 = 60 + 5 = 65.$$

प्रश्न 3. किसी परीक्षा में 100 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का प्रतिशत नीचे दिया गया है—

प्राप्तांक	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60	60 – 65
बारम्बारता	14	16	18	23	18	8	3

माध्यक प्रतिशत अंक निर्धारित कीजिए।

हल :

वर्ग	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
30 – 35	14	14
35 – 40	16	30
40 – 45	18	48
45 – 50	23	71
50 – 55	18	89
55 – 60	8	97
60 – 65	3	100

$N = 100 \Rightarrow \frac{N}{2} = 50$ माध्यक वर्ग = 45 – 50, $l = 45, h = 5, f = 23, cf = 48$

$$\text{माध्यक} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - cf\right)}{f}\times h = 45 + \left(\frac{50-48}{23}\right)\times 5 = 45 + \frac{2}{23}\times 5 = 45 - 0.435 = 45.435$$

माध्यक प्रतिशत अंक = 45.44 (लगभग)।

प्रश्न 4. यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 30 हो तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	योग
बारम्बारता	5	x	20	15	y	5	80

हल : प्रश्नावली 13.3 प्रश्न-2 की भाँति हल करें।

प्रश्न 5. निम्नलिखित सारणी में एक हॉस्पीटल में विभिन्न आयु वर्ग के रोगियों की प्रतिदिन की संख्या 80 है। एक उपयुक्त विधि का प्रयोग कर रोगियों की माध्य आयु की गणना कीजिए।

आयु (वर्षों में)	5–14	15–24	25–34	35–44	45–54	55–64
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

हल : कल्पित माध्य विधि से (A = 29.5)

वर्ग	f (रोगियों की संख्या)	x_i (वर्ग मध्य)	$d_i\ (x_i - 29.5)$	$f_i d_i$
5 – 14	6	9.5	– 20	– 120
5 – 24	11	19.5	– 10	– 110
25 – 34	21	29.5	0	0
35 – 44	23	39.5	10	230
45 – 54	14	49.5	20	280
55 – 64	5	59.5	30	150
योग	80		430	

$$\text{माध्य} = A + \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f}\right) = 29.5 + \left(\frac{430}{80}\right) = 29.5 + 5.375 = 34.875$$

रोगियों की माध्य आयु = 34.88 वर्ष (लगभग)।

प्रश्न 6. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं का बिजली खर्च बताता है। यदि बंटन का माध्यक 137 हो तो p का मान ज्ञात कीजिए।

मासिक खर्च	65 – 85	85 – 105	105 – 125	125 – 145	145 – 165	165 – 185	185 – 205
उपभोक्ता	4	5	p	20	14	8	4

हल : $\Sigma f = 68$

$\Rightarrow$ $4 + 5 + p + 20 + 14 + 8 + 4 = 68 \Rightarrow 55 + p = 68 \Rightarrow p = 13$

जाँच के लिए माध्यक :

वर्ग	f	संचयी बारम्बारता
65 – 85	4	4
85 – 105	5	9
105 – 125	13	22
125 – 145	20	42
145 – 165	14	56
165 – 185	8	64
185 – 205	4	68

$N = 68 \quad \frac{N}{2} = 34$

माध्यक वर्ग = 125 – 145, $l = 125, h = 20, cf = 22, f = 20$

$$\text{माध्यक} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - cf\right)}{f} \times h = 125 + \frac{34-22}{20} \times 20 = 125 + \frac{12}{20} \times 20 = 125 + 12 = 137$$

14 प्रायिकता

प्रश्नावली 14.1

प्रश्न 1. निम्नलिखित कथनों को पूरा कीजिए :

(i) घटना E की प्रायिकता + घटना 'E नहीं' की प्रायिकता = ... है।

(ii) उस घटना की प्रायिकता जो घटित नहीं हो सकती ....है। ऐसी घटना....कहलाती है।

(iii) उस घटना की प्रायिकता जिसका घटित होना निश्चित है....है। ऐसी घटना....कहलाती है।

(iv) किसी प्रयोग की सभी प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग...है।

(v) किसी घटना की प्रायिकता....से बड़ी या उसके बराबर होती है तथा....से छोटी या उसके बराबर होती है।

हल : (i) 1, (ii) शून्य, असम्भव घटना, (iii) 1, निश्चित घटना, (iv) एक, (v) शून्य, एक

प्रश्न 2. निम्नलिखित प्रयोगों में से किन-किन प्रयोगों के परिणाम समप्रायिक हैं ? स्पष्ट कीजिए।

(i) एक ड्राइवर कार चलाने का प्रयत्न करता है। कार चलना प्रारम्भ हो जाती है या कार चलना प्रारम्भ नहीं होती है।

(ii) एक खिलाड़ी बास्केटबॉल को बास्केट में डालने का प्रयत्न करती है। वह बास्केट में बॉल डाल पाती है या नहीं डाल पाती है।

(iii) एक सत्य-असत्य प्रश्न का अनुमान लगाया जाता है। उत्तर सही है या गलत होगा।

(iv) एक बच्चे का जन्म होता है। वह एक लड़का है या एक लड़की है।

हल : (i) एक ड्राइवर कार चलाने का प्रयत्न करता है। अधिकांश सम्भावना कार चलना प्रारम्भ होने की है, कार चलना प्रारम्भ न होने की सम्भावना कम ही है। अत: यह प्रयोग **समप्रायिक नहीं** है।

(ii) एक खिलाड़ी बास्केटबॉल को बास्केट में डालने का प्रत्यत्न करती है। एक ही परिस्थिति में उसकी सफलता या असफलता की सम्भावना समान नहीं होती। अत: यह प्रयोग **समप्रायिक नहीं** है।

(iii) एक सत्य-असत्य प्रश्न का अनुमान लगाया जाता है। अनुमान के सही होने की प्रायिकता भी उतनी ही है जितनी कि उसके गलत होने की। अत: यह प्रयोग **समप्रायिक** है।

(iv) एक बच्चे का जन्म होने पर उसके लड़के या लड़की होने की सम्भावनाएँ समान हैं, अत: प्रयोग **समप्रायिक** है।

प्रश्न 3. फुटबॉल के खेल को प्रारम्भ करते समय यह निर्णय लेने के लिए कि कौन-सी टीम पहले बॉल लेगी, इसके लिए सिक्का उछालना एक न्यायसंगत विधि क्यों माना जाता है ?

हल : क्योंकि जब सिक्के को उछाला जाता है तो केवल दो ही सम्भावनाएँ होती हैं अर्थात् सिक्का सममित होने के कारण यह समप्रायिक है एवं उसकी उछाल (Tossing) निष्पक्ष (Unbiased) होती है।

प्रश्न 4. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती ?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $-1{\cdot}5$ (C) 15% (D) $0{\cdot}7$

हल : प्रयोग में किसी घटना के घटित होने या घटित न होने की सम्भावना शून्य भले ही हो परन्तु ऋणात्मक कभी नहीं होती हैं। अत: स्पष्ट है कि विकल्प (B) में दी गई ऋणात्मक (Negative) संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती है।

प्रश्न 5. यदि $P(E) = 0{\cdot}05$ है, तो 'E नहीं' की प्रायिकता क्या है ?

हल : ∵ 'E नहीं' की प्रायिकता $= 1 - P(E)$

$$= 1 - 0{\cdot}05 = 0{\cdot}95$$

प्रश्न 6. एक थैले में केवल नींबू की महक वाली मीठी गोलियाँ हैं। मालिनी बिना थैले में झाँके उसमें से एक गोली निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह निकाली गई गोली

(i) सन्तरे की महक वाली है?

(ii) नींबू की महक वाली है?

हल : ∵ थैले में केवल नींबू की महक वाली गोलियाँ ही हैं। यदि थैले में से यादृच्छया (Randomly) एक गोली निकाल ली जाती है तो—

(i) निकाली गई गोली 'सन्तरे की महक वाली' होने की घटना की सम्भावना शून्य है क्योंकि सभी गोलियाँ नींबू की महक वाली हैं। अत: निकाली गई गोली सन्तरे की महक वाली है, इसकी प्रायिकता शून्य होगी।

(ii) सभी गोलियों में नींबू की महक है।

∵ नींबू की महक वाली गोली निकलने की घटना निश्चित है।

अत: इसकी प्रायिकता 1 होगी।

प्रश्न 7. यह दिया हुआ है कि 3 विद्यार्थियों के एक समूह में से 2 विद्यार्थियों के जन्मदिन एक ही दिन न होने की प्रायिकता $0{\cdot}992$ है। इसकी क्या प्रायिकता है कि इन 2 विद्यार्थियों का जन्मदिन एक ही दिन हो ?

हल : यदि 3 विद्यार्थियों में से 2 विद्यार्थियों के जन्मदिन एक ही दिन होने और एक ही दिन न होने की घटनाएँ परस्पर पूरक घटनाएँ हैं।

2 विद्यार्थियों के जन्मदिन एक ही दिन न होने की प्रायिकता $P(E) = 0{\cdot}992$

अत: दोनों विद्यार्थियों के जन्मदिन एक ही दिन होने की प्रायिकता

$P(E') = 1 - 0{\cdot}992 = 0{\cdot}008$ **उत्तर**

प्रश्न 8. एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदें हैं। इस थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। इसकी प्रायिकता क्या है कि गेंद (i) लाल हो ? (ii) लाल नहीं हो?

हल : थैले में से एक गेद यादृच्छया निकालने पर,

कुल सम्भावित परिणामों की संख्या = 8

(i) गेंद लाल (R) होने की घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

गेंद लाल होने की प्रायिकता

$$P(R) = \frac{\text{घटना } (R) \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}} = \frac{3}{8}$$

अत: गेंद लाल होने की प्रायिकता $= \frac{3}{8}$

(ii) तब गेंद लाल न होने की प्रायिकता

= 1 – गेंद लाल होने की प्रायिकता

$= 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

प्रश्न 9. एक डिब्बे में 5 लाल कंचे, 8 सफेद कंचे और 4 हरे कंचे हैं। इस डिब्बे में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाला गया कंचा (i) लाल है? (ii) सफेद है? (iii) हरा नहीं है?

हल : डिब्बे में कंचों की कुल संख्या = 5 + 8 + 4 = 17

जब डिब्बे में से एक कंचा निकाला जाता है, तो सम्भावित कुल परिणामों की संख्या =17

(i) निकाला गया कंचा लाल (R) होने की घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या = 5

अत: निकाला गया कंचा लाल हो, इसकी प्रायिकता

$$P(R) = \frac{\text{घटना } (R) \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}} = \frac{5}{17}$$

(ii) निकाला गया कंचा सफेद (W) हो, इसके अनुकूल परिणामों की संख्या = 8

अत: निकाला गया कंचा सफेद होने की प्रायिकता

$$P(W) = \frac{\text{घटना } (W) \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{8}{17}$$

(iii) निकाला गया कंचा हरा न G' होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 5 + 8 = 13

अत: निकाला गया कंचा हरा न होने की प्रायिकता

$$P(G') = \frac{\text{घटना } G' \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{13}{17}$$ **उत्तर**

प्रश्न 10 एक पिग्गी बैंक (Piggy Bank) में, 50 पैसे के सौ सिक्के, ₹ 1 के पचास सिक्के, ₹ 2 के बीस सिक्के और ₹ 5 के दस सिक्के हैं। यदि पिग्गी बैंक को हिलाकर उल्टा करने पर कोई एक सिक्का गिरने का परिणाम समप्रायिक है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गिरा हुआ सिक्का (i) 50 पैसे का होगा? (ii) ₹ 5 का नहीं होगा?

हल : सिक्कों की कुल संख्या = 100 + 50 + 20 + 10 = 180

कुल सम्भव परिणामों की संख्या = 180

(i) $\because$ 50 पैसे के 100 सिक्के हैं।

$\therefore$ 50 पैसे के सिक्के प्राप्त करने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}} = \frac{100}{180}$$

$$P(\text{50 पैसे के सिक्के}) = \frac{5}{9}$$

(ii) $\because$ ₹ 5 के सिक्कों की संख्या = 10

$\therefore$ 5 रु. के सिक्के प्राप्त करने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}}$$

$$\Rightarrow \quad P(\text{5 रु. के सिक्के}) = \frac{10}{180} = \frac{1}{18}$$

₹ 5 के सिक्के प्राप्त न करने की प्रायिकता

= 1 – P (₹ 5 के सिक्के)

$$\text{P (₹ 5 के सिक्के न हो)} = 1 - \frac{1}{18} = \frac{18-1}{18} = \frac{17}{18}$$

प्रश्न 11. गोपी अपने जल-जीव कुण्ड (aquarium) के लिए एक दुकान से मछली खरीदती है। दुकानदार एक टंकी जिसमें 5 नर मछली और 8 मादा मछली हैं, में से एक मछली यादृच्छया उसे देने के लिए निक. ालती है (देखिए आकृति)। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाली गई मछली नर मछली है।

हल : नर मछलियों की संख्या = 5

मादा मछलियों की संख्या = 8

जल-जीव कुण्ड में मछलियों की कुल संख्या = 5 + 8 = 13

कुल सम्भव परिणामों की संख्या = 13

नर मछली प्राप्त करने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}}$$

$$P(\text{नर मछली}) = \frac{5}{13}$$

उत्तर

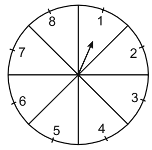
प्रश्न 12. संयोग (chance) के एक खेल में, एक तीर को घुमाया जाता है, जो विश्राम में आने के बाद संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 और 8 में से किसी एक संख्या को इंगित करता है। (आकृति देखिए) यदि ये सभी परिणाम समप्रायिक हों तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह तीर इंगित—

(i) 8 को करेगा?

(ii) एक विषम संख्या को करेगा?

(iii) 2 से बड़ी संख्या को करेगा?

(iv) 9 से छोटी संख्या को करेगा?



हल : संयोग के खेल में जब तीर को घुमाया जाता है तो तीर के विश्राम में आने पर इंगित कुल सम्भव परिणामों की संख्या

= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 = 8

(i) तीर द्वारा संख्या 8 को इंगित करने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

$\therefore$ तीर द्वारा संख्या 8 को इंगित करने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{8}$$

(ii) तीर द्वारा अंकित विषम संख्याएँ = 1, 3, 5, 7

तीर द्वारा एक विषम संख्या अंकित करने के परिणामों की संख्या = 4

$\therefore$ विषम संख्या इंगित होने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(iii) 2 से बड़ी संख्या को इंगित करने की घटना के कुल अनुकूल परिणाम = 3, 4, 5, 6, 7, 8

2 से बड़ी संख्या को इंगित करने की घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

$\therefore$ 2 से बड़ी संख्या को इंगित करने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

अत: 2 से बड़ी संख्या इंगित करने की प्रायिकता = $\frac{3}{4}$

(iv) 9 से छोटी संख्या इंगित करने की घटना के अनुकूल परिणाम 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

9 से छोटी संख्या इंगित करने की घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या = 8

$\therefore$ 9 से छोटी संख्या इंगित करने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्याएँ}} = \frac{8}{8}$$

$= 1$ **उत्तर**

प्रश्न 13. एक पासे को एक बार फेंका जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(i) एक अभाज्य संख्या

(ii) 2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या

(iii) एक विषम संख्या

हल : एक पासे को यादृच्छया फेंके जाने पर प्राप्त होने वाले सभी सम्भव परिणाम = 1, 2, 3, 4, 5, 6

अत: एक पासे को यादृच्छया फेंके जाने पर कुल सम्भव परिणामों की संख्या = 6

(i) यहाँ अभाज्य संख्याएँ = 2, 3, 5

अभाज्य संख्या प्राप्त होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

$\therefore$ अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) 2 और 6 के बीच स्थित संख्याएँ = 3, 4, 5

2 और 6 के बीच स्थित संख्याएँ होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

$\therefore$ 2 और 6 के बीच स्थित संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(iii) विषम संख्याएँ = 1, 3, 5

विषम संख्या प्राप्त करने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

$\therefore$ एक विषम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

उत्तर

प्रश्न 14. 52 पत्तों की अच्छी प्रकार से फेंटी गई एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(i) लाल रंग का बादशाह (CBSE 2020)

(ii) एक फेस कार्ड अर्थात् तस्वीर वाला पत्ता

(iii) लाल रंग का तस्वीर वाला पत्ता

(iv) पान का गुलाम

(v) हुकुम का पत्ता (CBSE 2020)

(vi) एक ईंट की बेगम।

हल : ताश की गड्डी में 52 पत्ते होते हैं। गड्डी को अच्छी तरह फेंटकर गड्डी में से एक पत्ता निकालने पर पत्ता क्या है, इसके कुल सम्भावित परिणामों की संख्या = 52

(i) माना लाल रंग का बादशाह होने की घटना (R) हैं :

$\because$ गड्डी में कुल 4 बादशाह होते हैं जिनमें पान तथा ईंट के बादशाह 2 होते हैं।

$\therefore$ लाल रंग का बादशाह प्राप्त होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

$\therefore$ घटना R की प्रायिकता

$$\Rightarrow \quad P(R) = \frac{\text{घटना } R \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}}$$

$$= \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

(ii) माना एक फेस कार्ड अर्थात् तस्वीर वाला पत्ता होने की घटना (E) है।

$\because$ प्रत्येक समूह में 3 फेस कार्ड्स (बादशाह, बेगम व गुलाम) होते हैं।

$\therefore$ गड्डी में कुल फेस कार्डो की संख्या = $3 \times 4 = 12$

$\therefore$ घटना (E) के अनुकूल परिणामों की संख्या = 12

$\therefore$ घटना (E) की प्रायिकता

$$\Rightarrow \quad P(E) = \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}}$$

$= \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

(iii) माना लाल रंग का तस्वीर वाला पत्ता होने की घटना (*A*) है।

$\because$ कुल फेस कार्ड्स = 12

$\therefore$ लाल रंग के तस्वीर वाले पत्तों की संख्या = 6

तब, घटना (*A*) के अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

$\therefore$ घटना (*A*) की प्रायिकता

$\Rightarrow$ $P(A) = \frac{\text{घटना } A \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}}$

$= \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

(iv) माना पान का गुलाम होने की घटना (*B*) है।

$\because$ गड्डी में पान का एक ही गुलाम होता है।

$\therefore$ घटना *B* के अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

$\therefore$ घटना (*B*) की प्रायिकता

$P(B) = \frac{\text{घटना } B \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{52}$

(v) माना हुकुम का पत्ता होने की घटना (*C*) है :

$\because$ गड्डी में हुकुम के पत्तों की संख्या = 13

$\therefore$ घटना *C* के अनुकूल परिणामों की संख्या = 13

$\therefore$ घटना (*C*) की प्रायिकता = $\frac{13}{52}$

$\Rightarrow$ $P(C) = \frac{1}{4}$

(vi) माना ईंट की बेगम होने की घटना (*D*) है।

$\because$ गड्डी में ईंट की केवल एक ही बेगम होती है।

$\therefore$ घटना *D* के अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

घटना (*D*) की प्रायिकता

$\Rightarrow P(D) = \frac{\text{घटना } (D) \text{ के घटित होने के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}}$

$= \frac{1}{52}$ **उत्तर**

प्रश्न 15. ताश के पाँच पत्तों—ईंट का दहला, गुलाम, बेगम, बादशाह और इक्का, को पलटकर के अच्छी प्रकार फेंटा जाता है। फिर इनमें से यादृच्छया एक पत्ता निकाला जाता है। (i) इसकी क्या प्रायिकता है कि यह पत्ता एक बेगम है ? (ii) यदि बेगम निकल आती है तो उसे अलग रख दिया जाता है और एक अन्य पत्ता निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दूसरा निकाला गया पत्ता (a) एक इक्का है? (b) एक बेगम है?

हल : ताश के पाँच पत्तों में ईंट का दहला, गुलाम, बेगम, बादशाह, इक्का को पलटकर के फेंटा गया है, फिर इसमें से एक पत्ता निकाला जाता है

इसके कुल सम्भव परिणामों की संख्या = 5

(i) यदि निकाला गया पत्ता बेगम हो तो इस घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

अत: निकाला गया पत्ता बेगम होने की प्रायिकता = $\frac{1}{5}$

(ii) यदि बेगम निकल आती है तो उसे अलग रख दिया जाता है और शेष पत्तों में से फिर एक पत्ता निकाला जाता है।

तब, कुल सम्भव परिणामों की संख्या

= 4 (दहला, गुलाम, बादशाह, इक्का)

(a) दूसरा पत्ता इक्का होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

अत: दूसरा पत्ता इक्का होने की प्रायिकता = $\frac{1}{4}$ **उत्तर**

(b) दूसरा पत्ता बेगम होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = शून्य, क्योंकि इन पत्तों में बेगम है ही नहीं।

अत: दूसरा पत्ता बेगम होने की प्रायिकता = $\frac{0}{4} = 0$ **उत्तर**

प्रश्न 16. किसी कारण 12 खराब पेन 132 अच्छे पेनों में मिल गए हैं। केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है। इस मिश्रण में से, एक पेन यादृच्छया निकाला जाता है। निकाले गए पेन की अच्छा होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : खराब पेनों की संख्या = 12

अच्छे पेनों की संख्या = 132

पेनों की कुल संख्या = 12 + 132 = 144

अच्छा पेन निकलने की प्रायकिता

$= \frac{\text{अच्छा पेन निकलने के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}}$

अच्छा पेन प्राप्त होने की प्रायिकता = $\frac{132}{144} = \frac{11}{12}$

अत: अच्छा पेन प्राप्त होने की प्रायिकता = $\frac{11}{12}$ **उत्तर**

प्रश्न 17. (i) 20 बल्बों के एक समूह में 4 बल्ब खराब हैं। इस समूह में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब होगा?

(ii) मान लीजिए (i) में निकाला गया बल्ब खराब नहीं है और न ही इसे दुबारा बल्बों के साथ मिलाया जाता है। अब

शेष बल्बों में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब नहीं होगा?

हल : समूह में बल्बों की कुल संख्या = 20

खराब बल्बों की संख्या = 4

यदि एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है तो

(i) बल्ब खराब होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

कुल सम्भव परिणामों की संख्या = 20

अत: बल्ब खराब होने की प्रायिकता = $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

(ii) यदि निकाला गया बल्ब खराब नहीं है तो इसे पुन: बल्बों के साथ नहीं मिलाया जाता है।
शेष बल्बों में से एक बल्ब निकाला जाता है।

∴ कुल सम्भव परिणामों की संख्या = 19

खराब बल्ब होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

बल्ब खराब निकलने की प्रायिकता = $\frac{4}{19}$

∴ बल्ब खराब न होने की प्रायिकता = $1 - \frac{4}{19} = \frac{15}{19}$ **उत्तर**

प्रश्न 18. एक पेटी में 90 डिस्क (discs) हैं, जिन पर 1 से 90 तक संख्याएँ अंकित हैं। यदि इस पेटी में से एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस डिस्क पर अंकित होगी :

(i) दो अंकों की एक संख्या (ii) एक पूर्ण वर्ग संख्या

(iii) 5 से विभाज्य एक संख्या।

हल : डिस्कों की कुल संख्या = 90

∴ कुल सम्भव परिणाम = (1, 2, 3, 4, 5, ..., 90)

कुल सम्भव परिणामों की संख्या = 90

यदि एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है तो :

(i) दो अंकों की एक संख्या अंकित होने की प्रायिकता :

∵ दो अकों की संख्याएँ = (10, 11, 12, 13, ..., 90) = 81

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 81

अत: डिस्क पर दो अकों की संख्या अंकित होने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भावित परिणामों की संख्या}} = \frac{81}{90} = \frac{9}{10}$$

(ii) पूर्ण वर्ग संख्याएँ = (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81)
कुल अनुकूल परिणामों की संख्या = 9
अत: डिस्क पर पूर्ण वर्ग संख्या अंकित होने की प्रायिकता

$$= \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

(iii) 5 से विभाज्य संख्याएँ = (5, 10, 15, 20, 25, 30, ..., 90)

कुल अनुकूल परिणामों की संख्या = 18

अत: डिस्क पर 5 से विभाज्य संख्या अंकित होने की प्रायिकता

$$= \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$$ **उत्तर**

प्रश्न 19. एक बच्चे के पास ऐसा पासा है जिसके फलकों पर निम्नलिखित अक्षर अंकित हैं :

A	B	C	D	E	A

इस पासे को एक बार फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि (i) A प्राप्त हो? (ii) D प्राप्त हो?

हल : पासे के फलकों की संख्या = 6

∴ कुल सम्भावित परिणामों की संख्या = 6

(i) ∵ दो फलकों पर A अक्षर अंकित है।

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

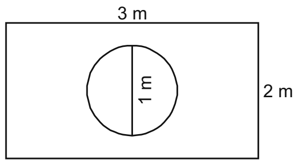
अत: पासे पर A आने की प्रायिकता = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) ∵ केवल एक फलक पर D अक्षर अंकित है।

∴ अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

पासे पर D आने की प्रायिकता = $\frac{1}{6}$ **उत्तर**

प्रश्न 20.* मान लीजिए आप एक पासे को आकृति में दर्शाए आयताकार क्षेत्र में यादृच्छया रूप से गिराते हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह पासा 1 मीटर व्यास वाले वृत्त के अन्दर गिरेगा ?



संकेत : पासे की वृत्त के अन्दर गिरने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}}{\text{आयत का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{6} = \frac{\pi}{24}$$

(* यह परीक्षा की दृष्टि से नहीं है।)

प्रश्न 21. 144 बॉल पेनों के एक समूह में 20 बॉल पेन खराब हैं और शेष अच्छे हैं। आप वही पेन खरीदना चाहेंगे जो अच्छा हो, परन्तु खराब पेन आप खरीदना नहीं चाहेंगे। दुकानदार इन पेनों में से, यादृच्छया एक पेन निकालकर आपको देता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि (i) आप वह पेन खरीदेंगे? (ii) आप वह पेन नहीं खरीदेंगे?

संकेत :

(i) माना पेन खरीदने की प्रायिकता A है।

यदि हम ठीक बॉल पेन खरीदना चाहेंगे तो बॉल पेन ठीक होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 124-20 = 124

कुल सम्भव परिणामों की संख्या = 144

$\therefore \quad P(A) = \frac{124}{144} = \frac{31}{36}$

(ii) माना पेन नहीं खरीदने की प्रायिकता A' हो, तो

$P(A') = 1 - P(A)$

प्रश्न 22. एक सलेटी और एक नीले पासे को एक साथ फेंका जाता है।
(i) निम्न सारणी को पूरा कीजिए :

घटना दोनों पासों की संख्याओं का योग	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
प्रायिकता	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) एक विद्यार्थी यह तर्क देता है कि 'यहाँ कुल 11 परिणाम 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 और 12 हैं। अतः 'प्रत्येक की प्रायिकता $\frac{1}{11}$ है।' क्या आप इस तर्क से सहमत हैं? सकारण उत्तर दीजिए।

संकेत: (i) जब एक सलेटी और एक नीले रंग के दो पासों को एक साथ फेंका जाता है तो दोनों पासों पर अभीष्ट योग प्राप्त होने वाले समस्त परिणाम अग्र होंगे : अभीष्ट योग, परिणाम के साथ इस प्रकार है:

अनुकूल परिणाम- 2- (1, 1), 3-(1, 2); (2, 1), 4-(1, 3); (2, 2); (3, 1), 5-(1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1), 6-(1, 5); (2, 4); (3, 3); (4, 2); (5, 1), 7-(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1), 8-(2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3); (6, 2), 9-(3, 6); (4, 5); (5, 4); (6, 3), 10-(4, 6); (5, 5); (6, 4), 11-(5, 6); (6, 5), 12-(6, 6).

(ii) विद्यार्थी का तर्क गलत है, क्योंकि सभी 11 घटनाएँ प्रारम्भिक घटनाएँ नहीं हैं। प्रत्येक घटना से सम्बधित परिणामों की प्रायिकता भिन्न-भिन्न है। अतः विद्यार्थी का तर्क असंगत है। **उत्तर**

प्रश्न 23. एक खेल में एक रुपए के सिक्के को तीन बार उछाला जाता है और प्रत्येक बार का परिणाम लिख लिया जाता है। तीनों परिणाम समान होने पर, अर्थात् तीन चित या तीन पट प्राप्त होने पर, हनीफ खेल में जीत जाएगा, अन्यथा वह हार जाएगा। हनीफ के खेल में हार जाने की प्रायिकता परिकलित कीजिए।

हल : जब एक रुपये के सिक्के को तीन बार उछाला जाता है। यदि चित H तथा पट को T से व्यक्त करे तो सम्भावित परिणाम निम्न हैं—

HHH	*HHT*	*HTH*	*HTT*
THH	*THT*	*TTH*	*TTT*

कुल सम्भावित परिणामों की संख्या = 8 हैं।

तीनों परिणाम समान होने अर्थात् जीतने की प्रायिकता माना A है।

तीनों परिणाम समान होने के अनुकूल परिणाम [*HHH, TTT*]

तीनों परिणाम समान होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

अतः हनीफ के खेल में जीत जाने की प्रायिकता

$\therefore \quad P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

माना, हार जाने की प्रायिकता A' हो तो

$P(A') = 1 - P(A)$

$\therefore \quad P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

अतः हनीफ के हारने की प्रायिकता = $\frac{3}{4}$ **उत्तर**

प्रश्न 24. एक पासे को दो बार फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि (i) 5 किसी भी बार में नहीं आएगा? (ii) 5 कम-से-कम एक बार आएगा?

हल : जब एक पासे को दो बार फेंका जाता है तो फलकों पर प्राप्त अंक निम्न होंगे—

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	[(1, 5)]	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	[(2, 5)]	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	[(3, 5)]	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	[(4, 5)]	(4, 6)
[(5, 1)]	[(5, 2)]	[(5, 3)]	[(5, 4)]	[(5, 5)]	[(5, 6)]
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	[(6, 5)]	(6, 6)

कुल सम्भव परिणामों की संख्या = 36

परिणामों की संख्या जिनमें 5 आता है = 11

वे परिणाम जिनमें 5 कभी न आता है = 36 – 11 = 25

(i) 5 न आने की घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या = 25

कुल सम्भव परिणामों की संख्या = 36

$$\text{घटना की प्रायिकता} = \frac{\text{घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल सम्भव परिणामों की संख्या}}$$

$= \frac{25}{36}$

(ii) 5 कम-से-कम एक बार आने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 11

कुल सम्भव परिणामों की संख्या = 36

अत: 5 कम-से-कम एक बार आने की प्रायिकता = $\frac{11}{36}$

प्रश्न 25. निम्नलिखित में से कौन-से तर्क सत्य हैं और कौन-से तर्क असत्य हैं? सकारण उत्तर दीजिए।

(i) यदि दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है, तो इसके तीन सम्भावित परिणाम—दो चित, दो पट या प्रत्येक एक बार है। अतः इनमें से प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है।

(ii) यदि एक पासे को फेंका जाता है, तो इसके दो सम्भ. ावित परिणाम—एक विषम संख्या या एक सम संख्या हैं। अतः एक विषम संख्या ज्ञात करने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।

हल : (i) जब दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है तो चित को H तथा पट को T से व्यक्त करने पर चार सम्भव परिणाम होंगे।

HH, HT, TH, TT

दो चित होने की प्रायिकता, $P(HH) = \frac{1}{4}$

दो पट होने की प्रायिकता, $P(TT) = \frac{1}{4}$

एक चित और एक पट होने की प्रायिकता = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ **उत्तर**

(ii) जब पासे को फेंका जाता है तो सम्भव परिणाम $= (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

$\therefore$ कुल सम्भव परिणामों की संख्या = 6

सम संख्या आने के अनुकूल परिणाम = (2, 4, 6)

सम संख्या आने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

विषम संख्या आने के अनुकूल परिणाम = (1, 3, 5)

विषम संख्या आने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

विषम संख्या आने की प्रायिकता = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

अत: छात्र का तर्क सत्य है। **उत्तर**

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. यदि $P(E) = 0.07$ है, तो 'E नहीं' की प्रायिकता क्या है?

हल : $P(E \text{ नहीं}) = 1 - 0.07 = 0.93$.

प्रश्न 2. एक थैले में एक सफेद गेंद, एक काली गेंद तथा एक लाल गेंद एक ही आकार की हैं। सविता बिना थैले के अन्दर झाँके, इसमें से एक गेंद निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता होगी कि वह लाल गेंद होगी?

हल : कुल गेंदों की संख्या

= 3(1 सफेद + 1 काली + 1 लाल)

लाल गेंदों की संख्या = 1

$P(\text{लाल गेंद}) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{3}$

प्रश्न 3. किसी प्रयोग की सभी प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकता का योग लिखिए।

हल : किसी प्रयोग की सभी प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकता का योग = 1.

प्रश्न 4. एक थैले में 3 लाल तथा 5 काली गेंदे हैं। इस थैले से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। इसकी प्रायिकता क्या है कि गेंद काली नहीं है।

हल : काली गेंद (काली नहीं) = 3

$P(\text{काली नहीं}) = P(\text{लाल गेंद}) = \frac{3}{5+3}$

गेंद काली नहीं होने की प्रायिकता = $\frac{3}{8}$.

प्रश्न 5. एक पासे को फेंका जाता है तो तीन से बड़ी संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : पासे पर संभव परिणाम = 1, 2, 3, 4, 5, 6

तीन से बड़ी संख्याएँ = 4, 5, 6

अनुकूल परिणाम = 3

कुल परिणाम = 6

$P(\text{तीन से बड़ी संख्या}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

प्रश्न 6. ताश के 52 पत्तों में से यादृच्छया एक पत्ता निक. ाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पत्ता हुकुम का हो लेकिन इक्का न हो।

हल : कुल पत्ते = 52

हुकुम के पत्ते = 13

हुकुम का इक्का = 1

हुकुम के पत्ते जो इक्का नहीं = 13 – 1 = 12

$P(\text{हुकुम का पत्ता लेकिन इक्का नहीं})$

$= \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

प्रश्न 7. दो भिन्न पासों को एक साथ उछाला गया। दोनों पासों के ऊपरी तलों पर आई संख्याओं की गुणनफल 6

आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : कुल संभव परिणाम = $6 \times 6 = 36$

गुणनफल 6 के लिए संभव जोड़े **:** (1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2)

अनुकूल परिणाम = 4

$$P(\text{गुणनफल } 6) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

प्रश्न 8. एक बक्से में कार्ड है जिन पर 3, 5, 7, 9, ..., 35, 37 संख्याएँ अंकित हैं। बक्से में से यादृच्छया एक कार्ड निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाले गये कार्ड पर अंकित संख्या एक अभाज्य संख्या है।

हल : संख्याएँ **:** 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37

कुल संख्याएँ = 18

अभाज्य संख्याएँ **:** 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37

अभाज्य संख्याओं की संख्या = 11

$$P(\text{अभाज्य संख्या}) = \frac{11}{18}$$

प्रश्न 9. अच्छी तरह से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक बेगम नहीं होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : अच्छी तरह फेंटी गई 52 पत्तों की गड्डी में से एक इक्का होने की प्रायिकता = $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

इक्का न होने की प्रायिकता = $1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$.

प्रश्न 10. अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इस पत्ते के बादशाह होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : एक अच्छी तरह फेंटी गई 52 पत्तों की गड्डी में से एक बादशाह होने की प्रायिकता

$$= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

प्रश्न 11. एक पासे के फेंकने पर सम अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : कुल संभव परिणाम = 1, 2, 3, 4, 5, 6 (6 संख्याएँ)

सम संख्याएँ = 2, 4, 6 (3 संख्याएँ)

$$\text{प्रायिकता} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 12. एक पासे को एक बार उछाला जाता है। 5 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

हल : कुल संभव परिणाम = 6

अभाज्य संख्याएँ = 2, 3, 5 (3 संख्याएँ)

$$\text{प्रायिकता} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

प्रश्न 13. दो खिलाड़ी राम और श्याम शतरंज का एक मैच खेलते हैं। यह ज्ञात है कि राम द्वारा मैच जीतने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है। श्याम के जीतने की क्या प्रायिकता है?

हल : राम के जीतने की प्रायिकता = $\frac{4}{5}$

श्याम के जीतने की प्रायिकता = $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

प्रश्न 14. दो विभिन्न पासों का एक साथ उछाला जाता है तो एक द्विक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : कुल संभव परिणाम = $6 \times 6 = 36$

द्विक (doublet) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) = 6 परिणाम

$$\text{प्रायिकता} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

प्रश्न 15. यदि दो अपक्षपातपूर्ण सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं तो निम्न घटनाओं की प्रायिकता होगी—

(i) दोनों चित प्राप्त हों, (ii) एक पट प्राप्त हो।

हल : (i) दोनों चित प्राप्त हों **:**

कुल परिणाम = {HH, HT, TH, TT} = 4

दोनों चित = {HH} = 1

$$\text{प्रायिकता} = \frac{1}{4}$$

(ii) एक पट प्राप्त हो **:**

एक पट = {HT, TH} = 2

$$\text{प्रायिकता} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

प्रश्न 16. किसी कारण 14 खराब पेन, 136 अच्छे पेनों में मिल गये हैं। केवल देखकर यह नहीं बताया जा सकता है कि कोई पेन खराब है या अच्छा है। यदि पेन यादृच्छया चुना जाता है तो इसके अच्छे होने की क्या प्रायिकता है?

हल : कुल पेन = 14 + 136 = 150

अच्छे पेन = 136

$$\text{प्रायिकता} = \frac{136}{150} = \frac{68}{75}.$$

प्रश्न 17. एक पासे के छः फलकों पर 0, 1, 1, 1, 6, 6 अंकित है। ऐसे दो पासों को एक साथ फेंका जाता है तथा इन पर आई संख्याओं का योग लिख लिया जाता है।

(i) कितने विभिन्न परिणाम संभव हैं?

(ii) योग 7 प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

हल : (i) पहले पासे पर : 0, 1, 1, 1, 6, 6 (यानी मान : 0, 1, 6)
दूसरे पासे पर : 0, 1, 1, 1, 6, 6 (यानी मान : 0, 1, 6)
संभव योग : $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 0 + 6 = 6, 1 + 1 = 2, 1 + 6 = 7, 6 + 6 = 12$
विभिन्न परिणाम = {0, 1, 2, 6, 7, 12} = 6 विभिन्न योग संभव हैं।
(ii) कुल संभव परिणाम $= 6 \times 6 = 36$
योग 7 के लिए :
(1, 6) : पहले पासे पर 1 आने के तरीके = 3
दूसरे पर 6 = 2
कुल $= 3 \times 2 = 6$
(6, 1) : पहले पासे पर 6 आने के तरीके = 2
दूसरे पर 1 = 3
कुल $= 2 \times 3 = 6$
योग 7 के अनुकूल परिणाम $= 6 + 6 = 12$

$$\text{प्रायिकता} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

प्रश्न 18. एक जार में केवल लाल, नीली तथा नारंगी रंग की गेंदे हैं। यादृच्छया एक लाल रंग की गेंद के निकालने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है। इसी प्रकार उसी जार से यादृच्छया एक नीली गेंद निकालने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है। यदि नारंगी रंग की कुल गेंदें 10 हैं तो बताइए कि जार में कितनी गेंदें हैं।
हल : माना जार में कुल गेंदें $= x$

$$P(\text{लाल गेंद}) = \frac{1}{4}, P(\text{नीली गेंद}) = \frac{1}{3}$$

नारंगी गेंदों की संख्या = 10

$$P(\text{लाल}) + P(\text{नीली}) + P(\text{नारंगी}) = 1$$

$$P(\text{नारंगी}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{3}{12} - \frac{4}{12}$$

$$P(\text{नारंगी}) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

अब, $$P(\text{नारंगी}) = \frac{\text{नारंगी गेंदों की संख्या}}{\text{कुल गेंदें}}$$

$\Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{10}{x} \Rightarrow 5x = 120 \Rightarrow x = 24$ जार में कुल 24 गेंदें हैं।

प्रश्न 19. एक थैले में 5 लाल गेंदे तथा कुछ नीली गेंदे हैं। यदि थैले में से यादृच्छया एक नीली गेंद निकालने की प्रायिकता, एक लाल गेंद के निकलने की प्रायिकता की तीन गुना है, तो थैले में नीली गेंदों की संख्या ज्ञात कीजिए।
हल : माना नीली गेदें $= x$
कुल गेंदें $= 5 + x$

$$P(\text{लाल गेंद}) = \frac{5}{5+x} \text{ तथा } P(\text{नीली गेंद}) = \frac{x}{5+x}$$

प्रश्न के अनुसार,

$$P(\text{नीली गेंद}) = 3 \times P(\text{लाल गेंद})$$

$$\frac{x}{5+x} = \frac{3 \times 5}{5+x} \Rightarrow \frac{x}{5+x} = \frac{15}{5+x}$$

$$x = 15$$

थैले में 15 नीली गेंदें हैं।

निबन्धात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. एक सिक्के को तीन बार उछाला जाता है। सम्भव परिणामों की एक सूची बताइए।
निम्नलिखित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए—
(i) सभी चित (ii) न्यूनतम 2 चित
हल : तीन सिक्कों के संभव परिणाम : HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT
कुल परिणाम = 8
(i) सभी चित (HHH) = 1

$$P(\text{सभी चित}) = \frac{1}{8}$$

(ii) न्यूनतम 2 चित : HHH, HHT, HTH, THH = 4

$$P(\text{न्यूनतम 2 चित}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

प्रश्न 2. एक पासे को एक बार फेंका जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
(i) एक अभाज्य संख्या
(ii) 3 और 5 के बीच स्थित कोई संख्या
हल : पासे पर संभव परिणाम = 1, 2, 3, 4, 5, 6
कुल परिणाम = 6
(i) अभाज्य संख्याएँ = 2, 3, 5
अनुकूल परिणाम = 3

$$P(\text{अभाज्य संख्या}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) 3 और 5 के बीच की संख्याएँ = 4
अनुकूल परिणाम = 1

$$P(\text{3 और 5 के बीच}) = \frac{1}{6}.$$

प्रश्न 3. एक पेटी में 30 डिस्क हैं। जिन पर 1 से 30 तक संख्याएँ अंकित हैं। यदि पेटी में से एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस डिस्क पर अंकित होगी—
(i) दो अंकों की संख्या (ii) एक पूर्ण वर्ग संख्या

हल : कुल डिस्क = 30

(i) दो अंकों की संख्याएँ = 10, 11, 12, ..., 30

अनुकूल परिणाम = 21

$$P(\text{दो अंकों की संख्या}) = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

(ii) पूर्ण वर्ग संख्याएँ (1 से 30 तक) = 1, 4, 9, 16, 25

अनुकूल परिणाम = 5

$$P(\text{पूर्ण वर्ग संख्या}) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

प्रश्न 4. 52 पत्तों की ताश की एक गड्डी में से सभी बादशाह, बेगम तथा इक्के निकाल दिए गए। शेष बचे पत्तों को भली प्रकार फेंटने के पश्चात् उनमें से एक पत्ता निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाला पत्ता—

(i) एक काले रंग का तस्वीर वाला पत्ता है।

(ii) एक लाल रंग का पत्ता है।

हल : कुल पत्ते = 52

निकाले गए पत्तें :

बादशाह = 4, बेगम = 4, इक्के = 4

कुल निकाले गए = 12

शेष पत्ते = 52 – 12 = 40.

प्रश्न 5. एक समूह में 36 मोबाइल फोन हैं, जिनमें से 30 अच्छे हैं, 3 में थोड़ी-सी खराबी है तथा 3 में बड़ी खराबी है। राधा एक मोबाइल तभी खरीदेगी जब वह अच्छा हो, परन्तु व्यापारी केवल तभी मोबाइल खरीदेगा, यदि उसमें बड़ी खराबी न हो। इस समूह में से एक फोन यादृच्छिक रूप से चुना जाता है। इसकी प्रायिकता क्या है कि यह फोन—

(i) राधा को स्वीकार होगा?

(ii) व्यापारी को स्वीकार होगा?

हल : कुल फोन = 36 तथा अच्छे फोन = 30

थोड़ी खराबी वाले = 3

(i) राधा को स्वीकार होगा (केवल अच्छे फोन) :

$$P(\text{राधा को स्वीकार}) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

(ii) व्यापारी को स्वीकार होगा (बड़ी खराबी वाले को छोड़कर) :

व्यापारी को स्वीकार = अच्छे + थोड़ी खराबी

= 30 + 3 = 33

$$P(\text{व्यापारी को स्वीकार}) = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}.$$

प्रश्न 6. एक थैले में 24 गेंदे हैं, जिसमें से x लाल, $2x$ सफेद तथा $3x$ नीली हैं। एक गेंद यादृच्छिक रूप से चुनी जाती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह गेंद

(i) लाल नहीं है? **(ii) सफेद है?**

हल : कुल गेंदें = 24, लाल = x, सफेद = $2x$, नीली = $3x$

$$x + 2x + 3x = 24 \Rightarrow 6x = 24 \Rightarrow x = 4$$

अत: लाल गेंदें = 4, सफेद गेंदें = 8, नीली गेंदें = 12

(i) लाल नहीं है (सफेद + नीली) :

$$P(\text{लाल नहीं}) = \frac{8+12}{24} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$

(ii) सफेद है :

$$P(\text{सफेद}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}.$$

प्रश्न 7. 52 पत्तों की अच्छी प्रकार से फेंटी गई एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए—

(i) लाल रंग का गुलाम **(ii) लाल रंग का पत्ता**

(iii) पान का इक्का **(iv) ईंट की बेगम**

(v) हुकुम का पत्ता।

हल : कुल पत्तें = 52

(i) लाल रंग का गुलाम :

लाल गुलाम = 2

$$P(\text{लाल गुलाम}) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

(ii) लाल रंग का पत्ता :

लाल पत्ते = 26

$$P(\text{लाल पत्ता}) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(iii) पान का इक्का :

पान का इक्का = 1

$$P(\text{पान का इक्का}) = \frac{1}{52}$$

(iv) ईंट की बेगम :

ईंट की बेगम = 1

$$P(\text{ईंट की बेगम}) = \frac{1}{52}$$

(v) हुकुम का पत्ता :

हुकुम के पत्ते = 13

$$P(\text{हुकुम का पत्ता}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

प्रश्न 8. एक खेल में प्रवेश शुल्क ₹ 5 है। इस खेल में एक सिक्के को तीन बार उछाला जाता है। यदि एक या दो चित आते हैं तो श्वेता को अपना शुल्क वापस मिल जाता है। यदि वह तीन चित प्राप्त करे, तो उसको अपने प्रवेश शुल्क का दोगुना प्राप्त होता है, अन्यथा वह प्रवेश शुल्क की राशि हार जाती है। एक सिक्के को तीन बार फेंकने पर इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह— (i) अपना प्रवेश शुल्क हार जाएगी। (ii) प्रवेश शुल्क का दोगुना प्राप्त करेगी। (iii) केवल अपना शुल्क वापस प्राप्त करेगी।

हल : सिक्के को तीन बार उछालने पर संभव परिणाम :

कुल परिणाम = $2^3 = 8$

सभी से भावनाएँ

(1) HHH (3 चित)	(2) HHT (2 चित)
(3) HTH (2 चित)	(4) HTT (1 चित)
(5) THH (2 चित)	(6) THT (1 चित)
(7) TTH (1 चित)	(8) TTT (0 चित)

(i) खिलाड़ी अपना प्रवेश शुल्क हार जाएगी। जब 0 चित आते हैं।

0 चित के अनुकूल परिणाम (TTT) = 1

प्रायिकता = $\frac{1}{8}$

(ii) प्रवेश शुल्क का दो गुना प्राप्त करेगी।

खिलाड़ी दोगुना तक पाता है जब 3 चित आते हैं।

3 चित के अनुकूल परिणाम (HHH) = 1

प्रायिकता = $\frac{1}{8}$

(iii) केवल अपना शुल्क वापस प्राप्त करेगी।

खिलाड़ी अपना शुल्क वापस तब पाता है जब 1 या 2 चित आते हैं।

1 चित के परिणाम = (HTT, THT, TTH) = 3

2 चित आने के परिणाम = (HHT, HTH, THH) = 3

कुल अनुकूल परिणाम = 3 + 3 = 6

प्रायिकता = $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

●●