1 संख्या पद्धति

प्रश्नावली 1·1

1. क्या शून्य एक परिमेय संख्या है ? क्या इसे आप $\frac{p}{q}$ के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है ?

हल : हाँ, शून्य एक परिमेय संख्या है, जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिख सकते हैं, जैसे $\Rightarrow \frac{0}{1}, \frac{0}{-1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{-2}$ आदि।

जहाँ p तथा q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$

अत: 0 एक परिमेय संख्या है। **उत्तर**

2. 3 और 4 के बीच में छः परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : 3 और 4 के मध्य 6 परिमेय संख्याएँ ज्ञात करनी हैं।

इसलिए अंश व हर में (6 + 1) = 7 से गुणा करने पर 3 और 4 को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$3 = \frac{3\times7}{1\times7} = \frac{21}{7}$$

$$4 = \frac{4\times7}{1\times7} = \frac{28}{7}$$

हम जानते हैं कि

$$21 < 22 < 23 < 24 < 25 < 26 < 27 < 28$$

अत: $3 = \frac{21}{7}$ और $4 = \frac{28}{7}$ के मध्य परिमेय संख्याएँ

$\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}$ और $\frac{27}{7}$ हैं। **उत्तर**

3. $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ $\frac{3}{5}$ व $\frac{4}{5}$ के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात करनी हैं।

$\therefore$ $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{5}$ के अंश व हर में (5 + 1) = 6 से गुणा करने पर $\frac{3}{5}$ व $\frac{4}{5}$ को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{3}{5} = \frac{3\times6}{5\times6} = \frac{18}{30}, \quad \frac{4}{5} = \frac{4\times6}{5\times6} = \frac{24}{30}$$

हम जानते हैं कि

$$18 < 19 < 20 < 21 < 22 < 23 < 24$$

अत: $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$ और $\frac{4}{5} = \frac{24}{30}$ के मध्य पाँच परिमेय संख्याएँ $\frac{19}{30}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{11}{15}, \frac{23}{30}$ हैं। **उत्तर**

4. नीचे दिये गये कथन सत्य हैं या असत्य ? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए :

(i) प्रत्येक प्राकृत संख्या एक पूर्ण संख्या होती है।

उत्तर : सत्य, प्रत्येक प्राकृत संख्या एक पूर्ण संख्या होती है।

(ii) प्रत्येक पूर्णांक एक पूर्ण संख्या होती है।

उत्तर : असत्य, क्योंकि पूर्णांक संख्याओं में ऋण संख्याओं को भी सम्मिलित किया जाता है जबकि पूर्ण संख्याएँ धनात्मक होती हैं। अत: प्रत्येक पूर्णांक एक पूर्ण संख्या नहीं है।

(iii) प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्ण संख्या होती है।

उत्तर : असत्य, परिमेय संख्या धनात्मक तथा ऋणात्मक दोनों ही हो सकती हैं, जबकि पूर्ण संख्या में केवल धनात्मक संख्या ही आती हैं।

प्रश्नावली 1·2

1. नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य ? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए।

(i) प्रत्येक अपरिमेय संख्या एक वास्तविक संख्या होती है।

(ii) संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु $\sqrt{m}$ के रूप का होता है, जहाँ m एक प्राकृत संख्या है।

(iii) प्रत्येक वास्तविक संख्या एक अपरिमेय संख्या होती है।

हल : (i) यह कथन सत्य है, वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में समस्त परिमेय तथा अपरिमेय संख्याएँ सम्मिलित की जाती हैं। अत: प्रत्येक अपरिमेय संख्या वास्तविक संख्या होती है।

(ii) यह कथन असत्य है, क्योंकि संख्या रेखा पर सभी वास्तविक संख्याएँ निरूपित की जा सकती हैं। यहाँ m एक प्राकृत संख्या है जो यह इंगित करती है कि $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5},....$ बिन्दु ही संख्या-रेखा पर स्थित हैं उनसे अलग बिन्दु संख्या-रेखा पर स्थित नहीं हो सकते। जबकि वास्तविकता यह है कि दी हुई किन्हीं दो क्रमिक संख्याओं को निरूपित करने वाले बिन्दुओं के मध्य विस्तृत अन्तराल होता है; जैसे : $\sqrt{2} = 1.412....$ और $\sqrt{3} = 1.732....$ तब 1.412 और 1.732 के मध्य पड़ने वाली संख्याओं को भी संख्या-रेखा पर स्थान प्राप्त होता है। इसके अतिरिक्त ऋणात्मक संख्याएँ संख्या-रेखा पर स्थित होती हैं। अत: संख्या-रेखा का प्रत्येक बिन्दु $\sqrt{m}$ से व्यक्त नहीं किया जा सकता (जबकि m = एक प्राकृत संख्या हो)।

(iii) यह कथन असत्य है, क्योंकि परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्या के संग्रह से वास्तविक संख्याओं के समुच्चय का निर्माण होता है। अत: प्रत्येक अपरिमेय संख्या तो वास्तविक संख्या हो सकती है परन्तु प्रत्येक वास्तविक संख्या का अपरिमेय होना आवश्यक नहीं है। जैसे : 2 एक वास्तविक संख्या है परन्तु यह अपरिमेय नहीं है।

2. क्या सभी धनात्मक पूर्णांकों के वर्गमूल अपरिमेय होते हैं ? यदि नहीं, तो एक ऐसी संख्या के वर्गमूल का उदाहरण दीजिए जो एक परिमेय संख्या है।

हल : नहीं, सभी धनात्मक पूर्णांकों के वर्गमूल अपरिमेय नहीं होते हैं।

उदाहरण : $\sqrt{1} = \pm 1,\ \sqrt{4} = \pm 2,\ \sqrt{9} = \pm 3,$ इत्यादि परिमेय संख्याएँ हैं।

3. दिखाइए कि संख्या-रेखा पर $\sqrt{5}$ को किस प्रकार निरूपित किया जा सकता है ?

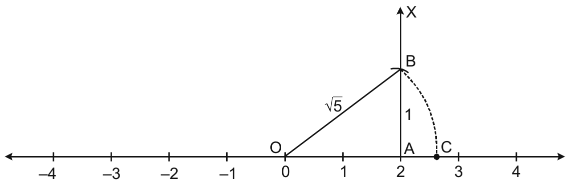
हल : (i) संख्या-रेखा खींचकर, $OA = 2$ इकाई ली।

(ii) OA के A बिन्दु पर $OB = 1$ इकाई लम्ब डाला।

(iii) O को B से मिलाया।

समकोण ΔOAB में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$



O को केन्द्र मानकर OB त्रिज्या का चाप खींचा जो संख्या रेखा को C बिन्दु पर काटता है।

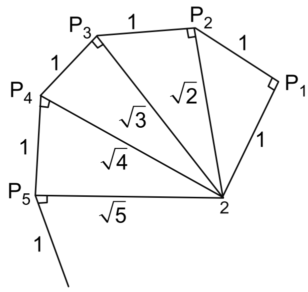
$$OC = OB = \sqrt{5} = 2.236 \text{ (लगभग)}$$

अत: $\sqrt{5}$ को संख्या रेखा पर बिन्दु C के रूप में निरूपित किया जा सकता है।

4. कक्षा में वर्गमूल सर्पिल की रचना क्रियाकलाप द्वारा करिये।

हल : कागज की एक बड़ी शीट लेकर, सबसे पहले एक बिन्दु O लिया और एकक लम्बाई का रेखाखण्ड OP_1 खींचा। बिन्दु P_1 पर लम्ब रेखाखण्ड P_1P_2 एकक लम्बाई का खींचा। अब O और P_2 को मिलाया। OP_2 रेखाखण्ड $\sqrt{2}$ को दर्शाता है। इसी प्रकार बिन्दु P_2 पर एकक लम्बाई का रेखाखण्ड P_2P_3 खींचा, फिर P_3 को O से मिलाया जो $\sqrt{3}$ को निरूपित करता है। इसी प्रकार P_3 पर एकक लम्बाई का लम्ब रेखाखण्ड P_3P_4 खींचा तथा P_4 को O से मिलाया जो कि $\sqrt{4}$ को निरूपित करता है।

इसी प्रकार की पुनरावृत्ति के द्वारा $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6},....$ दर्शाने वाला एक वर्गमूल सर्पिल प्राप्त किया जा सकता है।



प्रश्नावली 1·3

1. निम्नलिखित भिन्नों को दशमलव के रूप में लिखिए और बताइए कि प्रत्येक का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है :

(i) $\mathbf{\frac{36}{100}}$ **उत्तर :** $\frac{36}{100} = 0.36$, सांत। **उत्तर**

(ii) $\mathbf{\frac{1}{11}}$ **(iii)** $\mathbf{4\frac{1}{8} = \frac{33}{8}}$

उत्तर : भाग विधि द्वारा :

$$\begin{array}{r|l} & 0.090909...... \\ 11 & 1.000000 \\ & -99 \\ & \quad 100 \\ & \quad -99 \\ & \qquad 100 \\ & \qquad -\ 99 \\ & \qquad\quad 1 \end{array}$$

$\therefore \frac{1}{11} = 0.090909....$

$= 0.\overline{09}$ असांत और आवृत्ति।

उत्तर

हल : भाग विधि द्वारा :

$$\begin{array}{r|l} & 4.125 \\ 8 & 33 \\ & 32 \\ & \ 10 \\ & \ \ 8 \\ & \ \ 20 \\ & \ \ 16 \\ & \ \ \ 40 \\ & \ \ \ 40 \\ & \ \ \ \times \end{array}$$

आवृति

$\therefore 4\frac{1}{8} = 4.125$, **सांत।**

आवृति

उत्तर

आवृति

(iv) $\mathbf{\frac{3}{13}}$

हल : भाग विधि द्वारा :

$$\begin{array}{r|l} & 0.2307692307..... \\ 13 & 30.0000000 \\ & -26 \\ & \ \ 40 \\ & -39 \\ & \ \ 100 \\ & \ -91 \\ & \ \ \ 90 \\ & \ -78 \\ & \ \ \ 120 \\ & -117 \\ & \ \ \ \ 30 \\ & \ \ -26 \\ & \ \ \ \ 40 \\ & \ \ -39 \\ & \ \ \ \ 100 \\ & \ \ \ -90 \\ & \ \ \ \ \ 9 \end{array}$$

$\therefore \quad \frac{3}{13} = 0.23076923....$

$= 0.\overline{230769}$, असांत और आवृत्ति (पुनरावृत्ति)।

उत्तर

(v) $\mathbf{\frac{2}{11}}$ **(vi)** $\mathbf{\frac{329}{400}}$

हल : भाग विधि द्वारा :

$$\begin{array}{r|l} & 0.1818.... \\ 11 & 2.00000 \\ & 11 \\ & \ 90 \\ & \ 88 \\ & \ \ 20 \\ & \ \ 11 \\ & \ \ \ 9 \end{array}$$

$\therefore \frac{2}{11} = 0.1818 = 0.\overline{18}$,

असांत और पुनरावृत्ति।

उत्तर

हल : भाग विधि द्वारा :

$$\begin{array}{r|l} & 0.8225 \\ 400 & 329.0000 \\ & -3200 \\ & \quad 900 \\ & \ -800 \\ & \quad 1000 \\ & \quad -800 \\ & \quad\ 2000 \\ & \quad -2000 \\ & \qquad 0 \end{array}$$

$\therefore \frac{329}{400} = 0.8225$, **सान्त।**

उत्तर

2. आप जानते हैं कि $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ है। वास्तव में, लम्बा भाग दिए बिना क्या आप यह बता सकते हैं कि $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ के दशमलव प्रसार क्या हैं ? यदि हाँ, तो कैसे ?

हल : हाँ, उपर्युक्त सभी 1, 4, 2, 8, 5, 7 आवृत्ति (पुनरावृत्ति) दशमलव हैं।

$$\begin{array}{r|l} & 0.1428571.... \\ 7 & 1.0000000 \\ & -7 \\ & \ \ 30 \\ & -28 \\ & \ \ \ 20 \\ & \ -14 \\ & \ \ \ \ 60 \\ & \ \ -56 \\ & \ \ \ \ \ 40 \\ & \ \ \ -35 \\ & \ \ \ \ \ \ 50 \\ & \ \ \ \ -49 \\ & \ \ \ \ \ \ \ 10 \\ & \ \ \ \ \ \ -7 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ 3 \end{array}$$

तब $\frac{2}{7} = 2\times\frac{1}{7} = 2\times0.\overline{142857} = 0.\overline{285714}$

$\frac{3}{7} = 3\times\frac{1}{7} = 3\times0.\overline{142857} = 0.\overline{428571}$

इसी प्रकार,

$$\frac{4}{7} = 4\times\frac{1}{7} = 4\times0.142857 = 0.\overline{571428}$$

$$\frac{5}{7} = 5\times\frac{1}{7} = 5\times0.142857 = 0.\overline{714285}$$

$$\frac{6}{7} = 6\times\frac{1}{7} = 6\times0.142857 = 0.\overline{857142}$$

3. निम्नलिखित को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है :

(i) $0.\overline{6}$, (ii) $0.4\overline{7}$, (iii) $0.\overline{001}$.

हल : (i) माना $x = 0.\overline{6}$

$$x = 0.666.... \quad ...(1)$$

∵ यहाँ केवल एक आवृत्ति अंक है। इसलिए समीकरण (1) में 10 से गुणा करने पर,

$$10x = 10 \times 0.666....$$

या $10x = 6.666....$ ...(2)

समी. (2) में से समी. (1) घटाने पर,

$$9x = 6$$

$\Rightarrow \quad x = \frac{6}{9}$

या $\quad x = \frac{2}{3}$

अतः $\quad 0.\overline{6} = \frac{2}{3}$ **उत्तर**

(ii) प्रथम विधि : माना $x = 0.4\overline{7}$ ...(i)

∵ दशमलव बिन्दु के दायीं ओर बिना बार (रेखा) के एक अंक है।

∴ अतः दोनों पक्षों में 10 से गुणा करने पर,

$10x = 10\times0.4\overline{7} \Rightarrow 10x = 4.\overline{7}$ ...(ii)

पुनः समी. (i) के दोनों पक्षों में 100 से गुणा करने पर

$100x = 47.\overline{7}$ ...(iii)

समी. (iii) में से समी. (ii) घटाने पर,

$$90x = 43$$

$\Rightarrow \quad x = \frac{43}{90}$

अतः $\quad 0{\cdot}4\overline{7} = \frac{43}{90}$ **उत्तर**

(iii) $0.\overline{001}$

माना $\quad x = 0.\overline{001}$

$\Rightarrow \quad x = 0.001001001....$ ...(1)

यहाँ दशमलव बिन्दु के बाद तीन आवृत्ति अंक हैं। अतः समी. (1) को $(10)^3 = 1000$ से गुणा करने पर,

$1000x = 1.001001....$ ...(2)

समी. (2) में से समी. (1) को घटाने पर,

$1000x - x = (1.001001....) - (0.001001....)$

$\Rightarrow \quad 999x = 1$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{999}$

अतः $\quad 0.\overline{001} = \frac{1}{999}$ **उत्तर**

4. 0.99999.... को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए। क्या आप अपने उत्तर से आश्चर्यचकित हैं ? अपने अध्यापक और कक्षा के सहयोगियों के साथ उत्तर की सार्थकता पर चर्चा कीजिए।

हल : माना $\quad x = 0.99999....$ ...(1)

∵ यहाँ केवल एक आवृत्ति अंक है। अतः समीकरण (1) में 10 से गुणा करने पर,

$10x = 10 \times 0.99999....$

$10x = 9.999....$ ...(2)

समी. (2) में से समी. (1) को घटाने पर,

$\Rightarrow \quad 9x = 9$

$\therefore \quad x = 1$

अतः $\quad 0.9999.... = 1$

क्योंकि 0.9999.... अनन्त तक होगा। अतः 1 और 0.9999.... में कोई अन्तर नहीं है। अतः ये लगभग समान हैं। **उत्तर**

5. $\frac{1}{17}$ के दशमलव प्रसार में अंकों के पुनरावृत्ति खण्ड में अंकों की अधिकतम संख्या क्या हो सकती है ? अपने उत्तर की जाँच करने के लिए विभाजन-क्रिया कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{l} \quad 0.0588235294117647.... \\ 17\overline{)\,1.0000000000000000} \end{array}$$

− 85
150
− 136
140
− 136
40
− 34
60
− 51
90
− 85
50
− 34
160
− 153
70
− 68
20
− 17
30
− 17
130
− 119
110
− 102
80
− 68
120
− 119
1

अतः $\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647}$

$\therefore \frac{1}{17}$ के दशमलव प्रसार में पुनरावृत्ति अंकों की अधिकतम संख्या 16 है। **उत्तर**

6. $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ के रूप की परिमेय संख्याओं के अनेक उदाहरण लीजिए, जहाँ p और q पूर्णांक हैं, जिनका 1 के अतिरिक्त अन्य कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है और जिसका सांत दशमलव (निरूपण) प्रसार है। क्या आप यह अनुमान लगा सकते हैं कि q को कौन-सा गुण अवश्य सन्तुष्ट करना चाहिए ?

हल : $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ के रूप में कुछ ऐसी परिमेय संख्याएँ लेते हैं जिसमें p और q पूर्णांक हों तथा जिनके 1 के अतिरिक्त अन्य कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो और सांत दशमलव हो।

माना $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{37}{25}, \frac{8}{125}, \frac{17}{20}, \frac{31}{16}$ आदि ऐसी परिमेय संख्याएँ हैं।

अब हर में ऐसी प्राकृत संख्या से गुणा करते हैं जिससे हर 10 या 10 की घात का प्राप्त हो।

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times5}{2\times5} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1\times25}{4\times25} = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7\times125}{8\times125} = \frac{875}{1000} = 0.875$$

$$\frac{37}{25} = \frac{37\times4}{25\times4} = \frac{148}{100} = 1.48$$

$$\frac{8}{125} = \frac{8\times8}{125\times8} = \frac{64}{1000} = 0.064$$

$$\frac{17}{20} = \frac{17\times5}{20\times5} = \frac{85}{100} = 0.85$$

$$\frac{31}{16} = \frac{31\times625}{16\times625} = \frac{19375}{10000} = 1.9375$$

उपरोक्त परिमेय संख्याओं में प्रत्येक के हर का एक गुणनखण्ड 2 अथवा 5 है, तभी हर को 10 या 10 की किसी घात के रूप में प्राप्त किया जा सकता है।

यदि परिमेय संख्या जो मानक रूप में हो और हर में 2 और 5 के अलावा और कोई अभाज्य गुणनखण्ड न हो तब और केवल तब सांत दशमलव निरूपित होता है। **उत्तर**

7. ऐसी तीन संख्याएँ लिखिए जिनके दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती हों।

हल : हम जानते हैं कि सभी अपरिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती होता है।

अतः $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5},....$ इत्यादि का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती है।

ऐसी संख्या को सीधे दशमलव प्रसार के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।

$a = 0.04004000400004.....$

$b = 0.505005000500005.....$

$c = 0.007000700007.....$ **उत्तर**

8. परिमेय संख्याओं $\frac{5}{7}$ और $\frac{9}{11}$ के बीच तीन अलग-अलग अपरिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{5}{7}$ और $\frac{9}{11}$

```
      0.714285&
   7) 5.000000
      49
       10
      −7
       30
      −28
        20
      −14
        60
      −56
        40
      −35
         5
```

```
        0.81&
   11)  9.00
       −88
         20
       −11
          9
```

अतः $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$

$\therefore \frac{5}{7} = 0.\overline{714285}$ और $\frac{9}{11} = 0 \cdot \overline{81}$

$\frac{5}{7}$ और $\frac{9}{11}$ के मध्य अनन्त अपरिमेय संख्याएँ हो सकती हैं। इसमें से तीन अपरिमेय संख्याएँ निम्नलिखित हैं :

0·75075007500075000075..........,

0·767076700767000767..........

और 0·808008000800008 .... **उत्तर**

9. बताइए कि निम्नलिखित संख्याओं में कौन-कौन संख्याएँ परिमेय और कौन-कौन संख्याएँ अपरिमेय हैं :

(i) $\sqrt{23}$ **(ii)** $\sqrt{225}$

(iii) 0.3796 **(iv) 7.478478.......**

(v) 1·101001000100001.........

हल : (i) संख्या $\sqrt{23}$ में 23 पूर्ण वर्ग नहीं है।

$\therefore \sqrt{23}$ अपरिमेय संख्या है। **उत्तर**

(ii) $\sqrt{225} = \sqrt{3 \times 3 \times 5 \times 5}$

$= 3 \times 5 = 15$

3	225
3	75
5	25
5	5
	1

अतः $\sqrt{225} = 15$ एक परिमेय संख्या है। **उत्तर**

(iii) 0.3796

सांत दशमलव संख्या है।

$\therefore$ 0.3796 एक परिमेय संख्या है। **उत्तर**

(iv) 7.478478 ....

एक आवृत्ति लेकिन पुनरावृत्ति है।

$\therefore$ यह परिमेय संख्या है। **उत्तर**

(v) 1·101001000100001 ....

यह एक आवृत्ति है लेकिन पुनरावृत्ति नहीं है।

$\therefore$ यह अपरिमेय संख्या है। **उत्तर**

प्रश्नावली 1·4

1. बताइए नीचे दी गई संख्याओं में कौन-कौन परिमेय हैं और कौन-कौन अपरिमेय हैं :

(i) $2-\sqrt{5}$, **(ii)** $(3+\sqrt{23})-\sqrt{23}$,

(iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$, **(iv)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$, **(v)** 2π.

हल : (i) $2-\sqrt{5}$, संख्या 2 परिमेय तथा $\sqrt{5}$ अपरिमेय का अन्तर है। परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं का अन्तर अपरिमेय होता है।

$\therefore$ यह संख्या अपरिमेय होगी। **उत्तर**

(ii) $(3+\sqrt{23})-\sqrt{23} = 3+\sqrt{23}-\sqrt{23} = 3$,

परिमेय संख्या है। **उत्तर**

(iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}} = \frac{2}{7}$, एक परिमेय संख्या है। **उत्तर**

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\because$ परिमेय और अपरिमेय का भागफल अपरिमेय होता है।

$\therefore$ यह संख्या अपरिमेय है। **उत्तर**

(v) 2π,

यहाँ संख्या 2 परिमेय और π अपरिमेय संख्या का गुणनफल अपरिमेय आता है।

$\therefore 2\pi$ एक अपरिमेय संख्या है। **उत्तर**

2. निम्नलिखित व्यंजकों में से प्रत्येक व्यंजक को सरल कीजिए :

(i) $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$, **(ii)** $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$,

(iii) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$, **(iv)** $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$.

हल : (i) $(3+\sqrt{3})\,(2+\sqrt{2})$

$= 3\times2+\sqrt{3}\times2+3\times\sqrt{2}+\sqrt{3}\times\sqrt{2}$

$= 6+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$. उत्तर

(ii) $(3+\sqrt{3})\,(3-\sqrt{3}) = (3)^2-(\sqrt{3})^2$

$[(\because a^2-b^2=(a+b)(a-b)]$

$=9-3=6.$ उत्तर

(iii) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2$

$= (\sqrt{5})^2+2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$

$= 5+2\sqrt{10}+2 = 7+2\sqrt{10}.$ उत्तर

(iv) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})\,(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

$= (\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2 = 5-2=3$ उत्तर

3. आपको याद होगा कि π को एक वृत्त की परिधि (मान लीजिए c) और उसके व्यास (मान लीजिए d) के अनुपात से परिभाषित किया जाता है अर्थात् $\pi = \frac{c}{d}$ है। यह इस तथ्य का अंतर्विरोध करता हुआ प्रतीत होता है कि π अपरिमेय है। इस अंतर्विरोध का निराकरण आप किस प्रकार करेंगे ?

हल : हम जब कभी भी स्केल से या अन्य किसी युक्ति से लम्बाई नापते हैं, तब हमको केवल एक सन्निकट परिमेय मान प्राप्त होता है। अत: हम यह अनुभव नहीं कर पाते कि c या d अपरिमेय हैं।

अत: π के अपरिमेय होने में कोई भी विरोधाभास नहीं है। चाहे c और d का मान कुछ भी हो।

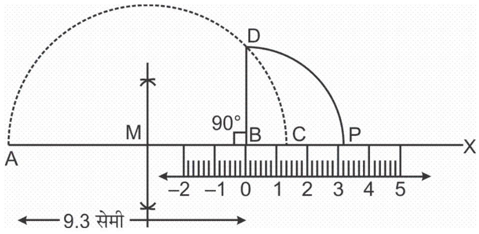
4. संख्या रेखा पर $\sqrt{9.3}$ को निरूपित कीजिए।

हल : (1) रेखाखण्ड $AB = 9.3$ सेमी खींचा।

(2) इसे किसी बिन्दु X तक आगे बढ़ाया और BX पर एक बिन्दु C इस प्रकार लिया कि $BC = 1$ सेमी।

(3) AC का मध्य-बिन्दु M ज्ञात किया और व्यास AC का अर्द्धवृत्त खींचा।

(4) AC के बिन्दु B से AC पर लम्ब BD खींचा जो अर्द्धवृत्त को D पर मिलता है।



(5) केन्द्र B से BD त्रिज्या का चाप खींचा जो BX को बिन्दु P पर काटता है।

(6) बिन्दु P, संख्या रेखा पर $\sqrt{9.3}$ को निरूपित करता है।

$\Rightarrow \sqrt{9.3} = BP = 3.049$ या लगभग 3.05. उत्तर

5. निम्नलिखित के हरों का परिमेयकरण कीजिए :

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ **(ii)** $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ **(iv)** $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

हल : (i) $\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$. उत्तर

(ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6})^2}$

$= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6} = \sqrt{7}+\sqrt{6}.$ उत्तर

(iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$

$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$. उत्तर

(iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{1}{\sqrt{7}-2}\times\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2}$

$= \frac{\sqrt{7}+2}{(\sqrt{7})^2-(2)^2}$

$= \frac{\sqrt{7}+2}{7-4} = \frac{\sqrt{7}+2}{3}$. उत्तर

प्रश्नावली 1·5

1. ज्ञात कीजिए :

(i) $64^{\frac{1}{2}}$, (ii) $32^{\frac{1}{5}}$, (iii) $125^{\frac{1}{3}}$.

हल : (i) $64^{\frac{1}{2}} = (8\times8)^{\frac{1}{2}}$

$= (8)^{2\times\frac{1}{2}} = 8.$ उत्तर

(ii) $32^{\frac{1}{5}} = (2\times2\times2\times2\times2)^{\frac{1}{5}}$

$= (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2^{5\times\frac{1}{5}} = 2.$ उत्तर

(iii) $125^{\frac{1}{3}} = (5\times5\times5)^{\frac{1}{3}}$

$= (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^{3\times\frac{1}{3}} = 5.$ उत्तर

2. ज्ञात कीजिए :

(i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{-\frac{1}{3}}$.

हल : (i) $9^{\frac{3}{2}} = (3\times3)^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^{2\times\frac{3}{2}}$

$= 3^3 = 3\times3\times3 = 27.$ उत्तर

(ii) $32^{\frac{2}{5}} = (2\times2\times2\times2\times2)^{\frac{2}{5}}$

$= (2^5)^{\frac{2}{5}} = 2^{5\times\frac{2}{5}}$

$= 2^2 = 2\times2 = 4.$ उत्तर

(iii) $16^{\frac{3}{4}} = (2\times2\times2\times2)^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}}$

$= 2^{4\times\frac{3}{4}} = 2^3$

$= 2\times2\times2 = 8.$ उत्तर

(iv) $125^{-\frac{1}{3}} = (5\times5\times5)^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{-\frac{1}{3}}$

$= 5^{3\times-\frac{1}{3}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}.$ उत्तर

3. सरल कीजिए :

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}$

हल : (i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}$

$= 2^{\frac{10+3}{15}} = 2^{\frac{13}{15}}.$ उत्तर

(ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7 = \frac{(1)^7}{(3^3)^7}$

$= \frac{1^7}{3^{3\times7}} = \frac{1}{3^{21}}.$ उत्तर

(iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}} = 11^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$

$= 11^{\frac{2-1}{4}} = 11^{\frac{1}{4}}.$ उत्तर

(iv) $7^{\frac{1}{2}}\cdot8^{\frac{1}{2}} = (7\times8)^{\frac{1}{2}}$

$= 56^{\frac{1}{2}}.$ उत्तर

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. – 2 और 5 के बीच तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : $-2 = \frac{-4}{2}$ तथा $5 = \frac{10}{2}$

इनके बीच की परिमेय संख्याएँ :

$-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}$ और $\frac{13}{4}$

प्रश्न 2. निम्नलिखित संख्याओं को दशमलव संख्या में व्यक्त कीजिए तथा दशमलव प्रसार का प्रकार बताइए।

(i) $\frac{3}{11}$ (ii) $\frac{1}{7}$ (iii) $\frac{1}{16}$

हल : (i) $\frac{3}{11} = 3 \div 11$

$= 0.2727... = 0.\overline{27}$

प्रकार: असांत आवर्ती

(ii) $\frac{1}{7} = 1 \div 7 = 0.142857142857... = 0.\overline{142857}$

प्रकार : असांत आवर्ती

(iii) $\frac{1}{16} = 1 \div 16 = 0.0625$

प्रकार : सांत

प्रश्न 3. वास्तविक संख्या रेखा पर $\sqrt{3}$ का स्थान निर्धारित कीजिए।

संकेत : $1^2 = 1, 2^2 = 4$

$\Rightarrow \quad 1 < 3 < 4$

$\Rightarrow \quad 1 < \sqrt{3} < 2$

अत: $\sqrt{3}$, 1 और 2 के बीच स्थित है। इसे संख्या रेखा पर पाइथागोरस प्रमेय द्वारा भी दर्शाया जा सकता है।

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

हल : मान लीजिए $\sqrt{3}$ परिमेय है, तो $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, जहाँ p और q सहभाज्य पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$

वर्ग करने पर $3 = \frac{p^2}{q^2}$

$\Rightarrow \quad p^2 = 3q^2$

अत: p^2, 3 से विभाज्य है $\Rightarrow p$ भी 3 से विभाज्य है।

मान लें $\quad p = 3k$

$\Rightarrow \quad (3k)^2 = 3q^2$

$\Rightarrow \quad 9k^2 = 3q^2$

$\Rightarrow \quad q^2 = 3k^2$

इससे q भी 3 से विभाज्य हुआ।

परंतु p और q सहभाज्य नहीं रह गए, तो विरोधाभास है।

अत: $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 5. यदि $(x)^y = 128$, तो x तथा y का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $128 = 2^7 \Rightarrow x^y = 2^7$

अत: $x = 2, y = 7$.

प्रश्न 6. $\left[(1)^3 + (2)^3 + (3)^3\right]^{-\frac{5}{2}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $[(1)^3 + (2)^3 + (3)^3]^{-5/2} = \frac{1}{(36)^{5/2}}$

$= \frac{1}{6^5} = \frac{1}{7776}$.

प्रश्न 7. यदि x, y, z धनात्मक संख्याएँ हैं, तो $\sqrt{x^{-1}y} \cdot \sqrt{y^{-1}z} \cdot \sqrt{z^{-1}x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt{\frac{z}{y}} \cdot \sqrt{\frac{x}{z}} = \sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z}} = \sqrt{1} = 1.$

प्रश्न 8. $6\sqrt{5}$ को $3\sqrt{5}$ से गुणा कीजिए।

हल : $6\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 18 \times 5 = 90.$

प्रश्न 9. $0.\overline{361}$ को परिमेय संख्या में बदलिए।

हल : माना $\quad x = 0.\overline{361}$

$\Rightarrow \quad x = 0.361361361 \quad ...(i)$

$1000x = 361.361361 \quad ...(ii)$

समी. (i) व (ii) से,

$1000x - x = 361$

$\Rightarrow \quad x = \frac{361}{999}.$

प्रश्न 10. $\frac{3}{\sqrt{8}}$ का परिमेयकरण कीजिए।

हल : $\frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$

प्रश्न 11. यदि $b = \sqrt[5]{243}$ हो, तो b का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $b = \sqrt[5]{243} = (243)^{1/5} = ((3)^5)^{1/5} = 3$

प्रश्न 12. $\frac{3}{\sqrt{48} - \sqrt{75}}$ का मान क्या होगा ?

हल : $\frac{3}{\sqrt{48} - \sqrt{75}} = \frac{3}{5\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}$

$= -\frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$

प्रश्न 13. $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ **के हर का परिमेयकरण कीजिए।**

हल : $\frac{1}{3+\sqrt{2}}\times\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$.

प्रश्न 14. यदि $\sqrt{5}$ **= 2.236 हो तो** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **का मान दशमलव के तीन स्थान तक ज्ञात कीजिए।**

हल : $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{2.236} \approx 0.8944 = 0.894$

प्रश्न 15. $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ **में हर का परिमेयकरण कीजिए।**

हल : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}\times\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}} = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$.

प्रश्न 16. निम्नलिखित को सरल कीजिए—

(i) $x^2 \times x^{-2} \times x^{-3}$

(ii) $2x^3 \div 2x^{-3}$

(iii) $\frac{x}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{x}$

(iv) $(2\sqrt{5}+1)+(1-2\sqrt{5})-2$.

हल : (i) $x^2 \times x^{-2} \times x^{-3} = x^{-3}$

(ii) $2x^3 \div 2x^{-3} = x^{3-(-3)} = x^6$.

(iii) $\frac{x}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{x}$

हर का परिमेयकरण :

$\frac{x}{\sqrt{5}+1}\times\frac{x}{\sqrt{5}-1} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5-1} = 1$

$\Rightarrow \quad x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$

(iv) $(2\sqrt{5}+1)+(1-2\sqrt{5})-2$

$2\sqrt{5}-2\sqrt{5}+1+1-2 = 0.$

प्रश्न 17. $2.\overline{37}$ **को** $\frac{p}{q}$ **के रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ** p **तथा** q **पूर्णांक हैं तथा** $q \neq 0$ **है।**

हल : माना $x = 2.\overline{37}$

$\Rightarrow \quad x = 2.373737 \quad$ ...(i)

$\Rightarrow \quad 100x = 237.3737 \quad$ ...(ii)

घटाने पर, $99x = 235$

$x = \frac{235}{99}$.

प्रश्न 18. $\sqrt{2}$ **को संख्या रेखा पर प्रदर्शित कीजिए।**

संकेत : पाइथागोरस प्रमेय द्वारा एकक लंबाई का वर्ग बनाकर $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर चिन्हित किया जाता है।

प्रश्न 19. संख्या रेखा पर $\sqrt{8}$ **का निर्धारण कीजिए।**

संकेत : $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, पहले $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करके उसका दो गुना करते हैं।

$AB = BC = 2$ इकाई

$\Rightarrow \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 2^2 + 2^2$

$= 4 + 4 = 8$

$\therefore \quad AC = \sqrt{8}$

$= \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad AC = 2\sqrt{2}$ इकाई

प्रश्न 20. $\frac{4+\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}+\frac{4-\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}}$ **को हर का परिमेयकरण करके सरल कीजिए।**

हल : दोनों भिन्नों का हर समान बनाते हुए :

$$\frac{(4+\sqrt{5})^2+(4-\sqrt{5})^2}{(4)^2-(\sqrt{5})^2}$$

अंश: $16+8\sqrt{5}+5+16-8\sqrt{5}+5 = 21+21 = 42$

हर : $16 - 5 = 11 = \frac{42}{11}$

प्रश्न 21. कारण सहित बताइए कि क्या $\sqrt{8}\times\sqrt{6}$ **एक अपरिमेय संख्या है ?**

हल : $\sqrt{8}\times\sqrt{6} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

चूँकि $\sqrt{3}$ अपरिमेय है, $4\sqrt{3}$ भी अपरिमेय है।

अतः $\sqrt{8}\times\sqrt{6}$ अपरिमेय है।

❑ ❑

2 बहुपद

प्रश्नावली 2·1

1. निम्नलिखित व्यंजकों में कौन-कौन एक चर के बहुपद हैं और कौन-कौन नहीं हैं ? कारण के साथ अपने उत्तर दीजिए :

(i) $4x^2 - 3x + 7$ **(ii)** $y^2 + \sqrt{2}$

(iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ **(iv)** $y + \frac{2}{y}$

(v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$.

हल : (i) व्यंजक $4x^2 - 3x + 7$ में x की सभी घात पूर्ण संख्या हैं। इसलिए यह एक चर का बहुपद है। **उत्तर**

(ii) $y^2 + \sqrt{2} = y^2 + \sqrt{2}y^0$ व्यंजक में y की सभी घात पूर्ण संख्या हैं। अत: यह व्यंजक एक चर का बहुपद है। **उत्तर**

(iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2} = 3t^{1/2} + t\sqrt{2}$, यहाँ व्यंजक में चर t की घात $\frac{1}{2}$ है, जो कि पूर्ण संख्या नहीं है। इसलिए व्यंजक एक चर का बहुपद नहीं है। **उत्तर**

(iv) $y + \frac{2}{y} = y + 2y^{-1}$, यहाँ व्यंजक में दूसरे पद में y की घात -1 है, जो कि पूर्ण संख्या नहीं है। इसलिए व्यंजक एक चर बहुपद नहीं है। **उत्तर**

(v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$, यहाँ व्यंजक में x, y, t तीन चर हैं। अत: यह व्यंजक एक चर का बहुपद नहीं है, बल्कि यह तीन चर का बहुपद है। **उत्तर**

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में x^2 का गुणांक लिखिए :

(i) $2 + x^2 + x$ **(ii)** $2 - x^2 + x^3$

(iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ **(iv)** $\sqrt{2}x - 1$

हल : (i) $2 + x^2 + x$ में x^2 का गुणांक 1 है। **उत्तर**

(ii) $2 - x^2 + x^3$ में x^2 का गुणांक -1 है। **उत्तर**

(iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ में x^2 का गुणांक $\frac{\pi}{2}$ है। **उत्तर**

(iv) $\sqrt{2}x - 1$ में x^2 का गुणांक 0 है। **उत्तर**

3. 35 घात के द्विपद का और 100 घात के एकपदी का एक-एक उदाहरण दीजिए।

हल : (i) 35 घात वाला द्विपदी बहुपद $= x^{35} + 2x$. **उत्तर**

(ii) 100 घात वाला एकपदी बहुपद $= 3x^{100}$. **उत्तर**

4. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद की घात लिखिए :

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ **(ii)** $4 - y^2$

(iii) $5t - \sqrt{7}$ **(iv)** 3.

हल : (i) बहुपद $5x^3 + 4x^2 + 7x$ में x की अधिकतम घात 3 है।

$\therefore$ बहुपद की घात = 3 **उत्तर**

(ii) बहुपद $4 - y^2$ में y की अधिकतम घात 2 है $\therefore$ बहुपद की घात = 2 **उत्तर**

(iii) बहुपद $5t - \sqrt{7}$ में t की अधिकतम घात 1 है।

अत: व्यंजक की घात = 1 **उत्तर**

(iv) बहुपद 3 में केवल एक पद है, जिसे $3x^0$ लिख सकते हैं। अत: इस व्यंजक की घात = 0 **उत्तर**

5. बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में कौन-कौन बहुपद रैखिक हैं, कौन-कौन द्विघाती हैं और कौन-कौन त्रिघाती हैं :

(i) $x^2 + x$ **(ii)** $x - x^3$

(iii) $y + y^2 + 4$ **(iv)** $1 + x$ **(v)** $3t$

(vi) r^2 **(vii)** $7x^3$.

हल : (i) $x^2 + x$, इस बहुपद की अधिकतम घात 2 है। $\therefore$ बहुपद द्विघाती है। **उत्तर**

(ii) $x - x^3$, बहुपद की अधिकतम घात 3 है। $\therefore$ बहुपद त्रिघाती है। **उत्तर**

(iii) $y + y^2 + 4$, बहुपद की अधिकतम घात 2 है। $\therefore$ द्विघाती बहुपद है। **उत्तर**

(iv) $1 + x$, बहुपद की अधिकतम घात 1 है।

$\therefore$ यह रैखिक बहुपद है। **उत्तर**

(v) $3t$, बहुपद की अधिकतम घात 1 है।

$\therefore$ यह रैखिक बहुपद है। **उत्तर**

(vi) r^2, बहुपद की अधिकतम घात 2 है।

$\therefore$ यह द्विघाती बहुपद है। **उत्तर**

(vii) $7x^3$, बहुपद की अधिकतम घात 3 है।

$\therefore$ यह त्रिघाती बहुपद है। **उत्तर**

प्रश्नावली 2·2

1. निम्नलिखित पर बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$.

हल : (i) बहुपद $p(x) = 5x - 4x^2 + 3, x = 0$

बहुपद $p(x)$ में x के स्थान पर 0 प्रतिस्थापित करने पर,

$$p(0) = 5 \times 0 - 4(0)^2 + 3$$
$$= 0 - 0 + 3$$

$\therefore \quad p(0) = 3.$ **उत्तर**

(ii) $p(x) = 5x - 4x^2 + 3, x = -1$

x के स्थान पर (-1) रखने पर,

$$p(-1) = 5(-1) - 4(-1)^2 + 3$$
$$= -5 - 4 + 3$$

$\therefore \quad p(-1) = -6.$ **उत्तर**

(iii) $p(x) = 5x - 4x^2 + 3, x = 2$

x के स्थान पर (2) रखने पर,

$\therefore \quad p(2) = 5 \times 2 - 4(2)^2 + 3$

$= 10 - 16 + 3 = -3.$ **उत्तर**

2. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद के लिए $p(0)$, $p(1)$ और $p(2)$ ज्ञात कीजिए :

(i) $p(y) = y^2 - y + 1$

(ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

(iii) $p(x) = x^3$

(iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$.

हल : (i) $p(y) = y^2 - y + 1$

$$p(0) = (0)^2 - 0 + 1 = 1$$
$$p(1) = 1^2 - 1 + 1$$
$$= 1 - 1 + 1 = 1$$
$$p(2) = (2)^2 - 2 + 1$$
$$= 4 - 2 + 1 = 3$$ **उत्तर**

(ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

$$p(0) = 2 + 0 + 2 \times 0^2 - 0^3$$
$$= 2 + 0 + 0 - 0 = 2$$
$$p(1) = 2 + 1 + 2(1)^2 - (1)^3$$
$$= 2 + 1 + 2 - 1 = 4$$
$$p(2) = 2 + 2 + 2(2)^2 - (2)^3$$
$$= 2 + 2 + 8 - 8 = 4.$$ **उत्तर**

(iii) $p(x) = x^3$

$$p(0) = (0)^3 = 0$$
$$p(1) = (1)^3 = 1$$
$$p(2) = (2)^3 = 8.$$ **उत्तर**

(iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

$$p(x) = x^2 - 1$$
$$p(0) = (0)^2 - 1 = -1$$
$$p(1) = (1)^2 - 1 = 0$$
$$p(2) = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3.$$ **उत्तर**

3. सत्यापित कीजिए कि दिखाए गए मान निम्नलिखित स्थितियों में संगत बहुपद के शून्यक हैं :

(i) $p(x) = 3x + 1; x = -\frac{1}{3}$

(ii) $p(x) = 5x - \pi; x = \frac{4}{5}$

(iii) $p(x) = x^2 - 1; x = 1, -1$

(iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2); x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2; x = 0$

(vi) $p(x) = lx + m; x = -\frac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1; x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(viii) $p(x) = 2x + 1; x = \frac{1}{2}$

हल : (i) दिया है,

$$p(x) = 3x + 1; x = -\frac{1}{3}$$
$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = 0$$

अत: $-\frac{1}{3}$, $p(x)$ का शून्यक है। **उत्तर**

(ii) दिया है, $p(x) = 5x - \pi; x = \frac{4}{5}$

$$p\left(\frac{4}{5}\right) = 5 \times \frac{4}{5} - \pi = 4 - \pi$$

अत: $\frac{4}{5}$, $p(x)$ का शून्यक नहीं है। **उत्तर**

(iii) दिया है : $p(x) = x^2 - 1; x = 1, -1$

$x = 1$ रखने पर,

$$p(1) = 1^2 - 1 = 0$$

$x = -1$ रखने पर,

$$p(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

अत: $1, -1$; $p(x)$ के शून्यक हैं। **उत्तर**

(iv) दिया है,

$$p(x) = (x+1)(x-2);\ x = -1, 2$$

$x = -1$ रखने पर,

$p(-1) = (-1+1)(-1-2) = 0 \times (-3) = 0$

$x = 2$ रखने पर,

$$p(2) = (2+1)(2-2) = 3 \times 0 = 0$$

अत: -1 और 2 पद $p(x)$ के शून्यक हैं। **उत्तर**

(v) दिया है, $p(x) = x^2;\ x = 0$

$x = 0$ रखने पर, $p(0) = (0)^2 = 0$

अत: 0 पद $p(x)$ का शून्यक है। **उत्तर**

(vi) दिया है, $p(x) = lx + m;\ x = -\frac{m}{l}$

$x = -\frac{m}{l}$ रखने पर

$$p\left(-\frac{m}{l}\right) = l \times \left(-\frac{m}{l}\right) + m = 0$$

$\Rightarrow -\frac{m}{l}$ पद $p(x)$ का शून्यक है। **उत्तर**

(vii) दिया है, $p(x) = 3x^2 - 1;\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ रखने पर,

$$p\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3 \times \frac{1}{3} - 1 = 0$$

$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ रखने पर,

$$p\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 3 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1 = 3 \times \frac{4}{3} - 1 = 3$$

अत: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ पद $p(x)$ का शून्यक है किन्तु $\frac{2}{\sqrt{3}}$ पद $p(x)$ का शून्यक नहीं है। **उत्तर**

(viii) दिया है, $p(x) = 2x + 1;\ x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ रखने पर,

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$$

अत: $\frac{1}{2}$ पद $p(x)$ का शून्यक नहीं है। **उत्तर**

4. निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में बहुपद का शून्यक ज्ञात कीजिए :

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$

(iii) $p(x) = 2x + 5$ (iv) $p(x) = 3x - 2$

(v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax;\ a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d;\ c \neq 0$, c, d वास्तविक संख्याएँ हैं।

हल : (i) $p(x) = x + 5$

$p(x) = 0 \therefore 0 = x + 5 \Rightarrow x = -5$

अत: बहुपद $x + 5$ का शून्यक $= -5$ है। **उत्तर**

(ii) $p(x) = x - 5$

हमें ज्ञात है : $p(x) = 0 \therefore x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

अत: बहुपद $x - 5$ का शून्यक $= 5$ **उत्तर**

(iii) $p(x) = 2x + 5$

$p(x) = 0 \therefore 2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

अत: $p(x)$ का शून्यक $= -\frac{5}{2}$ है। **उत्तर**

(iv) $p(x) = 3x - 2$

$p(x) = 0$

$\therefore 3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

अत: $p(x)$ का शून्यक $= \frac{2}{3}$ है। **उत्तर**

(v) $p(x) = 3x$

$p(x) = 0 \therefore 3x = 0 \Rightarrow x = 0$

अत: बहुपद $3x$ का शून्यक $= 0$ है। **उत्तर**

(vi) $p(x) = ax;\ a \neq 0$

$p(x) = 0 \therefore ax = 0 \Rightarrow x = 0$

बहुपद ax का शून्यक $= 0$ है। **उत्तर**

(vii) $p(x) = cx + d;\ c \neq 0, c, d$

$p(x) = 0$

$\therefore\ cx + d = 0 \Rightarrow cx = -d \Rightarrow x = -\dfrac{d}{c}$

$\therefore\ p(x)$ का शून्यक $= -\dfrac{d}{c}$ है। **उत्तर**

प्रश्नावली 2·3

1. बताइए कि निम्नलिखित बहुपदों में से किस बहुपद का एक गुणनखण्ड $x + 1$ है :

(i) $x^3 + x^2 + x + 1$

(ii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(iii) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

(iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

हल : (i) माना $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$(x + 1), p(x)$ का गुणनखण्ड होगा यदि $p(-1) = 0$.

$\therefore\ p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$
$= -1 + 1 - 1 + 1$
$p(1) = 0$

अत: $(x + 1), x^3 + x^2 + x + 1$ का गुणनखण्ड है। **उत्तर**

(ii) माना $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$(x + 1), p(x)$ का गुणनखण्ड होगा यदि $p(-1) = 0$.

$\therefore\ p(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$
$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$

अत: $(x + 1)$, बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है। **उत्तर**

(iii) माना $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$

$(x + 1), p(x)$ का गुणनखण्ड होगा यदि $p(-1) = 0$.

$\therefore\ p(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1$
$= 1 - 3 + 3 - 1 + 1 = 1$
$\Rightarrow 1 \neq 0$

अत: $(x + 1)$, बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है। **उत्तर**

(iv) माना $p(x) = x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$

$(x + 1), p(x)$ का गुणनखण्ड होगा यदि $p(-1) = 0$

$\therefore\ p(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (2 + \sqrt{2})(-1) + \sqrt{2}$

$= -1 - 1 + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \neq 0$

अत: $(x + 1)$, बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है। **उत्तर**

2. गुणनखण्ड प्रमेय लागू करके बताइए कि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $g(x), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है या नहीं :

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1,\ g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,\ g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6,\ g(x) = x - 3.$

हल : (i) यदि $g(x) = x + 1, p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1$ का एक गुणनखण्ड है, तो भाग देने पर शेषफल शून्य होगा

$\therefore\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

x के स्थान पर (-1) रखने पर,

$p(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 2(-1) - 1$
$= -2 + 1 + 2 - 1 = 0$

$\therefore\ g(x), p(x)$ का गुणनखण्ड है। **उत्तर**

(ii) यदि $g(x) = x + 2, p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ का गुणनखण्ड है, तो भाग देने पर शेषफल शून्य होगा।

$\therefore\ x + 2 = 0 \Rightarrow x - 2$

x के स्थान पर (-2) रखने पर,

$p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 1$
$= -8 + 12 - 6 + 1 = -1 \neq 0$

$\therefore\ g(x), p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं है।**उत्तर**

(iii) यह सिद्ध करने के लिए कि $g(x) = x - 3, p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ का एक गुणनखण्ड है, तो भाग देने पर शेषफल शून्य होगा।

$\therefore\ x - 3 = 0$
$\Rightarrow\ x = 3$

अब, $p(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + 3 + 6$
$= 27 - 36 + 3 + 6 = 0$

$\therefore\ g(x), p(x)$ का गुणनखण्ड है। **उत्तर**

3. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में $(x - 1), p(x)$ का एक गुणनखण्ड हो :

(i) $p(x) = x^2 + x + k$ **(ii)** $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ **(iv)** $p(x) = kx^2 - 3x + k.$

हल : (i) यदि $(x - 1), p(x) = x^2 + x + k$ का एक गुणनखण्ड है, तो भाग देने पर शेषफल शून्य होगा।

$\therefore\ x - 1 = 0$
$\Rightarrow\ x = 1$
$\therefore\ p(1) = 1^2 + 1 + k$
$\Rightarrow\ 0 = 2 + k \Rightarrow k = -2.$ **उत्तर**

(ii) यदि $(x - 1), p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$ का एक गुणनखण्ड है, तो भाग देने पर शेषफल शून्य होगा।

$\therefore\ x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1$

$\therefore \quad p(1) = 2(1)^2 + k(1) + \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad 0 = 2 + k + \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad k = -(2 + \sqrt{2})$ **उत्तर**

(iii) यदि $(x - 1)$, $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ का एक गुणनखण्ड है, तो भाग देने पर शेषफल शून्य होगा।

$\therefore \quad x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1$

$\therefore \quad p(1) = k(1)^2 - \sqrt{2}(1) + 1$

$\Rightarrow \quad 0 = k - \sqrt{2} + 1$

$\Rightarrow \quad k = \sqrt{2} - 1.$ **उत्तर**

(iv) यदि $(x - 1)$, $p(x) = kx^2 - 3x + k$ का एक गुणनखण्ड है, तो भाग देने पर शेषफल शून्य होगा।

$\therefore \quad x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1$

$\therefore \quad p(1) = k(1)^2 - 3(1) + k$

$\Rightarrow \quad 0 = k - 3 + k$

$\Rightarrow \quad 2k = 3$

$k = \frac{3}{2}$ **उत्तर**

4. गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :

(i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$.

हल : (i) $12x^2 - 7x + 1$

$= 12x^2 - 4x - 3x + 1$

$= 4x(3x - 1) - 1(3x - 1)$

$= (4x - 1)(3x - 1).$ **उत्तर**

(ii) $2x^2 + 7x + 3$

$= 2x^2 + x + 6x + 3$

$= x(2x + 1) + 3(2x + 1)$

$= (2x + 1)(x + 3).$ **उत्तर**

(iii) $6x^2 + 5x - 6$

$= 6x^2 + 9x - 4x - 6$

$= 3x(2x + 3) - 2(2x + 3)$

$= (2x + 3)(3x - 2).$ **उत्तर**

(iv) $3x^2 - x - 4$

$= 3x^2 - 4x + 3x - 4$

$= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$

$= (3x - 4)(x + 1).$ **उत्तर**

5. गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए :

(i) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

(iii) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(iv) $2y^3 + y^2 - 2y - 1$.

हल : (i) माना $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

स्थिरांक + 2 के गुणनखण्ड ± 1, ± 2 हैं।

$x = 1$ रखने पर, $f(1) = 1^3 - 2(1)^2 - 1 + 2$

$= 1 - 2 - 1 + 2 = 0$

$x = 1$ रखने पर व्यंजक का मान शून्य हो जाता है।

अत: $(x - 1)$, $f(x)$ एक गुणनखण्ड है।

$x^3 - 2x^2 - x + 2$

$= x^3 - x^2 - x^2 - x + 2$

$= x^2(x - 1) - x^2 + x - 2x + 2$

$= x^2(x - 1) - x(x - 1) - 2(x - 1)$

$= (x - 1)(x^2 - x - 2)$

$= (x - 1)[(x^2 + x - 2x - 2)]$

$= (x - 1)[x(x + 1) - 2(x + 1)]$

$= (x - 1)(x + 1)(x - 2)$ **उत्तर**

(ii) माना $p(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

– 5 के सभी गुणनखण्ड ± 1, ± 5 हो सकते हैं।

$x = -1$ रखने पर,

$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5$

$= -1 - 3 + 9 - 5$

$\therefore \quad p(-1) = 0$

अत: $(x + 1)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$x^3 - 3x^2 - 9x - 5$

$= x^3 + x^2 - 4x^2 - 9x - 5$

$= x^2(x + 1) - 4x^2 - 4x - 5x - 5$

$= x^2(x + 1) - 4x(x + 1) - 5(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 - 4x - 5)$

$= (x + 1)[x^2 + x - 5x - 5]$

$= (x + 1)[x(x + 1) - 5(x + 1)]$

$= (x + 1)(x + 1)(x - 5)$ **उत्तर**

(iii) मान $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

+ 20 के गुणनखण्ड हैं।

± 1, ± 2, ± 4, ± 5, ± 10 तथा ± 20.

x का मान – 2 रखने पर पाते हैं :

$p(-2) = (-2)^3 + 13(-2)^2 + 32(-2) + 20$

$= -8 + 52 - 64 + 20 = 0$

$\therefore$ $(x + 2)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

$= x^3 + 2x^2 + 11x^2 + 32x + 20$

$= x^2(x + 2) + 11x^2 + 22x + 10x + 20$

$= x^2(x + 2) + 11x(x + 2) + 10(x + 2)$

$= (x + 2)(x^2 + 11x + 10)$

$= (x + 2)(x^2 + x + 10x + 10)$

$= (x+2)[x(x+1)+10(x+1)]$

$= (x+2)(x+1)(x+10).$ **उत्तर**

(iv) माना $p(y) = 2y^3 + y^2 - 2y - 1$

-1 के सभी गुणनखण्ड ± 1 हैं।

व्यंजक में y का मान 1 रखने पर,

$p(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 2(1) - 1$

$= 2 + 1 - 2 - 1 = 0$

अत: $(y-1)$, $p(y)$ का एक गुणनखण्ड है।

अब $y - 1$ का $p(y)$ में भाग देने पर,

$$\begin{array}{r|l} & 2y^2+3y+1 \\ \hline y-1 & 2y^3+y^2-2y-1 \\ & 2y^3-2y^2 \\ & -\quad + \\ \hline & 3y^2-2y \\ & 3y^2-3y \\ & -\quad + \\ \hline & y-1 \\ & y-1 \\ & -\quad + \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore \quad p(y) = (y-1)(2y^2+3y+1)$

$= (y-1)(2y^2+2y+y+1)$

$= (y-1)[2y(y+1)+1(y+1)]$

$= (y-1)(y+1)(2y+1).$ **उत्तर**

प्रश्नावली 2·4

1. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके निम्नलिखित के गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $(x+4)(x+10)$ (ii) $(x+8)(x-10)$

(iii) $(3x+4)(3x-5)$

(iv) $\left(y^2+\frac{3}{2}\right)\left(y^2-\frac{3}{2}\right)$

(v) $(3-2x)(3+2x)$.

हल : (i) $(x+4)(x+10)$

सर्वसमिका

$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

$= x^2+(4+10)x+10\times 4$

$= x^2+14x+40.$ **उत्तर**

(ii) $(x+8)(x-10)$

सर्वसमिका

$[(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab]$

$= x^2+(8-10)x+8\times(-10)$

$= x^2-2x-80.$ **उत्तर**

(iii) $(3x+4)(3x-5) = 3x(3x-5)+4(3x-5)$

$= 9x^2-15x+12x-20$

$= 9x^2-3x-20.$ **उत्तर**

(iv) $\left(y^2+\frac{3}{2}\right)\left(y^2-\frac{3}{2}\right)$

सर्वसमिका $(a+b)(a-b) = (a)^2-(b)^2$ से

$= (y^2)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = y^4-\frac{9}{4}$ **उत्तर**

(v) सर्वसमिका $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$ से

$(3-2x)(3+2x) = (3)^2-(2x)^2$

$= 9-4x^2.$ **उत्तर**

2. सीधे गुणा किए बिना निम्नलिखित गुणनफलों के मान ज्ञात कीजिए :

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96.

हल : (i) सर्वसमिका

$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)+ab$

$103\times 107 = (100+3)(100+7)$

$= (100)^2+(3+7)(100)+3\times 7$

$= 10000+1000+21$

$= 11021.$ **उत्तर**

(ii) सर्वसमिका

$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)+ab$

$95\times 96 = (100-5)(100-4)$

$= (100)^2+(-5-4)(100)+(-5)\times(-4)$

$= 10000-900+20 = 9120.$ **उत्तर**

(iii) सर्वसमिका $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

$104\times 96 = (100+4)(100-4)$

$= (100)^2-(4)^2$

$= 10000-16 = 9984.$ **उत्तर**

3. उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके निम्नलिखित के गुणनखण्ड कीजिए :

(i) $9x^2+6xy+y^2$ (ii) $4y^2-4y+1$

(iii) $x^2 - \frac{y^2}{100}$

हल : (i) $9x^2 + 6xy + y^2$

सर्वसमिका

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$= (3x)^2 + 2 \times 3x \times y + (y)^2$

$= (3x + y)^2$. **उत्तर**

(ii) $4y^2 - 4y + 1$

सर्वसमिका $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$= (2y)^2 - 2 \times 2y \times 1 + (1)^2$

$= (2y - 1)^2$. **उत्तर**

(iii) $x^2 - \frac{y^2}{100} = (x)^2 - \left(\frac{y}{10}\right)^2$

[सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ से]

$= \left(x + \frac{y}{10}\right)\left(x - \frac{y}{10}\right)$ **उत्तर**

4. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए :

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ **(ii)** $(2x - y + z)^2$

(iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$ **(iv)** $(3a - 7b - c)^2$

(v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ **(vi)** $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

हल : (i) $(x + 2y + 4z)^2$

सर्वसमिका $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ से

$= (x)^2 + (2y)^2 + (4z)^2 + 2(x)(2y) + 2(2y)(4z) + 2(4z)(x)$

$= x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 4xy + 16yz + 8zx$. **उत्तर**

(ii) $(2x - y + z)^2$

सर्वसमिका $(x + y + z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz + 2zx$

$= (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(2x)$

$= 4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$. **उत्तर**

(iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

सर्वसमिका $(x + y + z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz + 2zx$

$= (-2x)^2 + (3y)^2 + (2z)^2 + 2(-2x)(3y) + 2(3y)(2z) + 2(2z)(-2x)$

$= 4x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12xy + 12yz - 8zx$. **उत्तर**

(iv) $(3a - 7b - c)^2$

सर्वसमिका $(x + y + z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz + 2zx$

$= (3a)^2 + (-7b)^2 + (-c)^2 + 2(3a)(-7b) + 2(-7b)(-c) + 2(-c)(3a)$

$= 9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ca$. **उत्तर**

(v) $(-2x + 5y - 3z)^2$

सर्वसमिका $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

$= (-2x)^2 + (5y)^2 + (-3z)^2 + 2(-2x)(5y) + 2(5y)(-3z) + 2(-3z)(-2x)$

$= 4x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 20xy - 30yz + 12zx$. **उत्तर**

(vi) $\left[\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right]^2$

सर्वसमिका $(x + y + z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz + 2zx$

$= \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}b\right)^2 + (1)^2 + 2\left(\frac{1}{4}a\right)\left(-\frac{1}{2}b\right) + 2\left(-\frac{1}{2}b\right)(1) + (2)\left(\frac{1}{4}a\right)$

$= \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 1 - \frac{1}{4}ab - b + \frac{1}{2}a$. **उत्तर**

5. गुणनखण्ड कीजिए :

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

हल : (i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

$= (2x)^2 + (3y)^2 + (-4z)^2 + 2(2x)(3y) + 2(3y)(-4z) + 2(2x)(-4z)$

सर्वसमिका [$\because x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = (x + y + z)^2$] से

$= [2x + 3y + (-4z)]^2$

$= (2x + 3y - 4z)^2$. **उत्तर**

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

सर्वसमिका $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

$= (\sqrt{2}x)^2 + (-y)^2 + (-2\sqrt{2}z)^2 + 2(\sqrt{2}x)(-y) + 2(-y)(-2\sqrt{2}z) + 2(\sqrt{2}x)(-2\sqrt{2}z)$

$= [\sqrt{2}x + (-y) + (-2\sqrt{2}z)]^2$

$= (\sqrt{2}x - y - 2\sqrt{2}z)^2$. उत्तर

6. निम्नलिखित घनों को प्रसारित रूप में लिखो :

(i) $(2x+1)^3$ **(ii)** $(2a-3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x+1\right]^3$ **(iv)** $\left[x-\frac{2}{3}y\right]^3$

हल : (i) सर्वसमिका

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$ से

$(2x+1)^3 = (2x)^3 + (1)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2$

$= 8x^3 + 1 + 12x^2 + 6x$

$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$. उत्तर

(ii) सर्वसमिका

$(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ से

$(2a-3b)^3 = (2a)^3 - (3b)^3 - 3(2a)^2(3b) + 3(2a)(3b)^2$

$= 8a^3 - 27b^3 - 36a^2b + 54ab^2$

$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$. उत्तर

(iii) सर्वसमिका

$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$

$$\left[\frac{3}{2}x+1\right]^3 = \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + (1)^3 + 3\left(\frac{3}{2}x\right)^2(1) + 3\left(\frac{3}{2}x\right)(1)^2$$

$$= \frac{27}{8}x^3 + 1 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x$$

$$= \frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1.$$ उत्तर

(iv) सर्वसमिका

$(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$

$$\left[x-\frac{2}{3}y\right]^3 = (x)^3 - \left(\frac{2}{3}y\right)^3 - 3(x)^2\left(\frac{2}{3}y\right) + 3(x)\left(\frac{2}{3}y\right)^2$$

$$= x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}y^2x$$

$$= x^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2 - \frac{8}{27}y^3.$$ उत्तर

7. उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(99)^3$ **(ii)** $(102)^3$ **(iii)** $(998)^3$.

हल : (i) सर्वसमिका

$(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$ से

$\therefore (99)^3 = (100-1)^3$

$= (100)^3 - (1)^3 - 3 \times 100 \times 1(100-1)$

$= 1000000 - 1 - 300(99)$

$= 1000000 - 1 - 29700$

$= 970299$. उत्तर

(ii) सर्वसमिका

$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ से

$(102)^3 = (100+2)^3$

$= (100)^3 + (2)^3 + 3(100)(2)(100+2)$

$= 1000000 + 8 + 600 \times 102$

$= 1000000 + 8 + 61200$

$= 1061208$. उत्तर

(iii) सर्वसमिका

$(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$ से

$(998)^3 = (1000-2)^3$

$= (1000)^3 - (2)^3 - 3 \times 1000 \times 2(1000-2)$

$= 1000000000 - 8 - 6000 \times 998$

$= 1000000000 - 8 - 5988000$

$= 994011992$. उत्तर

8. निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखण्डन कीजिए :

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

(ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

हल : (i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$

$= 8a^3 + b^3 + 6ab(2a+b)$

$= (2a)^3 + b^3 + 3(2a)(b)(2a+b)$

$= (2a+b)^3$

$= (2a+b)(2a+b)(2a+b)$. उत्तर

(ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

$= 8a^3 - b^3 - 6ab(2a-b)$

$= (2a)^3 - b^3 - 3(2a)(b)(2a-b)$

$= (2a-b)^3$

$= (2a-b)(2a-b)(2a-b)$. उत्तर

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$
$= 27 - 125a^3 - 45a(3 - 5a)$
$= (3)^3 - (5a)^3 - 3 \times 3 \times 5a(3 - 5a)$
$= (3 - 5a)^3$
$= (3 - 5a)(3 - 5a)(3 - 5a).$ **उत्तर**

(iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$
$= 64a^3 - 27b^3 - 36ab(4a - 3b)$
$= (4a)^3 - (3b)^3 - 3 \times 4a \times 3b(4a - 3b)$
$= (4a - 3b)^3$
$= (4a - 3b)(4a - 3b)(4a - 3b).$ **उत्तर**

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

$= 27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{3p}{2}\left(3p - \frac{1}{6}\right)$

$= (3p)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 3 \times 3p \times \frac{1}{6}\left(3p - \frac{1}{6}\right)$

$= \left(3p - \frac{1}{6}\right)^3$

$= \left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right)\left(3p - \frac{1}{6}\right).$ **उत्तर**

9. सत्यापित कीजिए :
(i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
(ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

हल : (i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

दायाँ पक्ष $= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
$= x(x^2 - xy + y^2) + y(x^2 - xy + y^2)$
$= x^3 - x^2y + y^2x + yx^2 - xy^2 + y^3$
$= x^3 + y^3 =$ बायाँ पक्ष। **इति सिद्धम्**

(ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
दायाँ पक्ष $= (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
$= x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2)$
$= x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3$
$= x^3 - y^3 =$ बायाँ पक्ष। **इति सिद्धम्**

10. निम्नलिखित में से प्रत्येक का गुणनखण्ड कीजिए : (i) $27y^3 + 125z^3$, (ii) $64m^3 - 343n^3$.

हल : (i) $27y^3 + 125z^3 = (3y)^3 + (5z)^3$
सर्वसमिका
$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ से
$= (3y + 5z)[(3y)^2 - (3y)(5z) + (5z)^2]$
$= (3y + 5z)(9y^2 - 15yz + 25z^2).$ **उत्तर**

(ii) सर्वसमिका
$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ से
$64m^3 - 343n^3 = (4m)^3 - (7n)^3$
$= (4m - 7n)[(4m)^2 + (4m)(7n) + (7n)^2]$
$= (4m - 7n)(16m^2 + 28mn + 49n^2).$ **उत्तर**

11. गुणनखण्ड कीजिए :
$27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz.$

हल : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$
सर्वसमिका
$x^3 + y^3 + z^3(-3xyz) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ से
$= (3x)^3 + (y)^3 + (z)^3 - 3(3x)(y)(z)$
$= (3x + y + z)[(3x)^2 + (y)^2 + (z)^2 - (3x)y - yz - z(3x)]$
$= (3x + y + z)(9x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - yz - 3zx).$
उत्तर

12. सत्यापित कीजिए : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

हल : दायाँ पक्ष $= \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)(x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2)$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$\left[\because a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)\right.$ सर्वसमिका से $\left.\right]$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
$=$ बायाँ पक्ष। **इति सिद्धम्।**

13. यदि $x + y + z = 0$ हो, तो दिखाइए कि $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ है।

हल : दिया है, $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z$
दोनों पक्षों का घन लेने पर,
$(x + y)^3 = (-z)^3$
$\Rightarrow \quad x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = -z^3$
$(\because x + y = -z)$
$\Rightarrow \quad x^3 + y^3 + 3xy(-z) = -z^3$
$\Rightarrow \quad x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz,$ **इति सिद्धम्।**

14. वास्तव में घनों का परिकलन किए बिना निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$.

हल : (i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

माना $x = -12, y = 7, z = 5$

यदि $x + y + z = 0$, तो $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

$\Rightarrow \quad -12 + 7 + 5 = 0$

$\because$ सर्वसमिका $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ से

$\therefore \quad (-12)^3 + (7)^3 + (5)^3 = 3 \times (-12) \times 7 \times 5$

$= -1260.$ **उत्तर**

(ii) $28^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

$28 + (-15) + (-13) = 28 - 28 = 0$

अत: $28^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

$= 3 \times 28 \times (-15) \times (-13)$

$= 16380.$ **उत्तर**

15. नीचे दिए गए आयतों, जिनमें उनके क्षेत्रफल दिए गए हैं, में से प्रत्येक की लम्बाई और चौड़ाई के लिए सम्भव व्यंजक दीजिए :

(i)

क्षेत्रफल : $25a^2 - 35a + 12$

(ii)

क्षेत्रफल : $35y^2 + 13y - 12$

हल : आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्षेत्रफल के गुणनखण्ड होंगे।

(i) आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$$\begin{aligned} \text{क्षेत्रफल} &= 25a^2 - 35a + 12 \\ &= 25a^2 - 15a - 20a + 12 \\ &= 5a(5a - 3) - 4(5a - 3) \\ &= (5a - 3)(5a - 4) \end{aligned}$$

$\therefore$ यदि लम्बाई = $(5a - 3)$ तो चौड़ाई = $(5a - 4)$ इकाई

और यदि लम्बाई = $(5a - 4)$ तो चौड़ाई = $(5a - 3)$ इकाई

उत्तर

(ii)

$$\begin{aligned} \text{क्षेत्रफल} &= 35y^2 + 13y - 12 \\ &= 35y^2 + 28y - 15y - 12 \\ &= 7y(5y + 4) - 3(5y + 4) \\ &= (5y + 4)(7y - 3) \end{aligned}$$

$\therefore$ यदि लम्बाई = $(5y + 4)$ तो चौड़ाई = $(7y - 3)$ इकाई

और यदि लम्बाई = $(7y - 3)$ तो चौड़ाई = $(5y + 4)$ इकाई

उत्तर

16. घनाभों (cuboids), जिनके आयतन नीचे दिए गए हैं की विमाओं के लिए संभव व्यंजक क्या हैं ?

(i)

आयतन : $3x^2 - 12x$

(ii)

आयतन : $12ky^2 + 8ky - 20k$

हल : संभवत: घनाभों की भुजाएँ आयतन के गुणनखण्ड होंगे।

घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

(i) आयतन = $3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$

$= 3 \times x \times (x - 4)$

अत: संभवत: घनाभ की भुजाएँ क्रमश: 3, x और $(x - 4)$ इकाई हैं। **उत्तर**

(ii)

$$\begin{aligned} \text{आयतन} &= 12ky^2 + 8ky - 20k \\ &= 4k(3y^2 + 2y - 5) \\ &= 4k[3y^2 + 5y - 3y - 5] \\ &= 4k[y(3y + 5) - 1(3y + 5)] \\ &= 4k(3y + 5)(y - 1) \\ &= 4k \times (3y + 5) \times (y - 1) \end{aligned}$$

अत: सम्भवत: घनाभ की भुजाएँ क्रमश: $4k$, $(3y + 5)$ और $(y - 1)$ हैं। **उत्तर**

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. सत्यापित कीजिए कि 2 और 0 बहुपद $x^2 - 2x$ के शून्यक हैं।

हल :

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 - 2x \\ p(0) &= 0^2 - 2(0) = 0 \\ p(2) &= 2^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0. \end{aligned}$$

दोनों स्थितियों में $p(x) = 0$ है, अत: 0 और 2 इस बहुपद के शून्यक हैं।

प्रश्न 2. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करते हुए $\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) = a^2 - \frac{1}{a^2}$$

$$\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = a^4 - \frac{1}{a^4}$$

$$\left(a^4 - \frac{1}{a^4}\right)\left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right) = a^8 - \frac{1}{a^8}$$

प्रश्न 3. गुणनखण्ड कीजिए— $x^2 - y^2 + 2x + 1$

हल : $x^2 - y^2 + 2x + 1 = (x^2 + 2x + 1) - y^2$
$= (x + 1)^2 - y^2 = (x + 1 - y)(x + 1 + y).$

प्रश्न 4. $(3x + 2y)(3x - 2y)(9x^2 + 4y^2)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : $(3x + 2y)(3x - 2y)(9x^2 + 4y^2)$
$= (9x^2 - 4y^2)(9x^2 + 4y^2) = 81x^4 - 16y^4$

प्रश्न 5. यदि $a + b = - c$ हो तो $a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ का मान c के पदों में लिखिए।

हल : $a + b = - c$
LHS $= a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$
$= (- c)^3 = - c^3.$

प्रश्न 6. बहुपद $\left(z+\frac{3}{4}\right)\left(z+\frac{4}{3}\right)$ को मानक रूप में लिखते हुए इसकी घात भी लिखिए।

हल : $\left(z+\frac{3}{4}\right)\left(z+\frac{4}{3}\right) = z^2+\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\right)z+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}$

$= z^2+\frac{25}{12}z+1$

प्रश्न 7. जाँच कीजिए कि बहुपद $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$ बहुपद $(2t + 1)$ का एक गुणनखंड है।

हल : गुणनखंड प्रमेय से : $t = -\frac{1}{2}$ रखने पर,

$$q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{8}\right)+4\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}-1$$

$$= -\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-1 = 0.$$

अत: $(2t + 1)$ एक गुणनखंड है।

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए कि 5, बहुपद $2x^3 - 7x^2 - 16x + 5$ का एक शून्यक है।

हल : $x = 5$ रखने पर,
$2x^3 - 7x^2 - 16x + 5$
$= 2(125) - 7(25) - 16(5) + 5$
$= 250 - 175 - 80 + 5 = 0$

अत: $(x - 5)$ एक शून्यक है।

प्रश्न 9. k के किस मान के लिए $x^3 + 2x^2 + 5x + k$ का एक गुणनखण्ड $(x + 1)$ है ?

हल : $x = - 1$ रखने पर,
$(- 1)^3 + 2(1) + 5(- 1) + k = - 1 + 2 - 5 + k = 0$
$\Rightarrow$ $k = 4.$

प्रश्न 10. यदि $(x - 3)$ बहुपद $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ का एक गुणनखण्ड है तो $p(3)$ का मान लिखिए।

हल : $p(3) = 27 - 27 + 12 - 12 = 0.$

प्रश्न 11. $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x - y + z)^2.$

प्रश्न 12. उपयुक्त सर्वसमिकाएँ प्रयोग करके, निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए—
(i) $(104)^3$ **(ii) $(996)^3$.**

हल : (i) $(104)^3 = (100 + 4)^3$
$= 100^3 + 3(100)^2(4) + 3(100)(4)^2 + 4^3$
$= 1000000 + 120000 + 4800 + 64 = 1124864$

(ii) $(996)^3$
$(1000 - 1)^3 = 1000^3 - 3(1000)^2(1) + 3(1000)(1)^2 - 1^3$
$= 1000000000 - 3000000 + 3000 - 1$
$= 997002999.$

प्रश्न 13. $64x^3 + y^3 + 48x^2y + 12xy^2$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $64x^3 + y^3 + 48x^2y + 12xy^2$
$= (4x)^3 + y^3 + 3(4x)^2y + 3(4x)y^2$
$= (4x + y)^3 = (4x + y)(4x + y)(4x + y).$

प्रश्न 14. $(4a - 2b + 3c)^2$ का प्रसार कीजिए।

हल : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
यहाँ $x = 4a, y = - 2b, z = 3c,$
$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(3c) + 2(3c)(4a)$
$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab - 12bc + 24ac.$

प्रश्न 15. यदि $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 5$ तो $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4$

उत्तर : $\pm 3\sqrt{5}$

प्रश्न 16. प्रदर्शित कीजिए कि बहुपद $x^{10} - 1$ और $x^{11} - 1$ का एक गुणनखण्ड $(x - 1)$ है।

हल : गुणनखंड प्रमेय के अनुसार $x = 1$ रखने पर,
$x^{10} - 1 = 1^{10} - 1 = 0$
$x^{11} - 1 = 1^{11} - 1 = 0$

दोनों ही स्थितियों में शून्य प्राप्त होता है, अत: $(x - 1)$ दोनों बहुपदों का गुणनखंड है।

प्रश्न 17. व्यंजक $x^8 - y^8$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $x^8 - y^8 = (x^4)^2 - (y^4)^2$
$= (x^4 - y^4)(x^4 + y^4)$
$= \{(x^2)^2 - (y^2)^2\}(x^4 + y^4)$
$= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$
$= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4).$

प्रश्न 18. बहुपद $x^2 - 11x - 42$ के शून्यक ज्ञात करो।

हल : $x^2 - 11x - 42 = 0$

$x^2 - 14x + 3x - 42 = 0$

$x(x - 14) + 3(x - 14) = 0$

$(x - 14)(x + 3) = 0$

शून्यक, $x = 14, x = -3.$

प्रश्न 19. बहुपद $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 7$ को $x - 1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल : शेषफल प्रमेय से,

$p(1) = 1^4 + 1^3 - 4(1)^2 + 1 + 7$

$= 1 + 1 - 4 + 1 + 7 = 6$

प्रश्न 20. यदि $(x - 1)$, $2x^3 + 3x^2 - 3x + k$ का एक गुणनखण्ड है, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल : गुणनखंड प्रमेय से $p(1) = 0$,

$4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k = 0$

$4 + 3 - 4 + k = 0$

$k = -3$

प्रश्न 21. यदि $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 9$ है तो $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$= 9^3 - 3(9) = 729 - 27 = 702.$

प्रश्न 22. $8x^3 + 27y^3$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि $2x + 3y = 18$ तथा $xy = 12$.

हल : $8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3$

$= (2x + 3y)^3 - 3(2x)(3y)(2x + 3y)$

$= 18^3 - 18(12)(18) = 5832 - 3888 = 1944.$

प्रश्न 23. $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 16\right)^2$ का प्रसार कीजिए।

हल : $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 16\right)^2$

$= \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}b\right)^2 + (16)^2 + 2\left(\frac{1}{4}a\right)\left(-\frac{1}{2}b\right)$

$+ 2\left(-\frac{1}{2}b\right)(16) + 2(16)\left(\frac{1}{4}a\right)$

$= \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} + 256 - \frac{ab}{4} - 16b + 8a.$

प्रश्न 24. यदि $2x - 3 = a$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $8x^3 - 18ax = a^3 + 27$.

हल : दिया है : $2x = a + 3$

बाएँ पक्ष : $8x^3 - 18ax = (2x)^3 - 18ax$

$= (a + 3)^3 - 9a(a + 3)$

$= a^3 + 9a^2 + 27a + 27 - 9a^2 - 27a = a^3 + 27.$

दायाँ पक्ष के बराबर है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 25. बहुपद $p(x) = x^3 + 1$ को $x + 1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल : शेषफल प्रमेय से,

$p(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0.$

प्रश्न 26. प्रत्येक स्थिति में शेषफल ज्ञात कीजिए यदि $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ को निम्न व्यंजकों से विभाजित किया जाए—

(i) $x - 2$ (ii) $x + 2$ (iii) $x + 1/2$

हल : (i) $f(2) = 8 - 12 + 8 - 1 = 3.$

(ii) $f(-2) = -8 - 12 - 8 - 1 = -29.$

(iii) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{3}{4} - 2 - 1 = -\frac{1}{8} - \frac{3}{4} - 3$

$= -\frac{1}{8} - \frac{6}{8} - \frac{24}{8} = -\frac{31}{8}.$

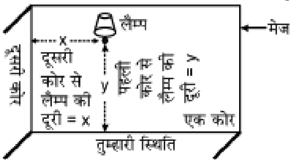
❑ ❑

3 निर्देशांक ज्यामिति

प्रश्नावली 3·1

1. एक अन्य व्यक्ति को आप अपने अध्ययन मेज पर रखे टेबल-लैंप की स्थिति किस तरह बताएँगे ?

हल : माना कि मेज का तल एक समतल है और उस पर रखा हुआ टेबल-लैम्प समतल में स्थित एक बिन्दु है।



मेज की एक कोर के साथ इस प्रकार खड़े हुए कि इस कोर के साथ लगी दूसरी कोर बाएँ हाथ की ओर रहे।

यदि दूसरी कोर से लैम्प की दूरी x यूनिट हो और पहली कोर से लैम्प की दूरी y यूनिट हो, तो लैम्प की स्थिति = (x, y).

उत्तर

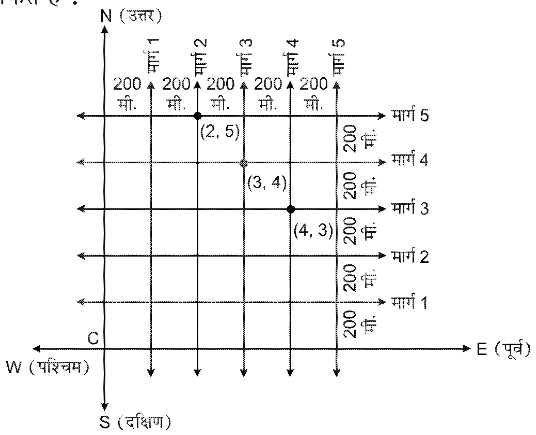
2. (सड़क योजना) : एक नगर में दो मुख्य सड़कें हैं, जो नगर के केन्द्र पर मिलती हैं। ये दो सड़कें उत्तर-दक्षिण की दिशा और पूर्व-पश्चिम की दिशा में हैं। नगर की अन्य सभी सड़कें इन मुख्य सड़कों के समान्तर परस्पर 200 मीटर की दूरी पर हैं। प्रत्येक दिशा में लगभग पाँच सड़कें हैं। 1 सेंटीमीटर = 200 मीटर का पैमाना लेकर अपनी नोट बुक में नगर का एक मॉडल बनाइए। सड़कों को एकल रेखाओं से निरूपित कीजिए।

आपके मॉडल में एक-दूसरे को काटती हुई अनेक क्रॉस-स्ट्रीट (चौराहे) हो सकती हैं। एक विशेष क्रॉस-स्ट्रीट दो सड़कों से बनी है, जिनमें से एक उत्तर-दक्षिण दिशा में जाती है और दूसरी पूर्व-पश्चिम की दिशा में। प्रत्येक क्रॉस-स्ट्रीट का निर्देशन इस प्रकार किया जाता है : यदि दूसरी सड़क उत्तर-दक्षिण दिशा में जाती है और पाँचवीं सड़क पूर्व-पश्चिम दिशा में जाती है और ये एक क्रॉसिंग पर मिलती हैं, तब इसे हम क्रॉस-स्ट्रीट (2, 5) कहेंगे। इसी परम्परा से यह ज्ञात कीजिए कि :

(i) कितनी क्रॉस-स्ट्रीटों को (4, 3) माना जा सकता है ?

(ii) कितनी क्रॉस-स्ट्रीटों को (3, 4) माना जा सकता है ?

हल : मार्ग की योजना की आकृति निम्न प्रकार बना सकते हैं :



दोनों ही क्रॉस मार्ग आकृति में दिखाये गये हैं।

(i) (4, 3) का केवल एक क्रॉस मार्ग माना जा सकता है।

उत्तर

(ii) (3, 4) का केवल एक क्रॉस मार्ग माना जा सकता है।

उत्तर

प्रश्नावली 3·2

1. निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दीजिए :

(i) कार्तीय तल में किसी बिन्दु की स्थिति निर्धारित करने वाली क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर रेखाओं के क्या नाम हैं ?

(ii) इन दो रेखाओं से बने तल के प्रत्येक भाग का नाम बताइए।

(iii) उस बिन्दु का नाम बताइए जहाँ ये दोनों रेखाएँ प्रतिच्छेदित होती हैं।

हल : (i) कार्तीय तल में किसी बिन्दु की स्थिति निर्धारित करने वाली क्षैतिज रेखाओं को ***X*-अक्ष** तथा ऊर्ध्वाधर रेखाओं को ***Y*-अक्ष** कहते हैं।

(ii) *X*-अक्ष और *Y*-अक्ष द्वारा बने प्रत्येक तल को **चतुर्थांश** कहते हैं।

(iii) दोनों अक्ष मूलबिन्दु (0, 0) पर प्रतिच्छेदित होती हैं।

2. आकृति देखकर ज्ञात कीजिए :

(i) B के निर्देशांक

(ii) C के निर्देशांक

(iii) निर्देशांक (– 3, – 5) द्वारा पहचाना गया बिन्दु

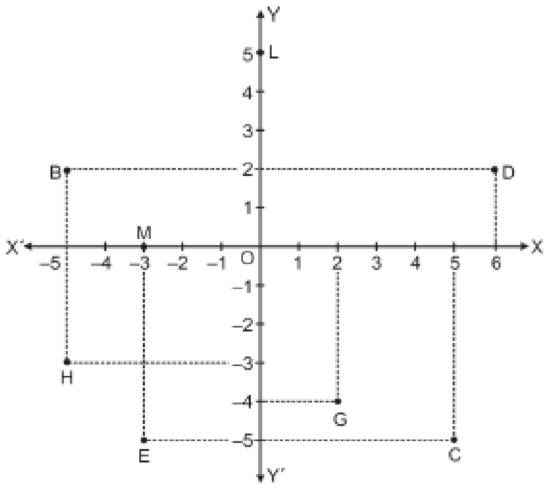
(iv) निर्देशांक (2, – 4) द्वारा पहचाना गया बिन्दु

(v) D का भुज

(vi) बिन्दु H की कोटि

(vii) बिन्दु L के निर्देशांक

(viii) बिन्दु M के निर्देशांक



हल : चित्र से स्पष्ट है कि :

(i) B के निर्देशांक (– 5, 2) हैं।

(ii) C के निर्देशांक (5, – 5) हैं।

(iii) निर्देशांक (– 3, – 5) बिन्दु E को दर्शाता है।

(iv) निर्देशांक (2, – 4) बिन्दु G को दर्शाता है।

(v) बिन्दु D का भुज 6 है।

(vi) बिन्दु H की कोटि – 3 है।

(vii) बिन्दु L के निर्देशांक (0, 5) हैं।

(viii) बिन्दु M के निर्देशांक (– 3, 0) हैं।

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. निर्देशांक (– 5, 6) में 6 किस अक्ष से दूरी है ?
हल : x-अक्ष।

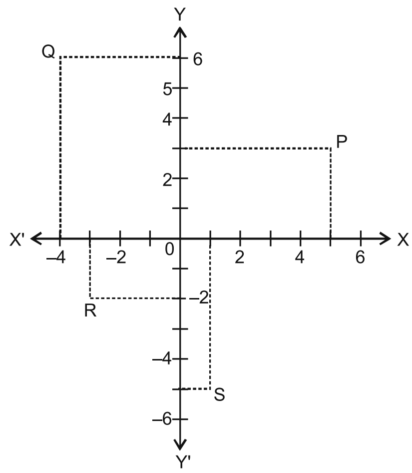
प्रश्न 2. निर्देशांक (2, – 3) में 2 किस अक्ष से दूरी है ?
हल : y-अक्ष।

प्रश्न 3. निर्देशांक (5, 2) में x व y का मान क्या है ?
हल : $x = 5, y = 2.$

प्रश्न 4. A(– 2, 3) किस चतुर्थांश में स्थित है ?
हल : द्वितीय।

प्रश्न 5. अक्षों से किसी बिन्दु की ली गई दूरी के माप को उस बिन्दु का क्या कहा जाता है ?
हल : निर्देशांक।

प्रश्न 6. दिये गये चित्र से बिन्दु P, Q, R व S के निर्देशांक लिखिए।



हल : $P = (5, 3), Q(-4, 6), R = (-3, 2), S = (1, -5).$

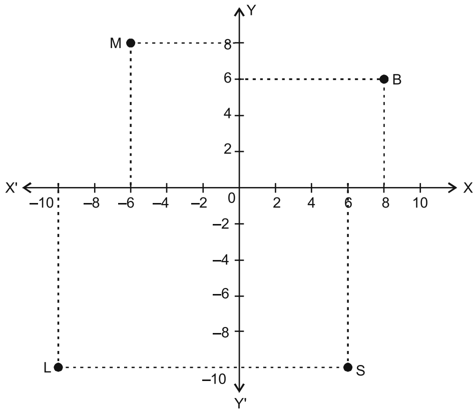
प्रश्न 7. नीचे दी गई आकृति को देखकर निम्नलिखित कथनों को पूरा कीजिए—

(i) बिन्दु B का भुज और कोटि क्रमशः..........और.......... हैं। अतः B के निर्देशांक (.......,.......) हैं।

(ii) बिन्दु M के x-निर्देशांक और y-निर्देशांक क्रमशः .... और ....हैं। अतः M के निर्देशांक (.......,.......) हैं।

(iii) बिन्दु L के x-निर्देशांक और y-निर्देशांक क्रमशः .... और ....हैं। अतः L के निर्देशांक (.......,.......) हैं।

(iv) बिन्दु S के x-निर्देशांक और y-निर्देशांक क्रमशः ....और ....हैं। अतः S के निर्देशांक (.......,.......) हैं।



हल : (i) 8; 6; (8, 6)
(ii) – 6; 8; (– 6, 8)
(iii) – 10; – 10, (– 10, – 10)
(iv) 6; – 10; (6, – 10)

प्रश्न 8. उचित पैमाना लेकर ग्राफ पेपर पर निम्नांकित बिन्दुओं को अंकित कीजिए—

***A* (3, 5); *B*(2, – 3); *C*(– 4, – 4); *D*(0, 5); *E*(– 3, 0); *F*(0, – 7)**

हल : प्रश्न 6 की भाँति स्वयं करें।

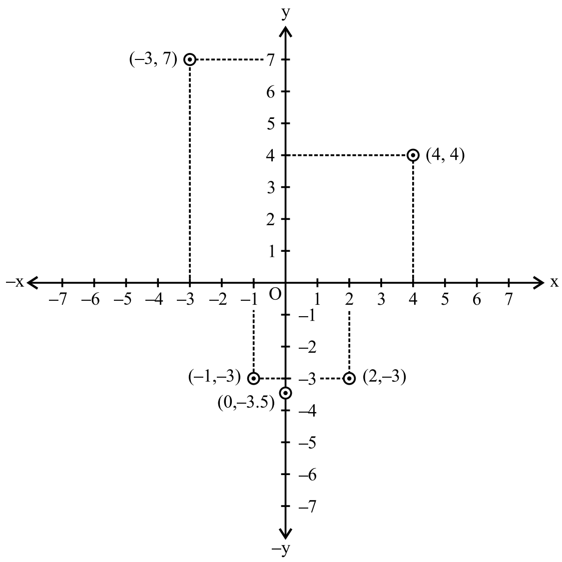
प्रश्न 9. कार्तीय तल में बिन्दुओं (5, 0), (0, 5), (2, 5), (5, 2), (– 3, 5),(– 3, – 5), (5, – 3) और (6, 1) का स्थान निर्धारण कीजिए।

हल : प्रश्न 6 की भाँति स्वयं करें।

प्रश्न 10. निम्नलिखित संख्या-युग्मों को कार्तीय तल के बिन्दुओं के रूप में आलेखित कीजिए। अक्षों पर पैमाना 1 सेंटीमीटर = 1 इकाई लीजिए।

x	– 3	0	– 1	4	2
y	7	– 3.5	– 3	4	– 3

हल :



❑❑

4 दो चरों वाले रैखिक समीकरण

प्रश्नावली 4·1

1. एक नोटबुक की कीमत एक कलम की कीमत से दोगुनी है। इस कथन को निरूपित करने के लिए दो चरों वाला एक रैखिक समीकरण लिखिए।

हल : माना एक नोटबुक की कीमत $= x$

तथा एक कलम की कीमत $= y$

प्रश्नानुसार,

नोटबुक की कीमत $= 2 \times$ कलम की कीमत

$\therefore$ रैखिक समीकरण, $x = 2y$ या $x - 2y = 0$. **उत्तर**

2. निम्नलिखित रैखिक समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त कीजिए और प्रत्येक स्थिति में a, b और c के मान बताइए :

(i) $2x + 3y = 9{\cdot}3\overline{5}$ **(ii)** $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$

(iii) $-2x + 3y = 6$ **(iv)** $x = 3y$

(v) $2x = -5y$ **(vi)** $3x + 2 = 0$

(vii) $y - 2 = 0$ **(viii)** $5 = 2x.$

हल : (i) समीकरण $2x + 3y = 9{\cdot}3\overline{5}$ का मानक रूप $2x + 3y - 9{\cdot}3\overline{5} = 0$ है।

इसकी तुलना $ax + by + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = 3 \text{ और } c = -9.3\overline{5}.$$

(ii) समीकरण $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ की तुलना $ax + by + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = -\frac{1}{5} \text{ और } c = -10.$$

(iii) समीकरण $-2x + 3y = 6$ का मानक रूप $= -2x + 3y - 6 = 0$ है।

इसकी तुलना $ax + by + c = 0$ से करने पर,

$$a = -2, b = 3, c = -6.$$

(iv) समीकरण $x = 3y$ का मानक रूप $= x - 3y + 0 = 0$ है। इसकी तुलना $ax + by + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = -3, c = 0.$$

(v) समीकरण $2x = -5y$ का मानक रूप $2x + 5y + 0 = 0$ है।

इसकी तुलना $ax + by + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = 5, c = 0$$

(vi) समीकरण $3x + 2 = 0$ का मानक रूप $3x + 0.y + 2 = 0$ है।

इसकी तुलना $ax + by + c = 0$ से करने पर,

$$a = 3, b = 0, c = 2.$$

(vii) समीकरण $y - 2 = 0 \Rightarrow 0.x + y - 2 = 0$ की तुलना $ax + by + c = 0$ से करने पर,

$$a = 0, b = 1 \text{ और } c = -2.$$

(viii) समीकरण $5 = 2x$ को $2x + 0.y - 5 = 0$ के रूप में लिख सकते हैं। इस समीकरण की तुलना $ax + bx + c = 0$ से करने पर, $a = 2, b = 0$ और $c = -5$.

प्रश्नावली 4·2

1. निम्नलिखित विकल्पों में से कौन-सा विकल्प सत्य है, और क्यों ?

$y = 3x + 5$ का

(i) एक अद्वितीय हल है, (ii) केवल दो हल हैं, (iii) अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

हल : (iii) दिया गया समीकरण $y = 3x + 5$

$x = 0$ रखने पर, $y = 3 \times 0 + 5 = 5$

$\therefore$ (0, 5) एक हल है।

$x = 1$ रखने पर, $y = 3 \times 1 + 5 = 8$

$\therefore$ (1, 8) एक और हल है।

$x = 2$ रखने पर, $y = 3 \times 2 + 5 = 6 + 5 = 11$

$\therefore$ (2, 11) भी हल है।

स्पष्ट है कि x के विभिन्न मानों के लिए y के भिन्न-भिन्न मान प्राप्त होते हैं, अत: दिए गए समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। $\therefore$ (iii) सत्य है।

उत्तर

2. निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक समीकरण के चार हल लिखिए :

(i) $2x + y = 7$ **(ii)** $\pi x + y = 9$ **(iii)** $x = 4y.$

हल : (i) दिया गया समीकरण

$$2x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - 2x$$

$x = 0$ रखने पर, $y = 7 - 2 \times 0 = 7$

$x = 1$ रखने पर, $y = 7 - 2 \times 1 = 5$

$x = 2$ रखने पर, $y = 7 - 2 \times 2 = 3$

$x = 3$ रखने पर, $y = 7 - 2 \times 3 = 1$

अत: दिये गये समीकरण के चार हल (0, 7), (1, 5), (2, 3) और (3, 1) हैं। **उत्तर**

(ii) दिया गया समीकरण $\pi x + y = 9$

$\Rightarrow \quad y = 9 - \pi x$

$x = 0$ रखने पर, $y = 9 - \pi \times 0 = 9 - 0 = 9$

$x = 1$ रखने पर, $y = 9 - \pi \times 1 = 9 - \pi$

$x = -1$ रखने पर, $y = 9 - \pi(-1) = 9 + \pi$

$x = \frac{1}{\pi}$ रखने पर, $y = 9 - \pi \times \frac{1}{\pi} = 8$

अत: दिये गये समीकरण के चार हल (0, 9) (1, 9 – π), (– 1, 9 + π) तथा $\left(\frac{1}{\pi}, 8\right)$ हैं। **उत्तर**

(iii) दिया गया समीकरण $x = 4y$ या $y = \frac{x}{4}$

$x = 0$ रखने पर, $y = 0$

$x = 4$ रखने पर, $y = 1$

$x = -4$ रखने पर, $y = -1$

$x = 2$ रखने पर, $y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

अत: दिये गये समीकरण के चार हल (0, 0), (4, 1) (– 4, – 1) तथा $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ हैं। **उत्तर**

3. बताइए कि निम्नलिखित हलों में कौन-कौन समीकरण $x - 2y = 4$ के हल हैं और कौन-कौन हल नहीं हैं :

(i) (0, 2) (ii) (2, 0) (iii) (4, 0)

(iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ (v) (1, 1).

हल : (i) दिया गया समीकरण $x - 2y = 4$ है। (0, 2) के लिए समीकरण में $x = 0$ रखने पर,

$$0 - 2y = 4$$

या $-2y = 4$

या $y = -2 \neq 2$

अत: (0, 2) दिये गये समीकरण का हल नहीं है। **उत्तर**

(ii) (2, 0) के लिए समीकरण में $x = 2$ रखने पर,

$$2 - 2y = 4$$

या $-2y = 4 - 2$

या $-2y = 2$

या $y = -1 \neq 0$

अत: (2, 0) दिये गये समीकरण का हल नहीं है। **उत्तर**

(iii) (4, 0) के लिए समीकरण में $x = 4$ रखने पर,

$$4 - 2y = 4$$

$\therefore \quad y = 0$

अत: (4, 0) दिये गये समीकरण का एक हल है। **उत्तर**

(iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ के लिए समीकरण में $x = \sqrt{2}$ रखने पर,

$$\sqrt{2} - 2y = 4$$

या $2y = \sqrt{2} - 4$

या $y = \frac{\sqrt{2} - 4}{2} \neq 4\sqrt{2}$

अत: $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ दिए गए समीकरण का हल नहीं है। **उत्तर**

(v) (1, 1) के लिए समीकरण में $x = 1$ रखने पर,

$$1 - 2y = 4$$

$$1 - 4 = 2y$$

$$y = \frac{-3}{2} \neq 1$$

अत: (1, 1) दिये गये समीकरण का हल नहीं है। **उत्तर**

4. *k* का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x = 2, y = 1$ समीकरण $2x + 3y = k$ का एक हल है।

हल : यदि $x = 2, y = 1$ समीकरण $2x + 3y = k$ का हल है, तो ये मान समीकरण को सन्तुष्ट करेंगे।

$\therefore \quad 2 \times 2 + 3 \times 1 = k \Rightarrow k = 4 + 3 = 7.$

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. यदि दो अंकों वाली संख्या में इकाई का अंक *b* तथा दहाई का अंक *a* हो तो संख्या लिखिए।

हल : दहाई का अंक $= a \Rightarrow$ मान $= 10a$

इकाई का अंक $= b \Rightarrow$ मान $= b$

अत: संख्या $= 10a + b.$

प्रश्न 2. यदि आपके लिए कोई रैखिक समीकरण दिया गया है, तो उसे कैसे पहचानोगे ? उदाहरण दीजिए।

हल : जिस समीकरण में चर की अधिकतम घात 1 हो, उसे रैखिक समीकरण कहते हैं।

$$2x + 3 = 7$$

यह एक रैखिक समीकरण है।

प्रश्न 3. $y = mx$ प्रकार के समीकरण की रेखा किस बिन्दु से गुजरती है ?

हल : जब $x = 0$, तब

$$y = m \times 0 = 0$$

अत: रेखा मूल बिंदु (0, 0) से गुजरती है।

प्रश्न 4. यदि $x = 3y$ समीकरण में $y = 0$ हो तो उक्त समीकरण किस अक्ष का होगा ?

हल : $y = 0$ रखने पर

$x = 0$

अत: यह y-अक्ष को दर्शाता है।

प्रश्न 5. समीकरण $2y - 3 = 0$ का आलेख किस प्रकार का होगा ? समझाइए।

हल : $2y - 3 = 0 \Rightarrow 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

यह y का एक स्थिर मान है।

अत: इसका आलेख x-अक्ष के समांतर एक सीधी रेखा होगा।

प्रश्न 6. फारेनहाइट को सेल्सियस में परिवर्तित करने वाला रैखिक समीकरण लिखिए।

हल : $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

प्रश्न 7. समीकरण $5y - 3x - 10 = 0$ में y को x के रूप में व्यक्त कीजिए। वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ समीकरण $5y - 3x - 10 = 0$ द्वारा निरूपित y रेखा y-अक्ष को काटती है।

हल : दिया है,

$$5y - 3x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{3}{5}\right)x + 2$$

अब y-अक्ष पर बिंदु के लिए $x = 0$ रखते हैं : $y = 2$

अत: y-अक्ष पर बिंदु = (0, 2).

प्रश्न 8. यदि दो अंकों वाली एक संख्या में इकाई का अंक a तथा दहाई का अंक b हो तो संख्या लिखिए।

हल : दहाई का अंक $= b \Rightarrow 10b$

इकाई का अंक $= a \Rightarrow a$

अत: संख्या $= 10b + a$.

प्रश्न 9. एक संख्या x का दुगुना y से 24 अधिक है। इस कथन को समीकरण में व्यक्त कीजिए।

हल : x का दुगुना $= 2x$

y से 24 अधिक $= y + 24$

अत: समीकरण :

$$2x = y + 24.$$

प्रश्न 10. राम की आयु x वर्ष तथा श्याम की आयु y वर्ष है। पाँच वर्ष पूर्व राम की आयु श्याम की आयु की दुगुनी थी। इस कथन को प्रकट करने वाले समीकरण को $ax + by + c = 0$ के रूप में लिखिए।

हल : पाँच वर्ष पूर्व राम की आयु $= x - 5$

पाँच वर्ष पूर्व राम की आयु $= y - 5$

शर्त के अनुसार,

$$x - 5 = 2(y - 5)$$

$$\Rightarrow \quad x - 5 = 2y - 10$$

$$\Rightarrow \quad x - 2y + 5 = 0.$$

प्रश्न 11. दो संख्याओं का योग 10 और अंतर 4 है, तो उनमें बड़ी संख्या को ज्ञात कीजिए।

संकेत : $x + y = 10$ तथा $x - y = 4$

बड़ी संख्या = 7.

प्रश्न 12. यदि एक भिन्न के अंश और हर में 1 जोड़ते हैं तो भिन्न का मान $\frac{1}{2}$ हो जाता है। इसे समीकरण में कैसे लिखेंगे ?

हल : मान लें भिन्न $= \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{(x+1)}{(y+1)} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad 2x + 2 = y + 1$$

$$\Rightarrow \quad 2x - y + 2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x - y + 1 = 0$$

यही आवश्यक समीकरण है।

प्रश्न 13. निम्नलिखित कथनों को समीकरण के रूप में लिखिए।

(i) यदि किसी संख्या में 9 जोड़ दिया जाए, तो वह 25 के बराबर होती है।

(ii) यदि किसी संख्या में से 15 घटा दिए जाये, तो वह – 5 के बराबर हो जाती है।

(iii) किसी संख्या का 7 गुना, 42 के बराबर होता है।

(iv) किसी संख्या में 5 का भाग देने पर वह 6 बन जाती है।

(v) यदि किसी संख्या के 3 गुने में 6 जोड़ा जाये, तो वह 15 के बराबर हो जाती है।

हल : (i) $x + 9 = 25$ (ii) $x - 15 = -5$

(iii) $7x = 42$ (iv) $\frac{x}{5} = 6$ (v) $3x + 6 = 15$

प्रश्न 14. निम्नलिखित सेल्यिसस को फारेनहाइट में रूपांतरित कीजिए।

(i) 25°C (ii) 35°C (iii) 0°C.

हल : (i) $F = \left(\frac{9}{5} \times 25\right) + 32 = 45 + 32 = 77°F$

(ii) $F = \left(\frac{9}{5} \times 35\right) = 63 + 32 = 95°F$

(iii) $F = 32°F$

प्रश्न 15. यदि $x = 1$, $\frac{4}{x}+\frac{3}{y} = 5$ में y का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $x = 1$ रखने पर,

$$\frac{4}{1}+\frac{3}{y} = 5 \Rightarrow 4+\frac{3}{y} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{3}{y} = 1 \Rightarrow y = 3.$$

प्रश्न 16. निम्नलिखित समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर a, b और c के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $3 + 5y = \pi x$ (ii) $2x + \frac{3}{2} = 1{\cdot}4y$.

हल : (i) $3 + 5y = \pi x$

$\Rightarrow \pi x - 5y - 3 = 0$

$$a = \pi, b = -5, c = -3.$$

(ii) $2x+\frac{3}{2} = 1.4y$

$\Rightarrow 2x - 1.4y + \frac{3}{2} = 0$

$$a = 2, b = -1.4, c = \frac{3}{2}.$$

प्रश्न 17. निम्नलिखित समीकरण के दो हल ज्ञात कीजिए।

(i) $4x + 3y = 12$ (ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

हल : (i) $4x + 3y = 12$

यदि $x = 0 \Rightarrow y = 4$ यदि $y = 0 \Rightarrow x = 3$

अत: (0, 4) तथा (3, 0) दो हल हैं।

(ii) $2x + 5y = 0$

यदि $x = 0 \Rightarrow y = 0$ यदि $x = 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}$

अत: (0, 0) तथा $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ दो हल हैं। इनके अलावा और भी हम सम्भव हैं।

(iii) $3y + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{-4}{3}$

यह x के किसी भी मान के लिए सत्य है।

अत: $\left(0, \frac{-4}{3}\right)$ तथा $\left(1, \frac{-4}{3}\right)$ दो हल हैं।

प्रश्न 18. दो संख्याओं के योग का एक-तिहाई 12 है और उनके अन्तर का एक-तिहाई 2 है तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लें संख्याएँ x और y हैं।

योग,

$$\frac{(x+y)}{3} = 12 \Rightarrow x + y = 36$$

अंतर: $\frac{x-y}{3} = 2 \Rightarrow x - y = 6$

दोनों जोड़ने पर,

$2x = 42 \Rightarrow x = 21 \Rightarrow y = 15.$

संख्याएँ 21 और 15 हैं।

❑ ❑

5 यूक्लिड की ज्यामिति का परिचय

प्रश्नावली 5·1

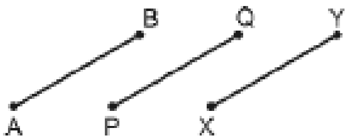
1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से कथन असत्य हैं ? अपने उत्तरों के लिए कारण भी दीजिए :

(i) एक बिन्दु से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।

(ii) दो भिन्न बिन्दुओं से होकर जाने वाली असंख्य रेखाएँ हैं।

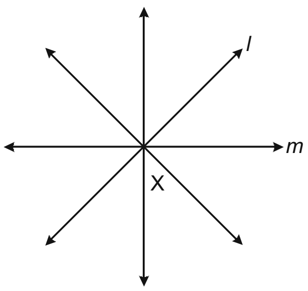
(iii) एक सांत रेखा दोनों ओर अनिश्चित रूप से बढ़ाई जा सकती है।

(iv) यदि दो वृत्त बराबर हैं, तो उनकी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।



(v) आकृति में, यदि $AB = PQ$ और $PQ = XY$ है, तो $AB = XY$ होगा।

हल : (i) असत्य।

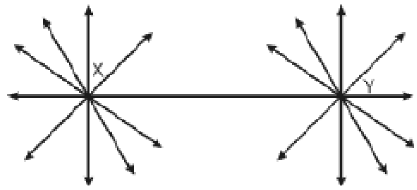


एक कागज पर कोई बिन्दु X लें। पेंसिल व पैमाने से X से जाने वाली कोई रेखा m बनाइये। एक ओर रेखा l, X से गुजरती हुई बनाइये। इसी प्रक्रिया को करते हुए हम जितनी चाहें उतनी रेखाएँ X से बना सकते हैं।

(ii) असत्य।

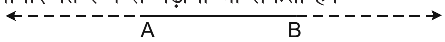
एक कागज पर दो बिन्दु X तथा Y लें। अब कागज को इस प्रकार मोड़े कि कागज बिन्दुओं, X तथा Y से होकर मुड़े। पुनः प्रयास करते हुए कागज को अन्य प्रकार से मोड़े कि मोड़ X-Y बिन्दुओं पर हो। यह असंभव है।

अतः स्पष्ट है कि दो बिन्दुओं से केवल एक रेखा खींची जा सकती है।



(iii) सत्य।

ज्यामिति में सांत रेखा ही रेखाखण्ड कहलाता है। रेखा को सिरों पर तीन बनाकर प्रदर्शित किया जाता है, किन्तु सांत रेखा (रेखाखण्ड) दो बिन्दुओं के मध्य की दूरी होती है जिसे दोनों ओर अनिश्चित रूप से बढ़ाया जा सकता है।



(iv) सत्य।

बराबर (क्षेत्रफल) वाले वृत्त संपाती होते हैं।

अतः उनके केन्द्र से परिधि तक की दूरी बराबर होती है अर्थात् उनकी त्रिज्याऐं बराबर होती हैं।

(v) सत्य।

ऐसी दो भिन्न वस्तुएँ किसी अन्य वस्तु के पूर्णतः बराबर हों, तो वे आपस में भी बराबर होती हैं। अतः दी गई आकृति में $AB = PQ$ और $PQ = XY$, तो $AB = XY$ होगा। अतः दिया हुआ कथन सत्य है।

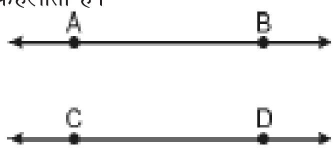
2. निम्नलिखित पदों में से प्रत्येक की परिभाषा दीजिए। क्या इनके लिए कुछ ऐसे पद हैं, जिन्हें परिभाषित करने की आवश्यकता है ? वे क्या हैं और आप इन्हें कैसे परिभाषित करेंगे ?

(i) समांतर रेखाएँ **(ii) लम्ब रेखाएँ**

(iii) रेखाखण्ड **(iv) वृत्त की त्रिज्या**

(v) वर्ग।

हल : (i) समान्तर रेखाएँ : एक ही तल में स्थित इस प्रकार की दो सरल रेखाएँ जो आपस में एक-दूसरे को नहीं काटती हैं, समान्तर रेखाएँ कहलाती हैं।

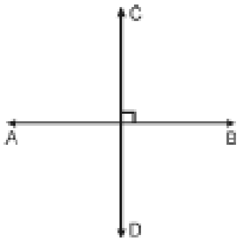


समान्तर रेखाएँ आपस में बराबर दूरी पर रहती हैं अथ.ात् दो समान्तर रेखाओं के प्रत्येक बिन्दु पर लम्बवत् दूरी सदैव बराबर रहती है।

समान्तर रेखाओं के लिए संकेत '||' का प्रयोग किया जाता है जिसका तात्पर्य 'समान्तर' है।

चित्र में रेखा AB, रेखा CD के समान्तर है जिसे $AB \parallel CD$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

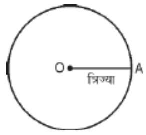
(ii) लम्ब रेखाएँ : एक ही तल में स्थित दो सरल रेखाएँ जो एक-दूसरे के साथ समकोण बनाती हैं। लम्ब रेखाएँ कहलाती हैं। हम लिखते हैं : $AB \perp CD$.



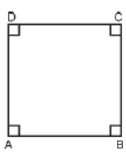
(iii) रेखाखण्ड : सरल रेखा का एक निश्चित भाग जो दो निश्चित बिन्दुओं के मध्य स्थित होता है। रेखाखण्ड कहलाता है। चित्र में AB या BA रेखाखण्ड है।

AB रेखाखण्ड में प्रारम्भिक बिन्दु A और अन्तिम बिन्दु B है।

(iv) वृत्त की त्रिज्या : वृत्त के केन्द्र से वृत्त की परिधि पर स्थित किसी बिन्दु के बीच की दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते हैं। चित्र में OA वृत्त की त्रिज्या है।



(v) वर्ग : वह चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएँ बराबर हों तथा प्रत्येक कोण समकोण हो, वर्ग कहलाता है। चित्र में $ABCD$ वर्ग है।



$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

तथा $AB = BC = CD = DA$.

3. नीचे दी गई दो अभिधारणाओं पर विचार कीजिए:

(i) दो भिन्न बिन्दु A और B दिये रहने पर, एक तीसरा बिन्दु C ऐसा विद्यमान है, जो A और B के बीच स्थित होता है।

(ii) यहाँ कम-से-कम ऐसे तीन बिन्दु विद्यमान हैं कि वे एक रेखा पर स्थित नहीं हैं।

क्या इन अभिधारणाओं में कोई अपरिभाषित शब्द हैं ? क्या ये अभिधारणाएँ अवरोधी हैं ? क्या ये यूक्लिड की अभिधारणाओं से प्राप्त होती हैं ? स्पष्ट कीजिए।

हल : यहाँ पर बहुत सारे अपरिभाषित पद हैं,

(i) दो बिन्दु A तथा B दिये गये हैं, जहाँ बिन्दु C उनके बीच खींची गयी रेखा पर स्थित है।

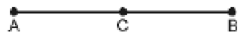
(ii) बिन्दु A तथा B दिये गये हैं। हम एक बिन्दु C ले सकते हैं, जो A तथा B से होकर गुजरती हुई रेखा पर स्थित नहीं है। इस स्थिति में यदि बिन्दुओं A तथा B को C से मिलाया जाता है तो एक त्रिभुज की रचना होती है।

यह अभिगृहीत यूक्लिड के अभिगृहीतों पर आधारित नहीं है। हालाँकि ये अभिगृहीतों का अनुसरण करते हैं, क्योंकि दो दिए हुए विभिन्न बिन्दुओं से केवल एक ही रेखा गुजर सकती है। **उत्तर**

4. यदि दो बिन्दुओं A और B के बीच एक बिन्दु C ऐसा स्थित है कि $AC = BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $AC = \frac{1}{2} AB$ है। एक आकृति खींचकर इसे स्पष्ट कीजिए।

हल : दिया हैं : बिन्दु C, जो बिन्दुओं A तथा B के बीच में इस प्रकार स्थित है कि

$AC = BC.$



दोनों ओर AC जोड़ने पर,

$AC + AC = AC + BC$

या $2AC = AB$

[$\because$ $AC + CB$, AB के बराबर है]

$\therefore$ $AC = \frac{1}{2} AB.$ **उत्तर**

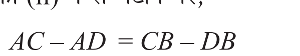
5. प्रश्न 4 में, बिन्दु C रेखाखण्ड AB का मध्य-बिन्दु कहलाता है। सिद्ध कीजिए कि एक रेखाखण्ड का एक और केवल एक ही मध्य-बिन्दु होता है।

हल : माना AB का D एक और मध्य-बिन्दु है।

$\therefore$ $AD = DB$ ...(i)

लेकिन दिया गया है कि C, AB का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore$ $AC = CB$ ...(ii)



समी. (i) को (ii) में से घटाने पर,

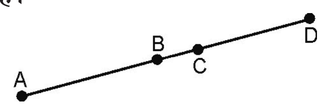
$AC - AD = CB - DB$

या $DC = -DC$

या $2DC = 0 \therefore DC = 0$

अत: C व D सम्पाती हैं। **इति सिद्धम्।**

6. आकृति में, यदि $AC = BD$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $AB = CD$ है।



हल : दिया है : $AC = BD$ ...(i)

तथा $AC = AB + BC$ ...(ii)

[$\because$ बिन्दु B, A तथा C के बीच में स्थित है]

और $BD = BC + CD$ ...(iii)

[$\because$ बिन्दु C, B तथा D के बीच में स्थित है]

AC और BD का मान समीकरण (ii) और (iii) से समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$AB + BC = BC + CD$$

या $AB + BC - BC = BC + CD - BC,$

[दोनों पक्षों में से BC घटाने पर]

अतः $AB = CD.$ **इति सिद्धम्।**

7. यूक्लिड की अभिगृहीतों की सूची में दिया हुआ अभिगृहीत 5 एक सर्वव्यापी सत्य क्यों माना जाता है ? (ध्यान दीजिए कि यह प्रश्न पाँचवीं अभिधारणा से सम्बन्धित नहीं है।)

हल : यह सार्वभौमिक सत्य है कि कोई भी सम्पूर्ण वस्तु अपने किसी भी भाग (अंश) से बड़ी होती है।

अतः यह ''पूर्ण अपने भाग से बड़ा होता है।'' यह सदैव सत्य है।

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. उस भारतीय गणितज्ञ का नाम बताइए जो पाइथागोरस प्रमेय की खोज पहले ही कर चुके थे।

हल : भारतीय गणितज्ञ **बौधायन** ने पाइथागोरस प्रमेय की खोज पाइथागोरस से पहले की थी।

प्रश्न 2. क्या समान्तर रेखाएँ, किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं ? यदि नहीं, तो क्यों ?

हल : नहीं, समांतर रेखाएँ किसी भी बिंदु पर प्रतिच्छेद नहीं करतीं, क्योंकि वे सदैव समान दूरी पर रहती हैं।

प्रश्न 3. यूक्लिड ने ज्यामिति के कौन-कौन से मुख्य बिन्दुओं को अपने शब्दों में परिभाषित किया है ?

हल : यूक्लिड ने ज्यामिति में **बिंदु, रेखा और तल (पृष्ठ)** को अपने शब्दों में परिभाषित किया है।

प्रश्न 4. ज्यामिति किसे कहते हैं ?

हल : ज्यामिति गणितज्ञ की वह शाखा है जिसमें **बिंदु, रेखा, कोण, आकृति और उनके गुणों** का अध्ययन किया जाता है।

प्रश्न 5. भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट प्रथम का ज्यामिति के क्षेत्र में क्या योगदान है ?

हल : आर्यभट्ट प्रथम ने वृत्त की परिधि और व्यास के अनुपात (π) का मान तथा ज्यामिति से संबंधित अनेक सिद्धांत दिए।

प्रश्न 6. रेखा किसे कहते हैं ?

हल : रेखा बिंदुओं का वह समुच्चय है जो **दोनों दिशाओं में अनंत तक फैला होता है** और जिसकी कोई मोटाई नहीं होती।

प्रश्न 7. स्वयंसिद्ध किसे कहते हैं ?

हल : वे कथन जो बिना प्रमाण के सत्य माने जाते हैं, **स्वयंसिद्ध** कहलाते हैं।

प्रश्न 8. ज्यामिति में गणितज्ञों ने कौन-कौन से पदों को अपरिभाषित माना है ?

हल : ज्यामिति में, **बिंदु, रेखा और तल (पृष्ठ)** को अपरिभाषित पद माना गया है।

प्रश्न 9. दो बिन्दुओं से कितनी रेखाएँ गुजर सकती हैं ?

हल : दो बिंदुओं से **केवल एक ही रेखा** गुजर सकती है।

प्रश्न 10. यूक्लिड द्वारा दी गई अभिधारणाओं में से कोई दो अभिधारणाएँ लिखिए।

हल : (1) किसी भी दो बिंदुओं को मिलाकर एक रेखाखंड खींचा जा सकता है।

(2) किसी सीमित रेखाखंड को दोनों ओर अनंत तक बढ़ाया जा सकता है।

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि एक दिये हुए रेखाखण्ड पर एक समबाहु त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

हल : पाठ्यपुस्तक का उदाहरण 2, पृष्ठ 62 देखें।

प्रश्न 12. यदि A, B और C एक रेखा पर स्थित तीन बिन्दु हैं और B बिन्दुओं A और C के बीच स्थित है, तो सिद्ध कीजिए कि AB + BC = AC.

हल : पाठ्यपुस्तक का उदाहरण 1, पृष्ठ 62 देखें।

प्रश्न 13. यूक्लिड ने ज्यामिति के बिन्दु, रेखा और तल (पृष्ठ) के बारे में क्या परिभाषाएँ दी हैं, लिखिए।

हल : बिंदु : जिसका कोई भाग नहीं होता।

रेखा : जिसकी केवल लंबाई होती है, चौड़ाई नहीं।

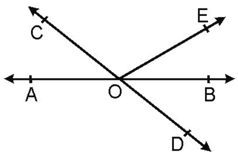
तल (पृष्ठ) : जिसकी केवल लंबाई और चौड़ाई होती है, मोटाई नहीं।

❑❑

6 रेखाएँ और कोण

प्रश्नावली 6·1

1. आकृति में, रेखाएँ *AB* और *CD* बिन्दु *O* पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ है और $\angle BOD = 40°$ है, तो $\angle BOE$ और प्रतिवर्ती $\angle COE$ ज्ञात कीजिए।



हल : $\because$ *OA* तथा *OB* विपरीत किरणें हैं। *OC* रेखा *AB* पर खड़ी है।

$\therefore \quad \angle AOC + \angle COB = 180°$ [रैखिक युग्म]

$\Rightarrow \angle AOC + \angle COE + \angle BOE = 180°$

$[\because \angle COB = \angle COE + \angle BOE]$

$\Rightarrow (\angle AOC + \angle BOE) + \angle COE = 180°$

$\Rightarrow \quad 70° + \angle COE = 180°$

$[\because \angle AOC + \angle BOE = 70°$ (दिया है)$]$

$\Rightarrow \quad \angle COE = 180° - 70° = 110°$

$\therefore$ प्रतिवर्ती $\angle COE = 360° - 110° = 250°$

$\because$ *OC* तथा *OD* विपरीत किरणें हैं। *OE*, *CD* रेखा पर खड़ी है।

$\therefore \quad \angle COE + \angle EOD = 180°$ [रैखिक युग्म]

$\Rightarrow \quad \angle COE + \angle BOE + \angle BOD = 180°$

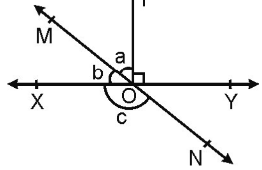
$\Rightarrow \quad 110° + \angle BOE + 40° = 180°$

$[\because \angle COE = 110°, \angle BOD = 40°$ (दिया है)$]$

$\Rightarrow \quad \angle BOE = 180° - 110° - 40° = 30°$

$\therefore \angle BOE = 30°$ तथा प्रतिवर्ती $\angle COE = 250°$. **उत्तर**

2. आकृति में, रेखाएँ *XY* और *MN* बिन्दु *O* पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle POY = 90°$ और $a : b = 2 : 3$ है, तो *c* ज्ञात कीजिए।



हल : $\because a : b = 2 : 3$

तथा $a + b = \angle POX = \angle POY = 90°$

तथा अनुपातों का योग $2 + 3 = 5$

$\therefore \quad a = \frac{2}{5} \times 90° = 2 \times 18° = 36°$

तथा $\quad b = \frac{3}{5} \times 90° = 3 \times 18° = 54°$

$\because$ *OM* और *ON* विपरीत किरणें हैं। इसलिए *MN* एक रेखा है।

$\because$ किरण *OX*, *MN* पर स्थित है, इसलिए

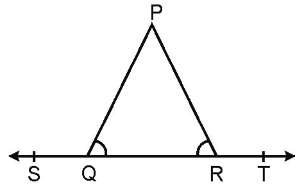
$\angle MOX + \angle XON = 180°,$ [रैखिक युग्म]

$\Rightarrow b + c = 180° \Rightarrow c + 54° = 180°$

$\Rightarrow \quad c = 180° - 54°$

$\therefore \quad c = 126°.$ **उत्तर**

3. आकृति में, यदि $\angle PQR = \angle PRQ$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PQS = \angle PRT$ है।



हल : *QS* और *QR* विपरीत किरणें हैं।

$\because$ *QP*, *SR* रेखा पर स्थित है।

$\therefore \quad \angle PQS + \angle PQR = 180°$ [रैखिक युग्म] ...(i)

पुनः *RQ* और *RT* विपरीत किरणें हैं।

$\because$ *PR*, *QT* रेखा पर स्थित है।

$\therefore \quad \angle PRQ + \angle PRT = 180°$ [रैखिक युग्म] ...(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से,

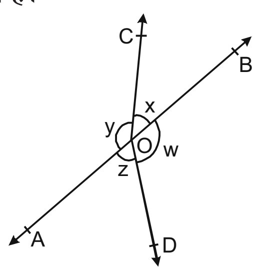
$\angle PQS + \angle PQR = \angle PRQ + \angle PRT$ ...(iii)

$\angle PQR = \angle PRQ,$ [दिया है] ...(iv)

समीकरण (iv) समीकरण (iii) से,

$\angle PQS = \angle PR$ **इति सिद्धम्।**

4. आकृति में, यदि $x + y = w + z$ है, तो सिद्ध कीजिए कि AOB एक रेखा है।



हल : चूँकि एक बिन्दु के चारों ओर के कोणों का योग 360° होता है।

$\therefore (\angle BOC + \angle COA) + (\angle BOD + \angle AOD) = 360°$

$\Rightarrow \quad (x + y) + (w + z) = 360°$

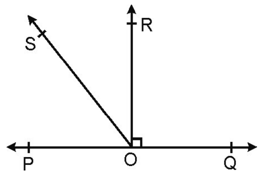
लेकिन $\quad x + y = w + z \quad$ [दिया है]

$\therefore \quad x + y = w + z = \dfrac{360°}{2} = 180°$

इसलिए $\angle BOC$ तथा $\angle COA$, $\angle BOD$ तथा $\angle AOD$ रैखिक युग्म बनाते हैं। परिणाम- स्वरूप OA और OB दो विपरीत किरणें हैं। इसलिए AOB एक सीधी रेखा है। **इति सिद्धम्।**

5. आकृति में, POQ एक रेखा है। किरण OR रेखा PQ पर लम्ब है। किरणों OP और OR के बीच में OS एक अन्य किरण है। सिद्ध कीजिए :

$$\angle ROS = \frac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS).$$



हल : $\because$ OR रेखा PQ पर लम्ब है।

$\therefore \quad \angle POR = \angle ROQ,$

[$\because$ प्रत्येक = 90°]

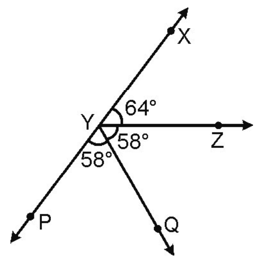
$\Rightarrow \quad \angle POS + \angle ROS = \angle QOS - \angle ROS$

$\Rightarrow \quad 2\angle ROS = \angle QOS - \angle POS$

$\Rightarrow \quad \angle ROS = \dfrac{1}{2}(\angle QOS - \angle POS).$

इति सिद्धम्।

6. यह दिया है कि $\angle XYZ = 64°$ है और XY को बिन्दु P तक बढ़ाया गया है। दी गई सूचना से एक आकृति खींचिए। यदि किरण YQ, $\angle ZYP$ को सम- द्विभाजित करती है, तो $\angle XYQ$ और प्रतिवर्ती $\angle QYP$ के मान ज्ञात कीजिए।



हल : $\because$ XY को बिन्दु P तक बढ़ाया। इसलिए XP एक सीधी रेखा है।

$\because$ YZ, XP पर स्थित है।

$\therefore \quad \angle XYZ + \angle ZYP = 180° \quad$ [रैखिक युग्म]

$\Rightarrow \quad 64° + \angle ZYP = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle ZYP = 180° - 64° = 116°$

$\because$ किरण YQ, $\angle ZYP$ को समद्विभाजित करती है।

$\therefore \quad \angle QYP = \angle ZYQ = \dfrac{116°}{2} = 58°$

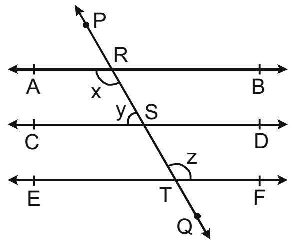
अब $\quad \angle XYQ = \angle XYZ + \angle ZYQ$

$= 64° + 58° = 122°$

$\therefore$ प्रतिवर्ती $\angle QYP = 360° - 58° = 302°$. **उत्तर**

प्रश्नावली 6·2

1. आकृति में, यदि $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$ और $y : z = 3 : 7$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



हल : चूँकि $CD \parallel EF$ तथा तिर्यक् रेखा PQ उनको क्रमशः S तथा T पर काटती है।

$\therefore \quad \angle CST = \angle STF, \quad$ [एकान्तर कोण]

$\Rightarrow \quad 180° - y = z,$

[$\because \angle y + \angle CST = 180°$ रैखिक युग्म]

$\Rightarrow \quad y + z = 180°$

दिया है, $\quad y : z = 3 : 7.$

अतः अनुपातों का योग = 3 + 7 = 10

$\therefore \quad y = \dfrac{3}{10} \times 180°$

$= 3 \times 18° = 54°$

तथा $z = \frac{7}{10} \times 180°$

$= 7 \times 18° = 126°$

$\because$ $AB \parallel CD$ तथा तिर्यक् रेखा PQ, AB व CD को क्रमश: R तथा S पर काटती है।

$\therefore \quad \angle ARS + \angle RSC = 180°,$

[लगातार अभ्यंतर कोण सम्पूरक होते हैं]

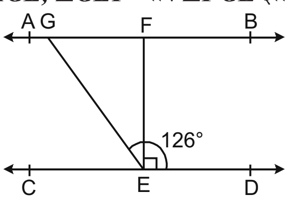
$\Rightarrow \quad x + y = 180°$

$x = 180° - y$

$= 180° - 54° = 126°, \quad [\because y = 54°]$

अत: $x = 126°.$ **उत्तर**

2. आकृति में, यदि $AB \parallel CD$, $EF \perp CD$ और $\angle GED = 126°$ है, तो $\angle AGE$, $\angle GEF$ और $\angle FGE$ ज्ञात कीजिए।



हल : चूँकि $AB \parallel CD$ तथा तिर्यक रेखा GE उनको क्रमश: G तथा E पर काटती है।

$\therefore \quad \angle AGE = \angle GED$ [एकान्तर कोण]

$\Rightarrow \quad \angle AGE = 126°$

[$\because \angle GED = 126°$ (दिया है)]

$\angle GEF = \angle GED - \angle FED$

$= 126° - 90° = 36°$

तथा $\angle FGE = \angle GEC$ [एकान्तर कोण]

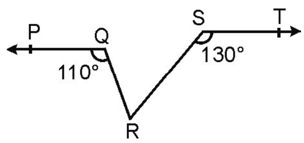
$\Rightarrow \quad \angle FGE = 90° - \angle GEF$

$= 90° - 36° = 54°$

अत:, $\angle AGE = 126°$, $\angle GEF = 36°$ और $\angle FGE = 54°$.

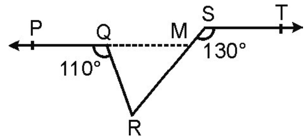
उत्तर

3. आकृति में, यदि $PQ \parallel ST$, $\angle PQR = 110°$ और $\angle RST = 130°$ है, तो $\angle QRS$ ज्ञात कीजिए।



हल : PQ को M बिन्दु पर काटने के लिए SR तक बढ़ाया।

अब $PM \parallel ST$ तथा तिर्यक रेखा SM क्रमश: उनको M तथा R पर काटती है।



$\therefore \quad \angle SMQ = \angle TSM,$ [एकान्तर कोण]

$\Rightarrow \quad \angle SMQ = 130°$

$\Rightarrow \quad \angle QMR = 180° - 130° = 50°$

[$\because \angle SMQ + \angle QMR = 180°$ एकान्तर युग्म]

चूँकि किरण RQ, PM को Q पर काटती है।

$\therefore \quad \angle PQR + \angle RQM = 180°$

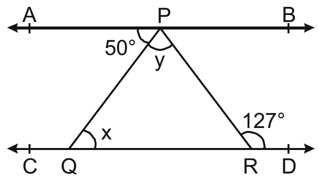
$\Rightarrow \quad 110° + \angle RQM = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle RQM = 180° - 110° = 70°$

$\therefore \quad \angle QRS = 180° - (70° + 50°) = 60°.$

[$\because$ एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है]

4. आकृति में, यदि $AB \parallel CD$, $\angle APQ = 50°$ और $\angle PRD = 127°$ है, तो x और y ज्ञात कीजिए।



हल : $\because$ $AB \parallel CD$ जिन्हें तिर्यक रेखा PQ क्रमश: P तथा Q पर काटती है।

$\therefore \quad \angle PQR = \angle APQ,$ [एकान्तर कोण]

$\Rightarrow \quad x = 50°$ (दिया है)

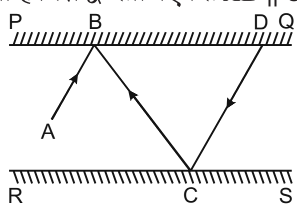
$\angle x + \angle y = \angle PRD$ [बहिष्कोण]

$\Rightarrow \quad 50° + y = 127°$

$\Rightarrow \quad y = 127° - 50° = 77°$

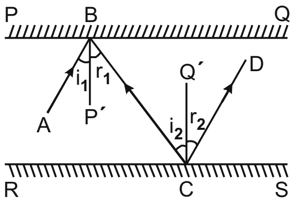
$\therefore \quad$ **$x = 50°$ तथा $y = 77°$.** **उत्तर**

5. दी गई आकृति में PQ और RS दो दर्पण हैं जो एक-दूसरे के समान्तर रखे गए हैं। एक आपतित किरण (Incident Ray) AB, दर्पण PQ से B पर टकराती है और परावर्तित किरण (Reflected Ray) पथ BC पर चलकर दर्पण RS से C पर टकराती है तथा पुन: CD के अनुदिश परावर्तित हो जाती है। सिद्ध कीजिए कि $AB \parallel CD$ है।



हल : दिया है : दर्पण $PQ \parallel$ दर्पण RS

दर्पण PQ पर आपतित किरण AB तथा परावर्तित किरण BC एवं दर्पण RS आपतित किरण BC और परावर्तित किरण CD.



रचना : बिन्दु B पर BP' तथा बिन्दु C पर CQ' लम्ब डाले।

सिद्ध करना है : $AB \parallel CD$

उपपत्ति : $\because$ BP', बिन्दु B पर अभिलम्ब है;

और CQ', बिन्दु C पर अभिलम्ब है;

$\because \quad PQ \parallel RS$

$\therefore$ उक्त तीनों तथ्यों से $BP' \parallel CQ$ और BC तिर्यक रेखा है। **इति सिद्धम्।**

$\therefore \quad \angle P'BC = \angle Q'CB$ एकान्तर कोण

$\therefore \quad \angle r_1 = \angle i_2$ ...(1)

परावर्तन के नियमों से,

$\angle i_1 = \angle r_1$ ...(2)

तथा $\angle i_2 = \angle r_2$ ...(3)

समीकरण (1), (2) व (3) से, $\angle i_1 = \angle r_2$ ...(4)

समीकरण (1) व समीकरण (4) को जोड़ने पर,

$$\angle(i_1 + r_1) = \angle(i_2 + r_2)$$

$$\therefore \quad \angle ABC = \angle BCD$$

परन्तु ये AB तथा CD को BC द्वारा प्रतिच्छेद करने से निर्मित समान एकान्तर कोण हैं।

अत: $AB \parallel CD.$ **इति सिद्धम्**

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. न्यून कोण किसे कहते हैं ?

हल : जिस कोण का मान 0° से अधिक तथा 90° से कम होता है, उसे न्यून कोण कहते हैं। उदाहरण : 30°, 45° और 60° सभी न्यून कोण हैं क्योंकि ये 90° से छोटे हैं।

प्रश्न 2. वृहत् कोण की परिभाषा दीजिए।

हल : जिसे कोण का मान 180° से अधिका तथा 360° से कम होता है, उसे वृहत कोण कहते हैं। उदाहरण : 220°, 270°।

प्रश्न 3. समकोण, अधिक कोण और न्यून कोण में अन्तर स्पष्ट करो।

हल : कोण के आधार पर इनमें ये अन्तर है :

न्यून कोण : 0° से बड़ा तथा 90° से छोटा कोण

समकोण : ठीक 90° का कोण

अधिक कोण : 90° से बड़ा तथा 180° से छोटा कोण

प्रश्न 4. एक ही बिन्दु पर बनने वाले समस्त कोणों का मान कितना होता है ?

हल : 360°

प्रश्न 5. दो पूरक कोण आपस में समान हैं तो प्रत्येक का मान लिखो।

हल : $45° + 45° = 90°$

अत: प्रत्येक कोण 45° है।

प्रश्न 6. 90° के कोण के पूरक कोण का परिमाण लिखो।

हल : पूरक कोणों का योग = 90°

$90° - 90° = 0°$

अत: 90° का पूरक कोण = 0°

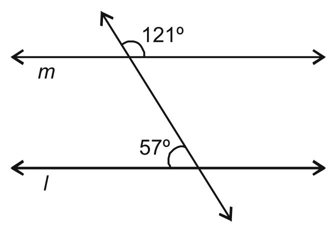
प्रश्न 7. सम्पूरक कोण किसे कहते हैं ?

हल : वे दो कोण जिनका योग 180° हो, सम्पूरक कोण कहलाते हैं। ये मिलकर एक सीधी रेखा बनाते हैं।

प्रश्न 8. पूरक कोण की परिभाषा दीजिए।

हल : वे दो कोण जिनका योग 90° हो, पूरक कोण कहलाते हैं। ये मिलकर एक समकोण बनाते हैं।

प्रश्न 9. दी गई आकृति से बताइए कि क्या रेखाएँ l तथा m समान्तर हैं ? कारण भी स्पष्ट कीजिए।

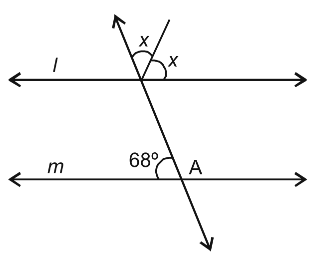


ऊपरी कोण = 121° तथा निचला कोण = 57°

$121° + 57° = 178° \neq 180°$

अत: ये सम्पूरक कोण नहीं है, इसलिए रेखा l और m समान्तर नहीं हैं।

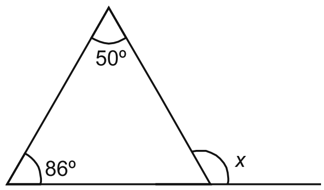
प्रश्न 10. चित्र में रेखाएँ l तथा m समान्तर हैं तो $\angle x$ का मान ज्ञात कीजिए। कारण भी स्पष्ट कीजिए।



हल : $\angle x + \angle x + 68° = 180°$

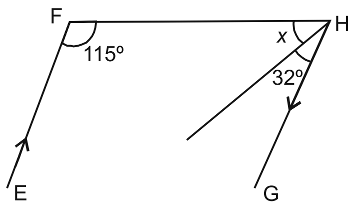
$\Rightarrow \quad \angle x = \frac{112°}{2} \Rightarrow \angle x = 56°.$

प्रश्न 11. दी गई आकृति से $\angle x$ का मान बताइए।



हल : $\angle x = 50° + 86° = 136°.$

प्रश्न 12. दिये गये चित्र में रेखाएँ $EF \parallel GH$ हो तो $\angle x$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल : प्रश्नानुसार,

$115° + x + 32° = 180°$

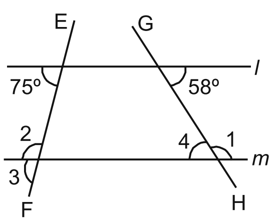
$\Rightarrow \quad x = 180° - 147° = 33°$

प्रश्न 13. एक कोण अपने पूरक कोण का आधा है तो उस कोण का मान ज्ञात करो।

संकेत : $x = \frac{1}{2}(90° - x) \Rightarrow x = 30°$

अत: वह कोण = 30° है।

प्रश्न 14. दिए हुए चित्र में $l \parallel m$ कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ और $\angle 4$ का मान ज्ञात करो।



हल : $\angle 3 = 75°$

तथा $\angle 2 + \angle 3 = 180°$

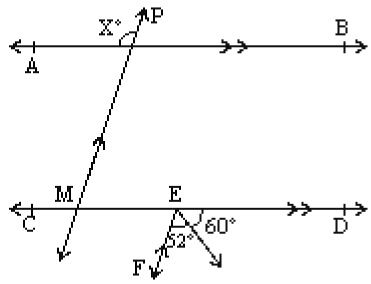
$\Rightarrow \quad 72° + \angle 2 = 180° \Rightarrow \angle 2 = 105°$

$\Rightarrow \quad \angle 4 = 58°$

तथा $\angle 4 + \angle 1 = 180°$

$58° + \angle 1 = 180° \Rightarrow \angle 1 = 122°$

प्रश्न 15. दी गई आकृति में $AB \parallel CD$ एवं $PQ \parallel EF$ हो तो $\angle x$ का मान ज्ञात कीजिए।



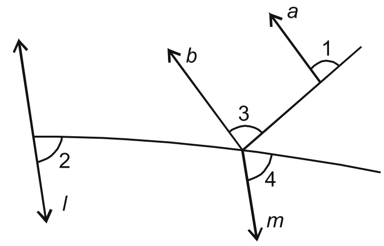
हल : $52° + 60° + \angle FEM = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle FEM = 180° - 112° = 48°$

तथा $\quad 180° = 48° + x$

$\Rightarrow \quad x = 180° - 48° = 112°$

प्रश्न 16. नीचे दी गई आकृति में रेखाएँ $l \parallel m$ एवं $a \parallel b$ हों तो इसमें अंकित कोणों में समान कोण युग्मों को लिखिए।



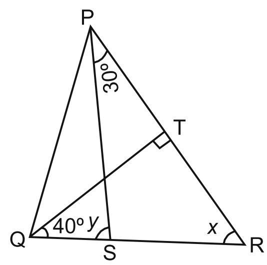
हल : समान्तर रेखाओं में,

$\angle 1 = \angle 3$ (अन्त: एकांतर कोण)

$\angle 2 = \angle 4$ (सम्बद्ध कोण)

अत: समान कोण युग्म : $(\angle 1, \angle 3), (\angle 2, \angle 4)$

प्रश्न 17. आकृति में, यदि $QT \perp PR$, $\angle TQR = 40°$ और $\angle SPR = 30°$ है, तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।



संकेत : $40° + 90° + x = 180°$

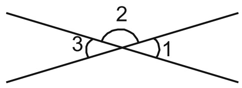
$\Rightarrow \quad x = 50°$

तथा $\angle PSR + 30° + 50° = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle PSR = 100°$

अत: $\quad y = 180° - 100° = 80°$

प्रश्न 18. नीचे चित्र में दो रेखाएँ एक-दूसरे को काटती हैं। यदि $\angle 1 + \angle 3 = 70^\circ$ है तो $\angle 2$ का मान ज्ञात करो।



हल : यहाँ $\angle 1 = \angle 3$

$\angle 1 + \angle 3 = 70^\circ$

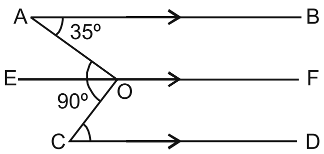
$\Rightarrow \quad 2\angle 1 = 70^\circ \Rightarrow \angle 1 = 35^\circ$

तथा $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

$\Rightarrow \quad \angle 2 = 145^\circ$

अत: $\angle 2 = 145^\circ$.

प्रश्न 19. यदि *AB*, *EF* और *CD* तीन समान्तर रेखाएँ हों तथा $\angle BAO = 35^\circ$ और $\angle AOC = 90^\circ$ हो, तो $\angle OCD$ का मान लिखिए।



हल : $\angle AOC = 90^\circ \Rightarrow AO \perp OC$

$\angle BAO = 35^\circ$

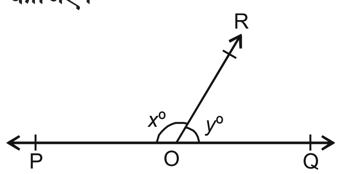
$\Rightarrow AO, AB$ से 35° बनाता है

$AB \parallel CD \Rightarrow AO, CD$ से भी 35° बनाएगा

अब $\angle OCD = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

अत: $\angle OCD = 55^\circ$.

प्रश्न 20. नीचे दी गई आकृति में $\angle POR$ और $\angle QOR$ एक रैखिक युग्म बनाते हैं। यदि $x - y = 80^\circ$ हो, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।



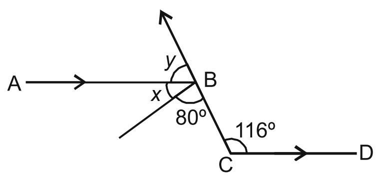
संकेत : $x + y = 180^\circ$

प्रश्नानुसार,

$x - y = 80^\circ$

हल करने पर, $x = 130^\circ$ तथा $y = 50^\circ$.

प्रश्न 21. चित्र में रेखाएँ $AB \parallel CD$ हैं। चित्र में दिए गए कोणों से $\angle x$ तथा $\angle y$ ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है,

$AB \parallel CD$

B पर कोण $= x + y + 80^\circ$

C पर कोण $= 116^\circ$

$\angle x$ और 80° एक सीधी रेखा पर स्थित है (सम्पूरक कोण)

$x + y + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow x + y = 100^\circ$

प्रश्नानुसार,

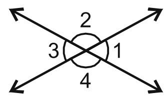
$x + 80^\circ = 116^\circ \Rightarrow x = 116^\circ - 80^\circ$

$\Rightarrow \quad x = 36^\circ$ तथा $x + y = 100^\circ$

$\Rightarrow \quad 36^\circ + y = 100$

$\Rightarrow \quad y = 100^\circ - 36^\circ = 64^\circ$

प्रश्न 22. दी गई आकृति में यदि $\angle 1 + \angle 3 = 120^\circ$ हो तो $\angle 3$ एवं $\angle 4$ के मान ज्ञात कीजिए।



संकेत : $\angle 1$ और $\angle 3$ शीर्ष कोण हैं।

अत: $\angle 1 = \angle 3$

$\angle 1 + \angle 3 = 120^\circ$

$2\angle 3 = 120^\circ$

$\angle 3 = 60^\circ$

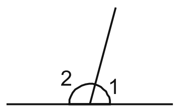
अब $\angle 3$ और $\angle 4$ रैखिक युग्म हैं।

$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + \angle 4 = 180^\circ$

$\angle 4 = 120^\circ$

अत: $\angle 3 = 60^\circ, \angle 4 = 120^\circ$.

प्रश्न 23. चित्र में $\angle 1$ तथा $\angle 2$ रैखिक कोण युग्म हैं, यदि $\angle 2 - \angle 1 = 18^\circ$ हो, तो $\angle 1$ तथा $\angle 2$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल : $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ...(i)

$\angle 2 - \angle 1 = 18^\circ$ ...(ii)

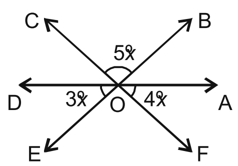
(i) और (ii) हल करने पर,

$\angle 2 = 99^\circ$

अब (1) में रखने पर,

तथा $\angle 1 = 81^\circ$

प्रश्न 24. दी गई आकृति से $\angle AOB$, $\angle COD$ एवं $\angle EOF$ ज्ञात कीजिए।



संकेत : $2(4x + 3x + 5x) = 360°$

$\Rightarrow \quad 12x = 180°$

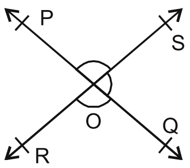
$\Rightarrow \quad x = \dfrac{180°}{12°} = 15°$

$\Rightarrow$ अत: कोण $5x$ या $75°$, $4x$ या $60°$ और $3x$ या $45°$ है।

उत्तर $\angle ADB = 45°$

$\angle COD = 60°, \angle EOF = 75°$

प्रश्न 25. दी गई आकृति में रेखाएँ PQ तथा RS परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ है, तो सभी कोण ज्ञात कीजिए।



संकेत : $\angle POR = 5x$ तथा $\angle ROQ = 7x$

क्योंकि ये रैखिक युग्म हैं,

$5x + 7x = 180° \Rightarrow x = 15°$

अब, $\angle POR = 5 \times 15 = 75°$

$\angle ROQ = 7 \times 15 = 105°$

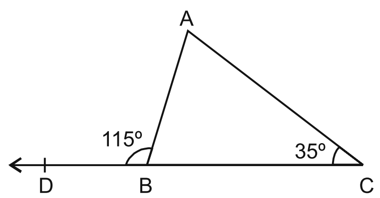
शीर्ष कोण बराबर होते हैं, इसलिए

$\angle SOQ = 75°$ तथा $\angle POS = 105°$

प्रश्न 26. सिद्ध करो कि यदि दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे तो एक ओर के अन्त:कोणों का योग दो समकोण होता है।

हल : मान लीजिए दो रेखाएँ l और m समान्तर हैं तथा एक तिर्यक रेखा t उन्हें काटती है। इससे रेखाओं के बीच एकांतर अंत: कोणों का एक युग्म बनता है। क्योंकि रेखाएँ l और m समान्तर हैं। इसलिए तिर्यक रेखा द्वारा बने एकांतर अंत: कोण बराबर होते हैं। अत: सिद्ध हुआ कि यदि दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे, तो एकांतर अंत: कोण समान होते हैं।

प्रश्न 27. नीचे दिए गए त्रिभुज का एक बहिष्कोण $115°$ है और अंत: अभिमुख कोण $35°$ का है। शेष दोनों कोणों का मान ज्ञात कीजिए।



हल : $115° +$ कोण $ABC = 180°$

कोण $ABC = 180° - 115°$

कोण $ABC = 65°$

अब त्रिभुज ABC में,

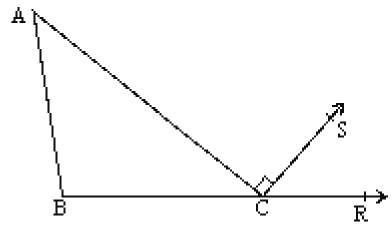
कोण $A + 65° + 35° = 180°$

कोण $A = 180° - 100°$

कोण $A = 80°$

अत: शेष दोनों कोण $= 65°$ और $80°$।

प्रश्न 28. नीचे दी गई आकृति में ΔABC की भुजा BC को R तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 1$ हो और $CS \perp AC$ हो, तो $\angle SCR$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है,

$\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 2 : 1$

मान लें, $\angle A = 3x, \angle B = 2x, \angle C = 1x$

त्रिभुज के कोणों का योग $= 180°$

$3x + 2x + 1x = 180°$

$\Rightarrow \quad 6x = 180° \quad \Rightarrow x = 30°$

अत: $\angle A = 90°, \angle B = 60°, \angle C = 30°$

अब $CS \perp AC$ (दिया है)

अर्थात् $\angle SCA = 90°$

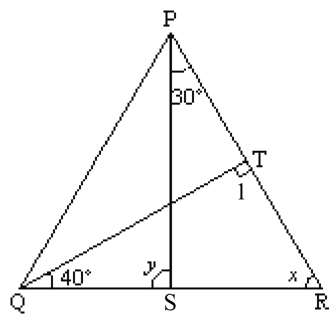
रैखिक युग्म,

$\angle ACB + \angle ACS + \angle SCR = 180°$

$30° + 90° + \angle SCR = 180°$

$\angle SCR = 180° - 120° = 60°.$

प्रश्न 29. आकृति में, यदि $QT \perp PR$, $\angle TQR = 40°$ और $\angle SPR = 30°$ है, तो x और y का मान ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है, $QT \perp PR$

अत: $\angle 1 = 90°$

त्रिभुज QTR में,

$\angle TQR + \angle QTR + \angle QRT = 180°$

$40° + 90° + x = 180° \Rightarrow x = 50°$

अब त्रिभुज PQR में,

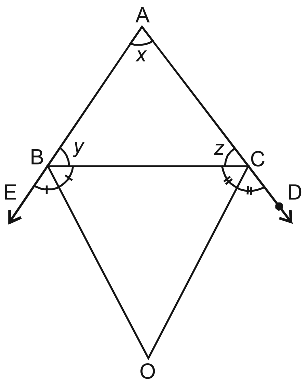
$$\angle PSR + \angle SPR + \angle PRS = 180°$$
$$\angle PSR + 30° + x = 180°$$
$$\angle PSR + 30° + x = 180°$$
$$\angle PSR + 80° = 180°$$
$$\angle PSR = 180° - 80°$$
$$\angle PSR = 100°$$

अत: $y = 180° - \angle PSR$

$$= 180° - 100° = 80°$$
$$y = 80°$$

प्रश्न 30. आकृति में, ΔABC की भुजाओं AB और AC को क्रमशः E और D तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle CBE$ और $\angle BCD$ के समद्विभाजक क्रमशः BO और CO बिन्दु O पर मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC \text{ है।}$$



हल : दिया है,

BO, $\angle B$ का द्विभाजक है।

CO, $\angle C$ का द्विभाजक है।

अत: $\angle OBC = \frac{1}{2}\angle B$ तथा $\angle OCB = \frac{1}{2}\angle C$

त्रिभुज BOC में,

$$\angle BOC + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180°$$

$$\angle BOC + \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180°$$

लेकिन त्रिभुज ABC में,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$
$$\angle B + \angle C = 180° - \angle A$$

मान रखने पर,

$$\angle BOC + \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 180°$$

$$\angle BOC = 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle A$$

$$\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$$

अत: सिद्ध हुआ कि,

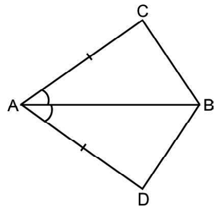
$$\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$$ **इति सिद्धम्।**

❑ ❑

7 त्रिभुज

प्रश्नावली 7·1

प्रश्न 1. चतुर्भुज *ACBD* में, *AC* = *AD* है और *AB* कोण *A* को समद्विभाजित करता है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ है।



***BC* और *BD* के बारे में आप क्या कह सकते हैं ?**

हल : ΔABC और ΔABD में,

$AC = AD$ [दिया है]

$\angle CAB = \angle BAD$ [दिया है]

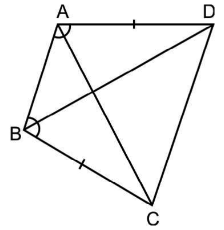
और $AB = AB$ [उभयनिष्ठ]

$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ [SAS नियम]

$\Rightarrow BC = BD$

[$\because$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते हैं]

2. *ABCD* एक चतुर्भुज है, जिसमें *AD* = *BC* और $\angle DAB = \angle CBA$ है (आकृति देखें)। सिद्ध कीजिए कि



(i) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$
(ii) *BD* = *AC*
(iii) $\angle ABD = \angle BAC$.

हल : $\because AD = BC$ [दिया है]

(i) ΔABD तथा ΔBAC में,

$\angle DAB = \angle CBA$ [दिया है]

व $AB = AB$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore$ भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से,

$\Delta ABD \cong \Delta BAC.$ **इति सिद्धम्।**

(ii) $\because \Delta ABD \cong \Delta BAC$

$\Rightarrow BD = AC$

इति सिद्धम्।

(iii) ΔABD तथा ΔBAC में,

$AD = BC$ [दिया है]

$\angle DAB = \angle CBA$ [दिया है]

$AB = AB$ [उभयनिष्ठ]

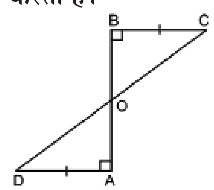
$\therefore$ भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से,

$\Delta ABD \cong \Delta BAC$

$\Rightarrow BD = AC$

और $\angle ABD = \angle BAC$ **इति सिद्धम्।**

3. एक रेखाखण्ड *AB* पर *AD* और *BC* दो बराबर लम्ब रेखाखण्ड हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि *CD*, रेखाखण्ड *AB* को समद्विभाजित करता है।



हल : चित्रानुसार

ΔAOD और ΔBOC में,

$\angle AOD = \angle BOC$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\angle DAO = \angle OBC$ [प्रत्येक 90°]

और $AD = BC$ [दिया है]

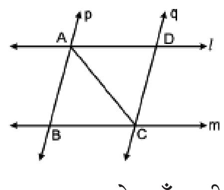
$\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOC$ (AAS नियम)

$\therefore OA = OB$

अतः *CD*, रेखाखण्ड *AB* को समद्विभाजित करती है।

इति सिद्धम्।

4. *l* और *m* दो समान्तर रेखाएँ हैं जिन्हें समान्तर रेखाओं *p* और *q* का एक अन्य युग्म प्रतिच्छेदित करता है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ है।



हल : चूँकि *l* तथा *m* समान्तर रेखाएँ दूसरी समान्तर रेखाओं *p* और *q* द्वारा प्रतिच्छेदित की जाती हैं। अतः $AD \parallel BC$ तथा $AB \parallel CD$.

अतः $ABCD$ समान्तर चतुर्भुज है व $AB = CD$ और $BC = AD$

अब ΔABC और ΔCDA में,

$\because \quad AB = CD$ [ऊपर सिद्ध किया है]

$BC = AD$ [ऊपर सिद्ध किया है]

व $\quad AC = AC$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore$ भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से,

$\Delta ABC \cong \Delta CDA.$ **इति सिद्धम्।**

अन्य विधि : $\because AD \parallel BC$ तथा तिर्यक रेखा A उन्हें प्रतिच्छेदित करती है।

$\therefore \quad \angle ACB = \angle CAD$ (एकान्तर कोण)

तथा $\quad \angle CAB = \angle ACD$ (एकान्तर कोण)

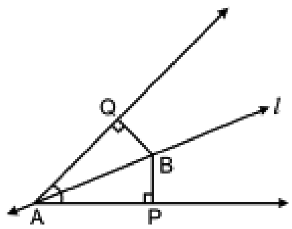
अब ΔABC तथा ΔCDA में

$\angle ACB = \angle CAD$ (एकान्तर कोण)

$AC = CA$ (उभयनिष्ट)

$\therefore \quad \Delta ABC \cong CDA$ **इति सिद्धम।**

5. रेखा l कोण A को समद्विभाजित करती है और B रेखा l पर स्थित कोई बिन्दु है। BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लम्ब हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि :



(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$,

(ii) $BP = BQ$ है अर्थात् बिन्दु B कोण A की भुजाओं से समदूरस्थ है।

हल : (i) ΔAPB तथा ΔAQB में,

$\angle APB = \angle AQB$ [$\because$ प्रत्येक $= 90°$]

$\angle PAB = \angle QAB$

[$\because AB$, $\angle PAQ$ का समद्विभाजक है]

व $\quad AB = AB$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore \quad \Delta APB \cong \Delta\, AQB$ (AAS नियम)

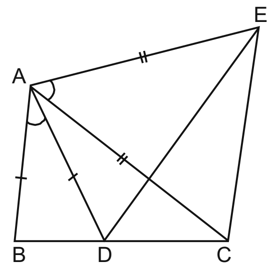
और **(ii)** $BP = PQ,$

[सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग]

अतः बिन्दु B, $\angle A$ की भुजाओं से समदूरस्थ है।

इति सिद्धम्।

6. आकृति में, $AC = AE$, $AB = AD$ और $\angle BAD = \angle EAC$ है। दर्शाइए कि $BC = DE$ है।



हल : ΔABC तथा ΔADE में,

$AB = AD$ [दिया है]

$\because \quad \angle BAD = \angle EAC$ [दिया है]

दोनों ओर $\angle DAC$ जोड़ने पर,

$\angle BAD + \angle DAC = \angle EAC + \angle DAC$

$\Rightarrow \quad \angle BAC = \angle DAE$

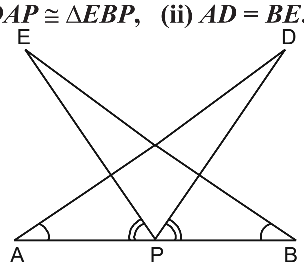
और $\quad AC = AE$ [दिया है]

$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta ADE$ [SAS नियम]

$\Rightarrow \quad BC = DE$ **इति सिद्धम्।**

7. AB एक रेखाखण्ड है और P इसका मध्य-बिन्दु है। D और E रेखाखण्ड AB के एक ही ओर स्थित दो बिन्दु इस प्रकार हैं कि $\angle BAD = \angle ABE$ और $\angle EPA = \angle DPB$ हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि

(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$, (ii) $AD = BE$.



हल : (i) $\quad \angle EPA = \angle DPB$ [दिया है]

दोनों ओर $\angle DPE$ जोड़ने पर,

$\angle EPA + \angle DPE = \angle DPB + \angle DPE$

$\Rightarrow \quad \angle DPA = \angle EPB$

अब, ΔDAP तथा ΔEBP में,

$\angle EPB = \angle DPA$ [सिद्ध किया है]

$BP = AP$ [$\because P$, AB का मध्य-बिन्दु है]

$\angle EBP = \angle DAP$ [दिया है]

$\therefore \quad \Delta DAP \cong \Delta EBP$ [ASA नियम]

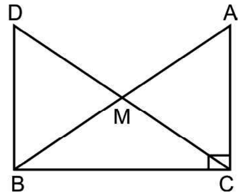
इति सिद्धम्।

और **(ii)** $\therefore \quad AD = BE$

[$\because$ सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग]

इति सिद्धम्।

8. एक समकोण त्रिभुज *ABC* में, जिसमें कोण *C* समकोण है, *M* कर्ण *AB* का मध्य-बिन्दु है। *C* को *M* से मिलाकर बिन्दु *D* तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि *DM* = *CM* है। बिन्दु *D* को बिन्दु *B* से मिला दिया जाता है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि :



(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$,
(ii) $\angle DBC$ **एक समकोण है,**
(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$
(iv) $CM = \frac{1}{2} AB.$

हल : (i) ΔAMC तथा ΔBMD में,

$AM = BM$ [$\because$ *M*, *AB* का मध्य-बिन्दु है]
$\angle AMC = \angle BMD$ [शीर्षाभिमुख कोण]
व $CM = MD$ [दिया है]
$\therefore$ $\Delta AMC \cong \Delta BMD.$ [SAS नियम]
इति सिद्धम्।

(ii) $\because$ $\Delta AMC \cong \Delta BMD$
$\therefore$ $BD = CA$
व $\angle BDM = \angle ACM$
[सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग]

इसलिए तिर्यक रेखा *CD*, *CA* तथा *BD* को क्रमशः *C* तथा *D* पर बिन्दुओं पर इस प्रकार काटती है कि एकान्तर कोण $\angle BDM = \angle ACM$ । अतः $BD \parallel CA$.

$\Rightarrow$ $\angle CBD + \angle BCA = 180°$
[$\because$ तिर्यक रेखा के एक ही ओर के आन्तरिक कोण]
$\Rightarrow$ $\angle CBD + 90° = 180°$ [$\because \angle BCA = 90°$]
$\Rightarrow$ $\angle DBC = 90°.$ **इति सिद्धम्।**

(iii) अब ΔDBC तथा ΔACB में,

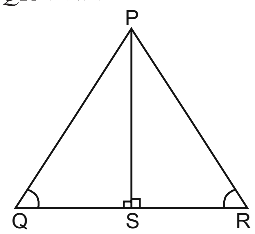
$BD = CA$ [भाग (i) से]
$\angle DBC = \angle ACB$ [प्रत्येक 90°]
$BC = BC.$ [उभयनिष्ठ]
$\therefore$ $\Delta DBC \cong \Delta ACB.$ [SAS नियम]
इति सिद्धम्।

(iv) $CD = AB$
[सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग]
या $\frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} AB$
या $CM = \frac{1}{2} AB.$ **इति सिद्धम्**

● **पाठ्यपुस्तक प्रमेय संख्या-7.2**

यदि किसी त्रिभुज में दो कोण बराबर हों, तो उनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होंगी।

दिया है : ΔPQR जिसमें



$\angle Q = \angle R$

सिद्ध करना है :

$PQ = PR.$

रचना : $\angle QPR$ का समद्विभाजक *PS* खींचा।

उपपत्ति : ΔPQS एवं ΔPRS में,

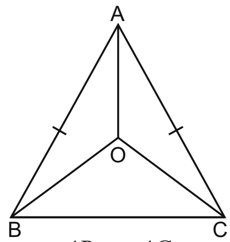
$\angle Q = \angle R$ (दिया है)
$PS = PS$ (उभयनिष्ठ)
$\angle QPS = \angle RPS$ (रचना से)
$\Delta PQS \cong \Delta PRS$ (ASA नियम)
अतः संगत भुजाएँ $PQ = PR.$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्नावली 7·2

1. एक समद्विबाहु त्रिभुज *ABC* में, जिसमें *AB* = *AC* है तथा $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक परस्पर बिन्दु *O* पर प्रतिच्छेद करते हैं। *A* और *O* को जोड़िए । दर्शाइए कि :

(i) $OB = OC$
(ii) *AO* **कोण** *A* **को समद्विभाजित करती है।**

हल : (i) ΔABC में, $AB = AC$



या $\angle B = \angle C$
[$\because$ बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]
या $\frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \angle C$
या $\angle ABO = \angle ACO$ ...(i)
$\Rightarrow$ $\angle OBC = \angle OCB$

$\therefore \quad \angle OBC = \frac{1}{2}\angle B$

और $\quad \angle OCB = \frac{1}{2}\angle C$

या $\quad OB = OC \quad$ ...(ii)

समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।

इति सिद्धम्।

(ii) अब ΔABO तथा ΔACO में,

$AB = AC$ [दिया है]

$\angle ABO = \angle ACO$ [समीकरण (i) से]

$OB = OC$ [समीकरण (ii) से]

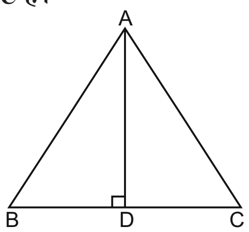
$\therefore \quad \Delta ABO \cong \Delta ACO$ (SAS नियम)

तथा $\quad \angle BAO = \angle CAO$

या AO, $\angle BAC$ को समद्विभाजित करता है।

इति सिद्धम्।

2. ΔABC में, AD भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है।



हल : ΔABD तथा ΔACD में,

$DB = DC$ [दिया है]

$\angle ADB = \angle ADC$ [प्रत्येक 90°]

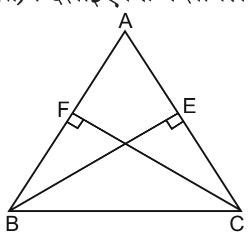
$AD = AD$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore \quad \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [SAS नियम]

और $\quad AB = AC$

अतः ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है। **इति सिद्धम्।**

3. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें बराबर भुजाओं AC और AB पर शीर्षलम्ब क्रमशः BE और CF खींचे गए हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि ये शीर्षलम्ब बराबर हैं।



हल : दिया है : समद्विबाहु ΔABC में $BE \perp AC$ तथा $CF \perp AB$.

सिद्ध करना है : $BE = CF$

ΔABE तथा ΔACF में,

$\angle AEB = \angle AFC$ [प्रत्येक 90°]

$\angle A = \angle A$ [उभयनिष्ठ]

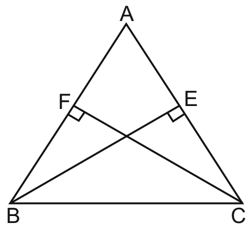
तथा $\quad AB = AC$ [दिया है]

$\therefore \quad \Delta ABE \cong \Delta ACF$ (ASA नियम)

$BE = CF$

अतः शीर्षलम्ब बराबर हैं। **इति सिद्धम्।**

4. ABC एक त्रिभुज है जिसमें AC और AB पर खींचे गए शीर्षलम्ब BE और CF बराबर हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि :



(i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$

(ii) $AB = AC$, अर्थात् ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल : (i) ΔABE तथा ΔACF में,

$\angle AEB = \angle ACF$ [प्रत्येक 90°]

$\angle BAE = \angle CAF$ [उभयनिष्ठ]

तथा $\quad BE = CF$ [दिया है]

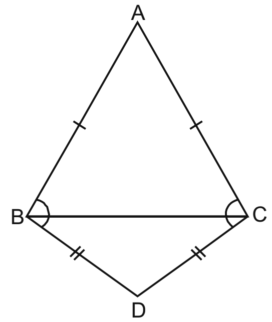
$\Delta ABE \cong \Delta ACF$ [AAS नियम]

(ii) $\because \quad \Delta ABE \cong \Delta ACF$

$\therefore \quad AB = AC$

अतः ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है। **इति सिद्धम्।**

5. ABC और DBC समान आधार BC पर स्थित दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि $\angle ABD = \angle ACD$ है।



हल : ΔABC में,

$AB = AC$

$\angle ABC = \angle ACB$ ...(1)

[$\because$ समान भुजाओं के सम्मुख कोण]

ΔBCD में,

$BD = CD$

$\therefore$ $\angle DBC = \angle DCB$ ...(2)

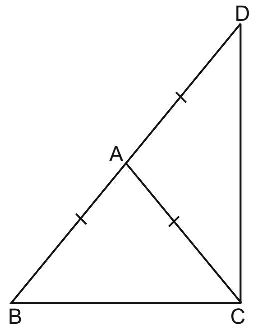
[$\because$ समान भुजाओं के सम्मुख कोण]

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर,

$\angle ABC + \angle DBC = \angle ACB + \angle DCB$

$\Rightarrow$ $\angle ABD = \angle ACD.$ **इति सिद्धम्।**

6. *ABC* एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें *AB* = *AC* है। भुजा *BA* बिन्दु *D* तक इस प्रकार बढ़ाई गई है कि *AD* = *AB* है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि ∠*BCD* एक समकोण है।



हल : ΔABC में,

$AB = AC$ [दिया है]

$\angle ACB = \angle ABC$ ...(i)

[समान भुजाओं के सम्मुख कोण]

अब $AB = AD$ [दिया है]

$AD = AC$ [$\because AB = AC$]

इसलिए ΔADC में,

$AD = AC$

$\angle ACD = \angle ADC$

[समान भुजाओं के सम्मुख कोण]

समीकरण (i) तथा (ii) को जोड़ने पर,

$\angle ACB + \angle ACD = \angle ABC + \angle ADC$

$\Rightarrow$ $\angle BCD = \angle ABC + \angle BDC$

[$\because \angle ADC = \angle BDC$]

$\Rightarrow \angle BCD + \angle BCD = \angle ABC + \angle BDC + \angle BCD$

[$\angle BCD$ को दोनों पक्षों में जोड़ने पर]

[$\because \angle ABC + \angle BDC + \angle BCD = 180^\circ$]

[त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180º होता है।]

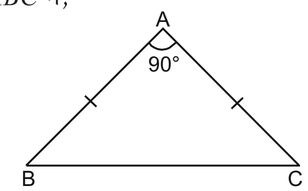
$\Rightarrow$ $2\angle BCD = 180^\circ$

$\therefore$ $\angle BCD = 90^\circ$

अतः $\angle BCD$ एक समकोण है। **इति सिद्धम्।**

7. *ABC* एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें ∠*A* = 90° और *AB* = *AC* है। ∠*B* और ∠*C* ज्ञात कीजिए।

हल : ΔABC में,



$\angle A = 90^\circ$

$AB = AC$ (दिया है)

$\therefore$ $\angle B = \angle C,$ [समान भुजाओं के सम्मुख कोण]

और $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$

[Δ के कोणों के योग का नियम]

$\Rightarrow 90^\circ + \angle B + \angle B = 180^\circ$ [$\because \angle C = \angle B$]

$\Rightarrow$ $90^\circ + 2\angle B = 180^\circ$ [$\because \angle C = \angle B$]

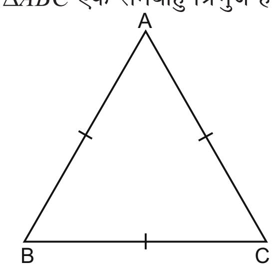
$\Rightarrow$ $2\angle B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

या $\angle B = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

$\therefore$ $\angle C = \angle B = 45^\circ.$ **उत्तर**

8. दर्शाइए कि किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° होता है।

हल : माना ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है। अतः



$AB = AC = BC$

अब $AB = AC$

$\Rightarrow$ $\angle B = \angle C$ ...(i)

[समान भुजाओं के सम्मुख कोण]

तथा $CB = CA$

$\Rightarrow$ $\angle A = \angle B$ ...(ii)

[समान भुजाओं के सम्मुख कोण]

समी. (i) व (ii) से,

$\angle A = \angle B = \angle C$

तथा $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

[Δ के कोणों के योग का नियम]

$\therefore$ $\angle A + \angle A + \angle A = 180^\circ$

$\Rightarrow$ $3\angle A = 180^\circ \Rightarrow \angle A = 60^\circ$

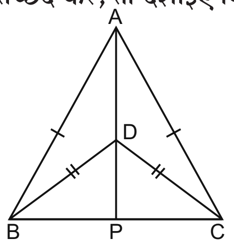
$\therefore$ $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

अतः समबाहु त्रिभुज के सभी कोण 60° के होते हैं।

इति सिद्धम्।

प्रश्नावली 7·3

1. ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC पर बने दो समद्विबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि A और D भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं (देखिए आकृति)। यदि AD बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि :



(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

(ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

(iii) AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है।

(iv) AP रेखाखण्ड BC का लम्ब समद्विभाजक है।

हल : (i) ΔABD तथा ΔACD में,

$AB = AC$ [दिया है]

$BD = DC$ [दिया है]

और $AD = AD$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore$ भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता गुण से,

$\Delta ABD \cong \Delta ACD$ **इति सिद्धम्।**

(ii) ΔABP तथा ΔACP में,

$AB = AC$ [दिया है]

$\angle BAP = \angle PAC$

[$\because \Delta ABD \cong \Delta ACD$

या $\angle BAD = \angle DAC$

या $\angle BAP = \angle PAC$]

और $AP = AP$ [उभयनिष्ठ]

$\Delta ABP \cong \Delta ACP.$ [SAS नियम]

इति सिद्धम्।

(iii) $\because$ $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

$\therefore$ $\angle BAD = \angle DAC$

$\Rightarrow AD, \angle A$ को समद्विभाजित करता है। ...(i)

ΔBDP तथा ΔCDP में,

$BD = CD$ [दिया है]

$BP = PC$

[$\because \Delta ABP \cong \Delta ACP$ या $BP = PC$]

तथा $DP = DP$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore$ $\Delta BDP \cong \Delta PDC$ [SAS नियम]

$\Rightarrow DP, \angle D$ को समद्विभाजित करता है। ...(ii)

समीकरण (i) + (ii)

AP, $\angle A$ तथा $\angle D$ को समद्विभाजित करता है।

इति सिद्धम्।

(iv) $\because$ AP, BC पर स्थित है।

$\angle APB + \angle APC = 180°$ [समान्तर युग्म]

परन्तु $\angle APB = \angle APC$

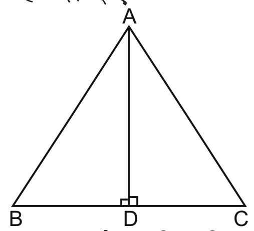
[सिद्ध किया है]

$\therefore$ $\angle APB = \angle APC = \dfrac{180°}{2} = 90°$

तथा $BP = PC$ [सिद्ध किया है]

या AP, BC का लम्ब समद्विभाजक है। **इति सिद्धम्।**

2. AD एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का एक शीर्षलम्ब है, जिसमें $AB = AC$ है। दर्शाइए कि :



(i) AD, रेखाण्ड BC को समद्विभाजित करता है।

(ii) AD, कोण A को समद्विभाजित करता है।

हल : (i) AD, शीर्ष A से खींचा गया लम्ब है, जो कि समद्विबाहु ΔABC के आधार BC के सम्मुख है।

$AB = AC, \angle ADC = \angle ADB = 90°$

अब ΔADB तथा ΔADC में,

$AB = AC$ [दिया है]

$AD = AD$ [उभयनिष्ठ है]

तथा $\angle ADC = \angle ADB$ [प्रत्येक 90°]

$\therefore$ $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ [AAS नियम]

व $BD = DC$

तथा $\angle BAC = \angle DAC$

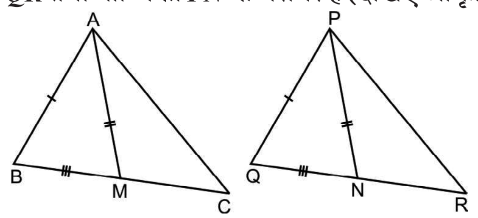
$\therefore AD, BC$ को समद्विभाजित करता है। **इति सिद्धम्।**

(ii) $\because \Delta ADB \cong \Delta ADC$

अतः $\angle BAD = \angle CAD$

$\Rightarrow AD, \angle A$ को समद्विभाजित करता है। **इति सिद्धम्।**

3. एक त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमशः एक-दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के बराबर हैं (देखिए आकृति)।



दर्शाइए कि :

(i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR.$

हल : ΔABC तथा ΔPQR में,

$AB = PQ$

$BC = QR$

तथा $AM = PN$

चूँकि AM तथा PN क्रमशः ΔABC तथा ΔPQR की माध्यिकाएँ हैं।

और $BC = QR$ [दिया है]

$\Rightarrow \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}QR$

$\Rightarrow BM = QN$

अब, ΔABM तथा ΔPQN में,

$AB = PQ$ [दिया है]

$BM = QN$

तथा $AM = PN$ [दिया है]

$\therefore \Delta ABM \cong \Delta PQN$ [SSS नियम]

$\Rightarrow \angle B = \angle Q$

अब ΔABC तथा ΔPQR में,

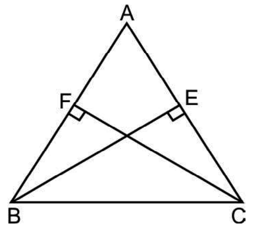
$AB = PQ$ [दिया है]

$\angle B = \angle Q$

$BC = QR$ [दिया है]

$\therefore \Delta ABC = \Delta PQR,$ [SAS नियम]

4. *BE* और *CF* त्रिभुज *ABC* के दो बराबर शीर्षलम्ब हैं। R.H.S. सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



हल : ΔBCF तथा ΔCBE में,

$\angle BFC = \angle CEB$ [$\because$ प्रत्येक 90°]

$BC = BC$ [उभयनिष्ठ]

$FC = EB$ (दिया है)

$\therefore \Delta BCF \cong \Delta CBE$ (RHS नियम)

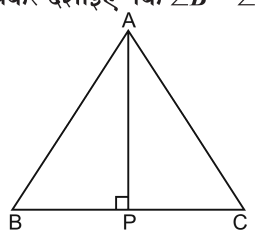
$\Rightarrow \angle FBC = \angle ECB$

या $\angle ABC = \angle ACB$

$\Rightarrow AB = AC$

$\therefore \Delta ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है। **इति सिद्धम्।**

5. *ABC* एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है। $AP \perp BC$ खींचकर दर्शाइए कि $\angle B = \angle C$ है।



हल : ΔABP तथा ΔACP में,

$AB = AC$ [दिया है]

$AP = AP$ [उभयनिष्ठ]

$\angle APB = \angle APC$ [प्रत्येक 90°]

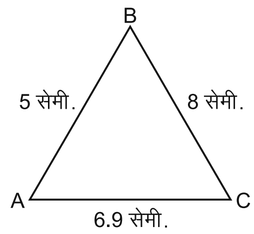
$\therefore \Delta ABP \cong \Delta ACP$ (RHS नियम)

या $\angle B = \angle C$ **इति सिद्धम्।**

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. दिये गए चित्र में AB = 5 सेमी, BC = 8 सेमी तथा AC = 6.9 सेमी हों तो लिखिए—



(i) त्रिभुज का सबसे बड़ा कोण

(ii) त्रिभुज का सबसे छोटा कोण

हल : नियम, त्रिभुज में सबसे बड़ी भुजा के सामने का कोण सबसे बड़ा होता है और सबसे छोटी भुजा के सामने का कोण सबसे छोटा होता है।

अतः (i) सबसे बड़ा कोण = $\angle BAC$

(ii) सबसे छोटा कोण = $\angle ACB$

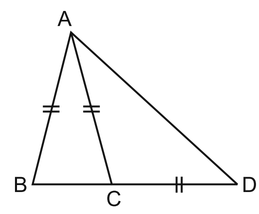
प्रश्न 2. समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक कोण का मान लिखिए।

हल : 60°

प्रश्न 3. किसी त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण .... होते हैं।

हल : बराबर या समान।

प्रश्न 4. चित्र के अनुसार ΔABC में AB = AC; CD = CA एवं ∠ADC = 20° हो, तो ∠ABC का मान ज्ञात कीजिए।



संकेत : $\angle CAD + \angle ADC + \angle DCA = 180°$

$20° + 20° + \angle DCA = 180°$

$\angle DCA = 140°$

लेकिन CD, BC पर स्थित है, इसलिए

$\angle BCA = 70°$

अतः $\angle ABC = 40°$

प्रश्न 5. ΔABC एवं ΔDEF में यदि AB = DF, BC = DE, AC = EF एवं $\angle D = 55°$ हो, तो $\angle B$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, AB = DE तथा BC = DF

AC = EF

अर्थात् $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

(SSS सर्वांगसमता नियम से)

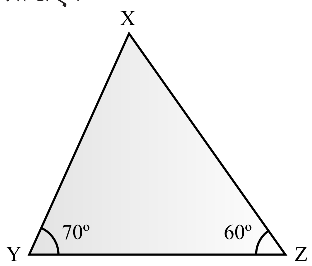
नियमः सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण बराबर होते हैं।

यहाँ, $\angle A$ और $\angle D$ संगत कोण हैं।

दिया है, $\angle D = 55°$

अतः, $\angle A = 55°$

प्रश्न 6. नीचे दिए गए चित्र में $\angle Y = 70°$ तथा $\angle Z = 60°$ तो लिखिए :



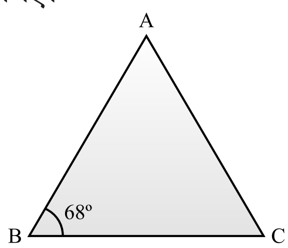
(i) त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा।

(ii) त्रिभुज की सबसे छोटी भुजा।

हल : त्रिभुज XYZ में $\angle Y = 70°$ तथा $\angle Z = 60°$ है, अतः $\angle X = 180 - (70° + 60°) = 50°$। किसी भी त्रिभुज में सबसे बड़ी भुजा सबसे बड़े कोण के सम्मुख तथा सबसे छोटी भुजा सबसे छोटे कोण के सम्मुख होती है। यहाँ सबसे बड़ा कोण $\angle Y = 70°$ है, जिसकी सम्मुख भुजा XY है, तथा सबसे छोटा कोण $\angle X = 50°$ है, जिसकी सम्मुख भुजा YZ है।

अतः (i) सबसे बड़ी भुजा XZ है, तथा (ii) सबसे छोटी भुजा YZ है।

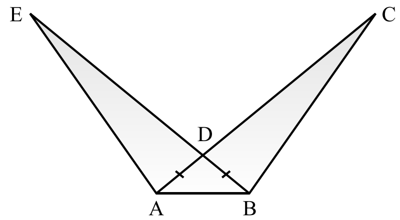
प्रश्न 7. चित्र में AB = AC एवं $\angle B = 68°$ हो तो $\angle A$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल : चूँकि AB = AC है, अतः इन बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं, इसलिए $\angle C = \angle B = 68°$। त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है, अतः $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, अर्थात् $\angle A + 68° + 68° = 180°$, जिससे $A = 180° - 136° = 44°$।

अतः $\angle A = 44°$।

प्रश्न 8. चित्र में AD = BD एवं $\angle C = \angle E$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि BC = AE।



हल : त्रिभुज ADE तथा BDC में,

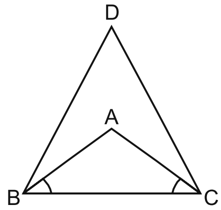
AD = BD (दिया है)

$\angle ADE = \angle BDC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

तथा $\angle AED = \angle BCD$ (क्योंकि $\angle E = \angle C$)

अतः ASS (कोण-कोण-भुजा) सर्वांगसमता कसौटी से त्रिभुज ADE $\cong$ त्रिभुज BDC होता है। इसलिए AE = BC, क्योंकि सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते हैं। अतः BC = AE। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 9. चित्र में एक ही आधार पर स्थित त्रिभुज ABC एवं DBC के लिए यदि AB = AC तथा DB = DC हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle ABD = \angle ACD$



हल : दिया है : AB = AC

DB = DC

सिद्ध करना है :

$\angle ABD = \angle ACD$

प्रमाणः त्रिभुज ABD और त्रिभुज ACD पर विचार करें।

AB = AC (दिया है)

BD = DC (दिया है)

AD = AD (सामान्य भुजा)

अतः, त्रिभुज ABD $\cong$ त्रिभुज ACD

(SSS सर्वांगसमता नियम से)

सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण बराबर होते हैं।

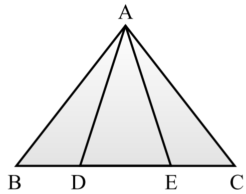
इसलिए, $\angle ABD = \angle ACD$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 10. SAS सर्वांगसमता नियम लिखिए।

हल : यदि दो त्रिभुजों की दो भुजाएँ क्रमशः बराबर हों तथा उनके बीच का कोण भी बराबर हो, तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम कहलाते हैं।

इसे SAS सर्वांगसमता नियम कहते हैं।

प्रश्न 11. आकृति में यदि AB = AC तथा BE = CD हो, तो सिद्ध कीजिए कि AD = AE।



हल : दिया है : $AB = AC$
$BE = CD$

सिद्ध करना है : $AD = AE$

प्रमाण : त्रिभुज ABD और त्रिभुज AEC पर विचार करें।

$AB = AC$ (दिया है)
$BD = CE$

(क्योंकि BE = CD और BD तथा CE आधार के भाग हैं)

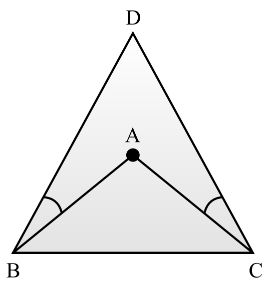
$\angle ABD = \angle ACE$
(एक ही सीधी रेखा पर बने कोण)

अत:, त्रिभुज ABD ≅ त्रिभुज AEC
(SAS सर्वांगसमता नियम से)

सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ बराबर होती हैं।

इसलिए, $AD = AE$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 12. आकृति में यदि AB = AC तथा ∠ABD = ∠ACD हों, तो सिद्ध कीजिए कि ΔBDC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



हल : दिया है :
$AB = AC$
$\angle ABD = \angle ACD$

सिद्ध करना है : ΔBDC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रमाण : त्रिभुज ABD और त्रिभुज ACD पर विचार करें।

$AB = AC$ (दिया है)
$\angle ABD = \angle ACD$ (दिया है)
$AD = AD$ (समान)

प्रश्नानुसार,
$\angle ABC = \angle ACB$ ($\because AB = AC$)
$\Rightarrow$ $\angle DBC = \angle DBA + \angle ABC$
तथा $\angle DCB = \angle DCA + \angle ACB$
और $\angle DBC = \angle DCB$

अत: स्पष्ट है कि ΔDBC में,
$\angle DBC = \angle DCB$ (समान कोण)
तथा $BC = BC$ (समान आधार)

अत:, त्रिभुज ABD ≅ त्रिभुज ACD
(SAS सर्वांगसमता नियम से)

सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ बराबर होती है।

अत:, $BD = DC$

इसलिए, त्रिभुज BDC समद्विबाहु है और इस प्रकार ΔBDC एक समद्विबाहु त्रिभुज है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 13. यदि एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की माध्यिका AD हो तथा ∠A = 120° एवं AB = AC हो, तो ∠ADB का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $AB = AC$
AD त्रिभुज ABC की माध्यिका है।
$\angle A = 120°$

चरण 1. $AB = AC$
अत: ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

चरण 2. समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्ष से खींची गई माध्यिका आधार पर लम्ब भी होती है।

अत:, $AD \perp BC$

चरण 3. D बिंदु BC पर स्थित है,
इसलिए $\angle ADB = 90°$
अत: $\angle ADB = 90°$.

प्रश्न 14. यदि त्रिभुज के किसी कोण का समद्विभाजक सामने की भुजा को भी समद्विभाजित करता है, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु होगा।

हल : प्रमेय 7 पृष्ठ 912 देखें।

प्रश्न 15. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में AB = AC तथा ∠B = 45° है। भुजा BA को D तक इस प्रकार बढ़ाया कि AB = AD हो। तो ∠BCD का मान ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $AB = AC, \angle B = 45°, AB = AD$

चरण 1. $AB = AC$
$\Rightarrow$ ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है।
अत: $\angle B = \angle C = 45°$

चरण 2. त्रिभुज ABC में कोणों का योग = 180°
$\angle A + 45° + 45° = 180°$
$\angle A = 90°$

चरण 3. अब $AB = AD$
तथा $AC = AD$ ($\because AB = AC$)
$\Rightarrow$ ΔCAD समद्विबाहु त्रिभुज है।
इसलिए,
$\angle ACD = \angle ADC$
लेकिन $\angle ABC = 45°$
अत: $\angle ADC = 45°$

चरण 4. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA$
अत:, $\angle BCD = 45° + 45°$
$\angle BCD = 90°$
अत: $\angle BCD = 90°$.

प्रश्न 16. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें ∠A = 90° और AB = AC है। ∠B और ∠C के मान ज्ञात कीजिए।

संकेत : पृष्ठ 47 पर प्रश्न 7 देखें।

प्रश्न 17. यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा बढ़ा दी जाए, तो इस प्रकार बना बहि:कोण, अन्तराभिमुख (अन्त:) कोणों के योग के बराबर होता है। सिद्ध कीजिए।

हल : दिया है : ΔABC में, BC को D तक बढ़ाया गया है।

सिद्ध करना है : $\angle ACD = \angle A + \angle B$

प्रमाण : त्रिभुज ABC में,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

अब, $\angle ACD$ और $\angle C$ एक सीधी रेखा पर स्थित हैं, अत: ये सम्पूरक कोण हैं।

$\angle ACD + \angle C = 180°$ ...(i)

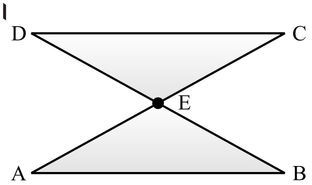
(i) में $\angle C$ का मान रखें,

$\angle ACD + (180° - (\angle A + \angle B)) = 180°$

$\angle ACD = \angle A + \angle B$

अत: सिद्ध हुआ कि, त्रिभुज का बहि:कोण उसके असन्निकट अन्त: कोणों के योग के बराबर होता है।

प्रश्न 18. आकृति में यदि AB || CD तथा E भुजा AC का मध्य बिंदु है, तो सिद्ध कीजिए कि E, भुजा BD का भी मध्य बिंदु होगा।



हल : दिया है, AB || CD

E, AC का मध्य बिंदु है।

अर्थात्, AE = EC

सिद्ध करना है : E, BD का मध्य बिंदु है।

अर्थात्, BE = ED

प्रमाण : त्रिभुज AEB और त्रिभुज CED पर विचार करें।

AE = EC (दिया है)

AB || CD होने के कारण,

$\angle AEB = \angle CED$ (अन्त: एकांतर कोण)

$\angle ABE = \angle CDE$ (सम्बद्ध कोण)

अत:, त्रिभुज AEB $\cong$ त्रिभुज CED

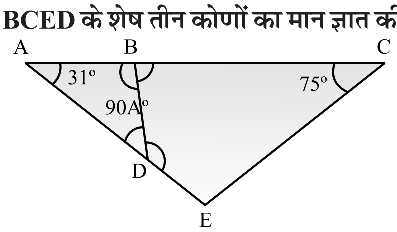
(ASA सर्वांगसमता नियम से)

सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ बराबर होती हैं।

इसलिए, BE = ED

अत: सिद्ध हुआ कि E, BD का मध्य बिंदु है।

प्रश्न 19. नीचे दिए गए चित्र में यदि $\angle BCE = 75°$ हो, तो चतुर्भुज BCED के शेष तीन कोणों का मान ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है : $\angle BCE = 75°$

चित्र से स्पष्ट है कि :

AB और BC एक सीधी रेखा पर हैं।

B पर दिया गया कोण = 98°

A पर दिया गया कोण = 31°

चरण 1. $\angle CBD$ ज्ञात करें

B पर बने कोण एक सीधी रेखा पर हैं, अत: वे सम्पूरक होंगे।

$\angle ABD + \angle DBC = 180°$

$98° + \angle DBC = 180°$

$\angle DBC = 180° - 98° = 82°$

अब $\angle BDA = 180° - 31° - 98°$

$= 180° - 129° = 51°$

$\therefore$ $\angle BDA = 51°$

चित्र के अनुसार,

$\angle BDE = \angle DAB + \angle DBA$

$= 31° + 98° = 129°$

चरण 2. ΔBDE में कोण ज्ञात करे

D पर बना कोण = $\angle CDB = 98°$

त्रिभुज के कोणों का योग = 180°

$\angle C + \angle A + \angle E = 180°$

$75° + 31° + \angle E = 180°$

$\angle E = 180° - 75° - 31°$

$\angle E = 180° - 106° = 74°$

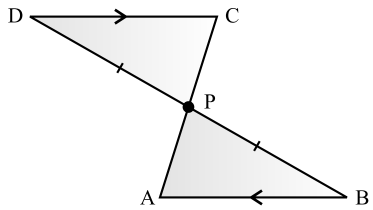
चरण 3. चतुर्भुज BCED के कोण लिखें

अत: $\angle B = 82°$

$\angle D = 129°$

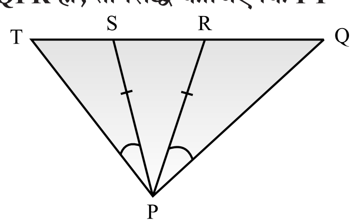
$\angle E = 74°$

प्रश्न 20. सम्मुख आकृति में, यदि AB || DC और P, BD का मध्य बिंदु है, तो सिद्ध कीजिए कि P, AC का भी मध्य बिंदु है।



हल : पाठ्य पुस्तक उदाहरण 4, पृष्ठ संख्या 89 देखें।

प्रश्न 21. सम्मुख आकृति में, यदि PS = PR तथा $\angle TPS = \angle QPR$ हों, तो सिद्ध कीजिए कि PT = PQ।



हल : पाठ्य पुस्तक उदाहरण 13, पृष्ठ संख्या 93 देखें।

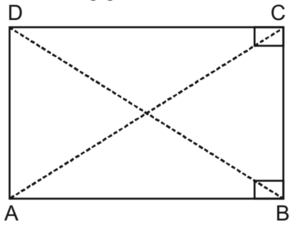
❑❑

8 चतुर्भुज

प्रश्नावली 8·1

1. यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों, तो दर्शाइये कि वह एक आयत है।

दिया है : समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में,



$AC = BD.$

सिद्ध करना है : $ABCD$ एक आयत है।

उपपत्ति : ΔABC और ΔDCB में ज्ञात है

$AB = DC$ [समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ]

$BC = BC$ [उभयनिष्ठ]

व $AC = DB$ [दिया है]

$\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (SSS नियम)

$\Rightarrow \angle ABC = \angle DCB$ ...(i)

[सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग बराबर होते हैं]

लेकिन $AB \parallel DC$ और BC उनको काटती है।

$\therefore \angle ABC + \angle DCB = 180°$ ...(ii)

[क्रमागत आन्तरिक कोण युग्म]

$\Rightarrow 2\angle ABC = 180°$

$\Rightarrow \angle ABC = 90°$

इसी प्रकार, $\angle ABC = \angle DCB = 90°$

$\Rightarrow$ $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है, जिसका प्रत्येक कोण 90° है।

$\therefore$ **$ABCD$ एक आयत है। इति सिद्धम्।**

2. दर्शाइए कि एक वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

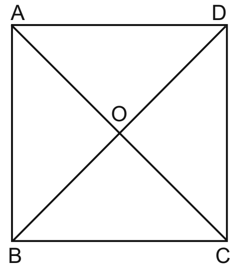
दिया है : वर्ग$ABCD$ में विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : $AC = BD$ और $\angle AOB = 90°$.

उपपत्ति : $ABCD$ एक वर्ग है।

$\therefore AB = BC = CD = DA$

और $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.



तब ΔABC और ΔBCD समकोण त्रिभुज हैं।

अब ΔABC और ΔBCD में,

$AB = CD$ (वर्ग की भुजाएँ)

$\angle B = \angle C$ (वर्ग के कोण)

$BC = BC$ (उभयनिष्ठ)

$\because \Delta ABC \cong \Delta BCD$ (SAS नियम)

$\therefore$ $\boldsymbol{AC = BD}$

$\because$ $ABCD$ एक वर्ग है।

$\therefore AB = BC = CD = DA$

$\therefore AB = CD$ और $BC = DA$

$\therefore$ $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज भी है।

$\therefore$ इसके विकर्ण AC तथा BD परस्पर (बिन्दु O पर) समद्विभाजित करेंगे।

$\therefore AO = BO = CO = DO$

अब ΔAOB और ΔBOC में,

$AO = CO$ (सिद्ध किया)

$AB = BC$ (वर्ग की भुजाएँ)

$BO = BO$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta BOC$

$\Rightarrow \angle AOB = \angle BOC$ ...(1)

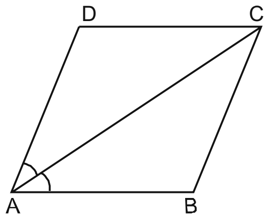
परन्तु AOC तिर्यक रेखा है।

$\therefore \angle AOB + \angle BOC = 180°$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से, $\boldsymbol{\angle AOB = 90°}$

अत: **वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। इति सिद्धम्।**

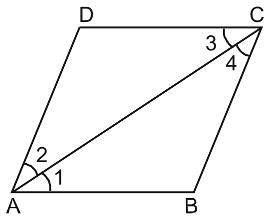
3. समान्तर चतुर्भुज *ABCD* का विकर्ण *AC* कोण *A* को समद्विभाजित करता है (देखिए आकृति)। दर्शाइये कि :



(i) यह $\angle C$ को भी समद्विभाजित करता है।

(ii) *ABCD* एक समचतुर्भुज है।

हल : (i) दिया है : चतुर्भुज *ABCD* जिसमें विकर्ण *AC*, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।



सिद्ध करना है : विकर्ण *AC*, $\angle C$ को समद्विभाजित करता है।

उपपत्ति : $\because$ *ABCD* एक समान्तर चतुर्भुज है, अत: $AB \parallel DC$ है।

अब $AB \parallel DC$ और *AC* उन्हें काटता है।

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 3$ [एकान्तर कोण] ...(i)

पुन: $AD \parallel BC$ और *AC* उन्हें काटता है।

$\therefore \quad \angle 2 = \angle 4$ [एकान्तर कोण] ...(ii)

किन्तु *AC*, $\angle A$ का समद्विभाजक है।

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 2$ ...(iii)

समीकरण (i), (ii) और (iii) से,

$\angle 3 = \angle 4$

अत: **विकर्ण *AC*, $\angle C$ को समद्विभाजित करता है।**

(ii) सिद्ध करना है : *ABCD* एक समचतुर्भुज है।

समीकरण (i), (ii) और (iii) से,

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$

अब ΔABC में,

$\angle 1 = \angle 4$

$\Rightarrow \quad AB = BC$ ...(iv)

[त्रिभुज में समान कोणों के सामने की भुजाएँ]

इसी प्रकार ΔADC में,

$AD = DC$ ...(v)

और *ABCD* एक समान्तर चतुर्भुज है,

$\therefore \quad AB = CD$ और $AD = BC$ ...(vi)

समी. (iv), (v) व (vi) से,

$AB = BC = CD = DA.$

अत: ***ABCD* एक समचतुर्भुज है।** **इति सिद्धम्।**

4. *ABCD* एक आयत है जिसमें विकर्ण *AC* दोनों कोणों *A* और *C* को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि

(i) *ABCD* एक वर्ग है।

(ii) विकर्ण *BD* दोनों कोणों *B* और *D* को समद्विभाजित करता है।

हल : दिया है : *ABCD* एक आयत है जिसमें $\angle 1 = \angle 2$ तथा $\angle 3 = \angle 4$ है।

सिद्ध करना है : *ABCD* एक वर्ग है।

$\angle 1 = \angle 4$ ...(1) [$\because$ एकांतर कोण]

$\angle 3 = \angle 4$ ...(2) [$\because$ दिया है]

$\angle 1 = \angle 3$ ...(3)

[$\because$ समीकरण (1) और (2) से]

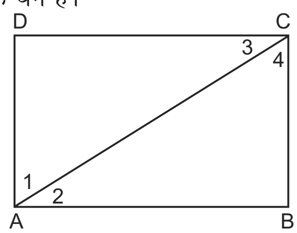
ΔADC में,

$\angle 1 = \angle 3$ [$\because$ समीकरण (3) से]

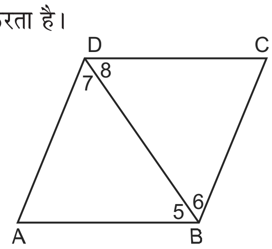
$DC = AD$

[$\because$ त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।]

एक आयत जिसकी आसन्न भुजाएँ समान हों, वर्ग होता है अत:, *ABCD* एक वर्ग है।



(ii) सिद्ध करना है : विकर्ण *BD* दोनों कोणों *B* और *D* को समद्विभाजित करता है।



$\angle 5 = \angle 8$ ...(4) [$\because$ एकांतर कोण]

ΔADB में,

$AB = AD$ [$\because$ *ABCD* एक वर्ग है]

$\angle 7 = \angle 5$ ...(5)

[$\because$ त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं]

अतः, $\angle 7 = \angle 8$ ...(6)

[$\because$ समीकरण (4) और (5) से]

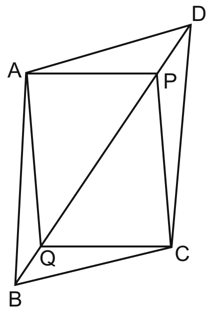
तथा $\angle 7 = \angle 6$ ...(7) [$\because$ एकांतर कोण]

अतः, $\angle 5 = \angle 6$ ...(8)

[$\because$ समीकरण (5) और (7) से]

अतः, समीकरण (6) और (8) से, विकर्ण BD दोनों कोणों B और D को सद्विभाजित करता है।

5. समान्तर चतुर्भुज *ABCD* के विकर्ण *BD* पर दो बिन्दु *P* और *Q* इस प्रकार स्थित हैं कि *DP = BQ* है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि :



(i) $\Delta APD \cong \Delta CQB$

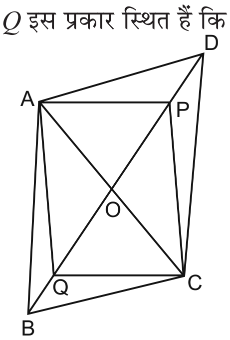
(ii) *AP = CQ*

(iii) $\Delta AQB \cong \Delta CPD$

(iv) *AQ = CP*

(v) *APCQ* एक समान्तर चतुर्भुज है।

हल : दिया है : *ABCD* एक समान्तर चतुर्भुज है। विकर्ण *BD* पर बिन्दु *P* और *Q* इस प्रकार स्थित हैं कि *DP = BQ*.



सिद्ध करना है :

(i) $\Delta APD \cong \Delta CQB$

(ii) *AP = CQ*

(iii) $\Delta AQB \cong \Delta CPD$

(iv) *AQ = CP*

(v) *APCQ* एक समान्तर चतुर्भुज है।

रचना : *A* और *C* को मिलाया जो *BD* से *O* बिन्दु पर मिलती है।

उपपत्ति : (i) ΔAPD और ΔCQB में,

$AD = CB$

[समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ]

$\angle QBC = \angle ADP$ (एकान्तर कोण)

$DP = BQ$ [दिया है]

$\Delta APD \cong \Delta CQB.$ (SAS नियम)

इति सिद्धम्।

$AP = CQ$ [सर्वांगसम Δ के संगत भाग]

(ii) $AP = CQ$ [सिद्ध किया गया है।]

(iii) ΔAQB और ΔCPD में,

$\because$ $AB = CD$

[समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ]

$\angle ABQ = \angle CDP$ [$AB \parallel CD$]

[एकान्तर कोण हैं]

और $BQ = DP$ [दिया है]

$\Delta AQB \cong \Delta CPD.$ (SAS नियम)

इति सिद्धम्।

(iv) $\because \Delta AQB \cong \Delta CPD,$

$\therefore$ ***AQ = CP*** [सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग]

इति सिद्धम्।

(v) चूँकि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण *AC* तथा *BD* एक दूसरे को बिन्दु *O* पर समद्विभाजित करते हैं।

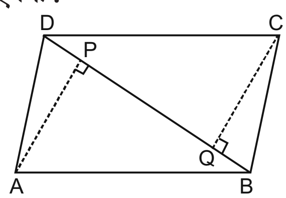
$\therefore$ $OB = OD$

किन्तु $BQ = DP$ [दिया है]

$\Rightarrow$ $OB - BQ = OD - DP$ या ***OQ = OP***

इति सिद्धम्।

6. *ABCD* एक समान्तर चतुर्भुज है तथा *AP* और *CQ* शीर्षों *A* और *C* से विकर्ण *BD* पर क्रमशः लम्ब हैं (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि :



(i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$ तथा

(ii) *AP = CQ*.

हल : (i) $\because$ *ABCD* समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $DC \parallel AB$

$\because$ $DC \parallel AB$ और तिर्यक रेखा *BD* उन्हें *B* और *D* पर प्रतिच्छेदित करती है।

$\therefore$ $\angle ABD = \angle BDC$ [एकान्तर कोण]

अब, ΔAPB और ΔCQD में,

$\angle ABP = \angle QDC$ [$\because \angle ABD = \angle BDC$]

$\angle APB = \angle CQD$ [प्रत्येक 90°]

और $AB = CD$

[समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ]

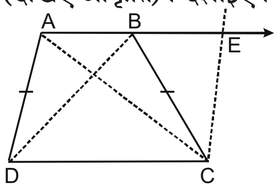
$\Delta APB \cong \Delta CQD$. (AAS नियम)

इति सिद्धम्।

(ii) $\because$ $\Delta APB \cong \Delta CQD$

$\therefore$ $AP = CQ$ **इति सिद्धम्।**

7. *ABCD* एक समलम्ब चतुर्भुज है, जिसमें *AB* || *DC* और *AD* = *BC* है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि :



(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

(iv) विकर्ण *AC* = विकर्ण *BD* है।

[संकेत : *AB* को बढ़ाइए और *C* से होकर *DA* के समान्तर एक रेखा खींचिए, जो बढ़ी हुई भुजा *AB* को *E* पर प्रतिच्छेद करे।**]**

हल : दिया है : *ABCD* एक समलम्ब चतुर्भुज है, जिसमें *AB* || *DC* और *AD* = *BC* है।

सिद्ध करना है :

(i) $\angle A = \angle B$.

(ii) $\angle C = \angle D$.

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$.

(iv) विकर्ण *AC* = विकर्ण *BD* है।

रचना : *AB* को *E* तक इस प्रकार आगे बढ़ाया कि *AE* = *DC* और *CE* || *AD* खींची।

उपपत्ति : (i) $\because$ *AD* || *CE* और तिर्यक रेखा *AE* उन्हें क्रमश: *A* और *E* पर प्रतिच्छेदित करती है।

$\therefore$ $\angle A + \angle E = 180°$ ...(i)

(अन्त: संगत कोण)

चूँकि *AB* || *CD* और *AD* || *CE*, अत: *AECD* समान्तर चतुर्भुज है।

$\Rightarrow$ $AD = CE$

$\Rightarrow$ $BC = CE$

तथा $AD = BC$

(दिया है)

इस प्रकार, ΔBCE में,

$BC = CE$

$\Rightarrow$ $\angle CBE = \angle CEB$

(समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

$\Rightarrow$ $180° - \angle B = \angle E$

$\Rightarrow$ $\angle B + \angle E = 180°$ ...(ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से,

$\angle A = \angle B$. **इति सिद्धम्।**

$\angle A + \angle E = \angle B + \angle E$

(ii) $\because$ $\angle A = \angle B$

$\Rightarrow$ $\angle BAD = \angle ABC$

$\Rightarrow$ $180° - \angle BAD = 180° - \angle ABC$

$\Rightarrow$ $\angle ADC = \angle BCD$

$\Rightarrow$ $\angle D = \angle C$ **इति सिद्धम्।**

(iii) ΔABC और ΔBAD में,

$\because$ $BC = AD$ [दिया है]

$AB = BA$ [उभयनिष्ठ]

तथा $\angle A = \angle B$ [सिद्ध किया है]

$\Delta ABC \cong \Delta BAD$. (SAS नियम)

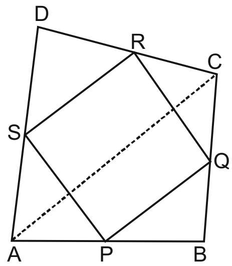
इति सिद्धम्।

(iv) $\because$ $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

$\therefore$ $AC = BD$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्नावली 8·2

1. *ABCD* एक चतुर्भुज है, जिसमें *P*, *Q*, *R* और *S* क्रमशः भुजाओं *AB*, *BC*, *CD* एवं *DA* के मध्य-बिन्दु हैं (देखिए आकृति)। *AC* उसका एक विकर्ण है। दर्शाइए कि :



(i) $SR \parallel AC$ **और** $SR = \frac{1}{2}AC$

(ii) $PQ = SR$

(iii) *PQRS* एक समान्तर चतुर्भुज है।

हल : दिया है : चतुर्भुज *ABCD* में, *P*, *Q*, *R* और *S* क्रमश: भुजाओं *AB*, *BC*, *CD* और *DA* के मध्य-बिन्दु हैं, साथ ही *AC* इसका विकर्ण है।

सिद्ध करना है : (i) $SR \parallel AC$ और $SR = \frac{1}{2} AC$.

(ii) $PQ = SR$ तथा

(iii) $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : (i) ΔACD में,

AD का मध्य-बिन्दु S है और CD का मध्य-बिन्दु R है।

तब $\boldsymbol{SR \parallel AC}$ **और** $\boldsymbol{SR = \frac{1}{2} AC}$ **इति सिद्धम्।**

(ii) ΔABC में, भुजा AB का P मध्य-बिन्दु है और भुजा BC का मध्य-बिन्दु Q है।

तब $PQ \parallel AC$ और $PQ = \frac{1}{2} AC$

इसी प्रकार,

$$\left.\begin{array}{r} PQ \parallel AC \\ SR \parallel AC \end{array}\right\} \text{ या } PQ \parallel SR$$

इसी प्रकार, $$\left.\begin{array}{r} PQ = \frac{1}{2} AC \\ SR = \frac{1}{2} AC \end{array}\right\} \text{ या } \boldsymbol{PQ = SR}$$

इति सिद्धम्।

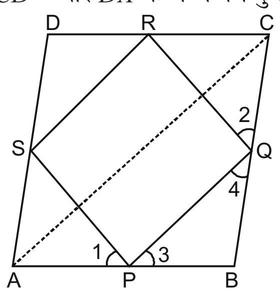
(iii) $\because PQ = SR$ और $PQ \parallel SR$

(सम्मुख भुजा युग्म)

अतः $\boldsymbol{PQRS}$ एक समान्तर चतुर्भुज है। इति सिद्धम्।

2. $\boldsymbol{ABCD}$ एक समचतुर्भुज है और $\boldsymbol{P, Q, R}$ और $\boldsymbol{S}$ क्रमशः भुजाओं $\boldsymbol{AB, BC, CD}$ और $\boldsymbol{DA}$ के मध्य-बिन्दु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज $\boldsymbol{PQRS}$ एक आयत है।

हल : दिया है : सम चतुर्भुज $ABCD$ में P, Q, R और S क्रमशः AB, BC, CD और DA के मध्य-बिन्दु हैं।



सिद्ध करना है : $PQRS$ एक आयत है।

रचना : PQ, QR, RS तथा SP को मिलाया। तथा A को C से मिलाया।

उपपत्ति : ΔABC में P और Q, रेखा AB और BC के मध्य-बिन्दु हैं।

$\therefore \quad PQ \parallel AC$ तथा $PQ = \frac{1}{2} AC \quad \ldots$(i)

इसी प्रकार, ΔADC में, R और S, रेखा CD और AD के मध्य-बिन्दु हैं।

$\therefore \quad SR \parallel AC$ और $SR = \frac{1}{2} AC \quad \ldots$(ii)

समीकरण (i) और (ii) से,

$PQ \parallel RS$ और $PQ = SR \quad \ldots$(iii)

अब, चतुर्भुज $PQRS$ की सम्मुख भुजाएँ PQ और SR बराबर और समान्तर है।

$\therefore PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है। $\ldots$(iv)

$\therefore \quad AB = BC$ [समचतुर्भुज की भुजाएँ]

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC$ या $PB = BQ$

$\Rightarrow \quad \angle 3 = \angle 4$

(समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

अब, ΔAPS और ΔCQR में,

$\because \quad AP = CQ$

[समान्तर भुजाओं AB, BC के अर्द्धक]

$AS = CR$

[समान भुजाओं AD तथा CD के अर्द्धक]

तथा $\quad PS = QR$

[समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ की सम्मुख भुजाएँ]

$\therefore \quad \Delta APS \cong \Delta CQR,$ [SSS नियम]

$\Rightarrow \quad \angle 1 = \angle 2$

अब, $\angle 1 + \angle SPQ + \angle 3 = 180°$

[रैखिक युग्म स्वतः सिद्ध]

$\therefore \angle 1 + \angle SPQ + \angle 3 = \angle 2 + \angle PQR + \angle 4$

लेकिन $\quad \angle 1 = \angle 2$ और $\angle 3 = \angle 4$

[सिद्ध किया है]

$\therefore \quad \angle SPQ = \angle PQR \quad \ldots$(iii)

$\therefore \quad \angle SPQ + \angle PQR = 180° \quad \ldots$(iv)

समीकरण (iii) एवं (iv) से,

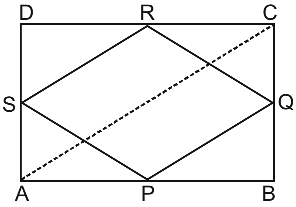
$\angle SPQ = \angle PQR = 90°$

इस प्रकार, $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है, जिसका एक कोण $SPQ = 90°$

अतः $\boldsymbol{PQRS}$ एक आयत है। इति सिद्धम्।

3. $\boldsymbol{ABCD}$ एक आयत है, जिसमें $\boldsymbol{P, Q, R}$ और $\boldsymbol{S}$ क्रमशः भुजाओं $\boldsymbol{AB, BC, CD}$ और $\boldsymbol{DA}$ के मध्य-बिन्दु हैं। दर्शाइए कि चतुर्भुज $\boldsymbol{PQRS}$ एक समचतुर्भुज है।

हल : दिया है : आयत $ABCD$ में P, Q, R और S भुजाओं AB, BC, CD और DA के क्रमशः मध्य-बिन्दु हैं। चतुर्भुज $PQRS$ प्राप्त करने के लिए PQ, QR, RS और SP को मिलाया।



सिद्ध करना है : $PQRS$ एक समचतुर्भुज है।

रचना : PQ, QR, RS तथा SP को मिलाया। तथा A को C से मिलाया।

उपपत्ति : ΔABC में P और Q, भुजाओं AB और BC के मध्य-बिन्दु हैं।

$\therefore \quad PQ \parallel AC$

और $\quad PQ = \frac{1}{2} AC \quad$ ...(i)

इसी प्रकार, ΔADC में R और S, भुजाओं CD और AD के मध्य-बिन्दु हैं।

$\therefore \quad SR \parallel AC$ और $SR = \frac{1}{2} AC \quad$ ...(ii)

समीकरण (i) और (ii) से,

$PQ \parallel SR$ और $PQ = SR \quad$ ...(iii)

अब, चतुर्भुज $PQRS$ में इसकी सम्मुख भुजाओं PQ और SR का एक युग्म समान्तर और समान है।

[समीकरण (iii) से]

$\Rightarrow$ $PQRS$ एक समान्तर चतुर्भुज है। ...(iv)

अब $\quad AD = BC$

[आयत $ABCD$ की सम्मुख भुजाएँ]

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} BC$ या $AS = BQ$

ΔAPS और ΔBPQ में,

$\because \quad AP = BP$

[$\because$ P रेखा AB का मध्य-बिन्दु है]

$\angle PAS = \angle PBQ \quad$ [प्रत्येक 90°]

तथा $\quad AS = BQ \quad$ (दिया है)

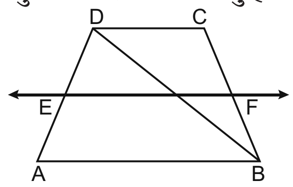
$\therefore \quad \Delta APS \cong \Delta BOQ \quad$ (SAS नियम)

$\Rightarrow \quad PS = PQ \quad$ ...(v)

समीकरण (iv) और (v) से,

***PQRS* समचतुर्भुज हैं।** **इति सिद्धम्।**

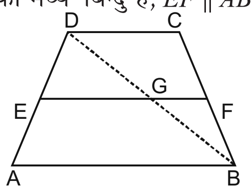
4. *ABCD* एक समलम्ब है, जिसमें *AB* || *DC* है, साथ ही, *BD* एक विकर्ण है और *E*, भुजा *AD* का मध्य-बिन्दु है। *E* से होकर एक रेखा *AB* के समान्तर खींची गई है, जो *BC* को *F*, पर प्रतिच्छेदित करती है (देखिए आकृति)। दर्शाइए कि *F* भुजा *BC* का मध्य-बिन्दु है।



हल : दिया है : समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ में,

$AB \parallel DC$

E, भुजा AD का मध्य-बिन्दु है, $EF \parallel AB$.



सिद्ध करना है : F, BC का मध्य-बिन्दु है।

रचना : D और B को मिलाया। DB रेखाखण्ड EF को G पर काटता है।

उपपत्ति : ΔDAB में, E भुजा AD का मध्य-बिन्दु है।

[दिया है]

$EG \parallel AB \quad [\because EF \parallel AB]$

$\therefore$ (विलोम मध्य-बिन्दु प्रमेय) G, भुजा DB का मध्य-बिन्दु है।

ΔBCD में, G भुजा BD का मध्य-बिन्दु है।

$GF \parallel DC$

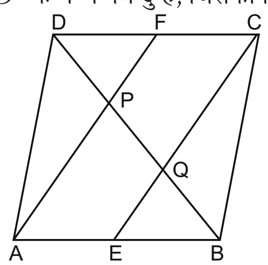
[$\because$ $AB \parallel DC$, $EF \parallel AB$ या $DC \parallel EF$]

$\therefore$ (विलोम मध्य-बिन्दु प्रमेय)

***F*, भुजा *BC* का मध्य-बिन्दु है।** **इति सिद्धम्।**

5. एक समान्तर चतुर्भुज *ABCD* में *E* और *F* क्रमशः भुजाओं *AB* और *CD* के मध्य-बिन्दु हैं (देखिए आकृति। दर्शाइए कि रेखाखण्ड *AF* तथा *EC*, विकर्ण *BD* को समत्रिभाजित करते हैं।

हल : दिया है : समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में E और F, भुजाओं AB और CD के मध्य-बिन्दु हैं, जिसका विकर्ा BD है।



सिद्ध करना है :

$BQ = QP = PD$.

उपपत्ति : $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है। [दिया है]

$\therefore \quad AB \parallel DC$ और $AB = DC$, [समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ]

E, भुजा AB का मध्य-बिन्दु है। [दिया है]

$\therefore \quad AE = \frac{1}{2} AB \quad ...(i)$

F, CD का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore \quad CF = \frac{1}{2} CD$

$\Rightarrow \quad CF = \frac{1}{2} AB \quad ...(ii)$

$[\because CD = AB]$

समीकरण (i) एवं (ii) से,

$AE = CF$

साथ ही, $AE \parallel CF$ $[\because AB \parallel DC]$

$\therefore$ $AECF$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\Rightarrow \quad EC \parallel AF$

$\Rightarrow \quad EQ \parallel AP$ और $QC \parallel PF$

ΔBPA में, E, भुजा AB का मध्य-बिन्दु है। [दिया है]

$EQ \parallel AP$

$\therefore \quad BQ = QP \quad ...(iii)$

[मध्य-बिन्दु प्रमेय का प्रतिलोम]

इसी प्रकार, ΔCQD में सिद्ध किया जा सकता है कि

$DP = QP \quad ...(iv)$

समीकरण (iii) एवं (iv) से,

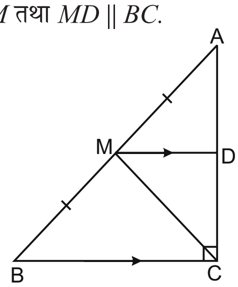
$BQ = QP = PD$ **इति सिद्धम्।**

6. ABC एक त्रिभुज है, जिसका कोण C समकोण है। कर्ण AB के मध्य-बिन्दु M से होकर BC के समान्तर खींची गई रेखा AC को D पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि

(i) D भुजा AC का मध्य-बिन्दु है।

(ii) $MD \perp AC$ (iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$ है।

हल : दिया है : समकोण ΔABC में $\angle C = 90°$, कर्ण AB का मध्य बिन्दु M तथा $MD \parallel BC$.



सिद्ध करना है :

(i) $AD = DC$

(ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$

उपपत्ति : (i) ΔABC में, M भुजा AB का मध्य-बिन्दु है और $MD \parallel BC$, अत: D, भुजा AC का भी मध्य-बिन्दु है।

(मध्य-बिन्दु प्रमेय का विलोम)

अत: $\mathbf{AD = DC}$ ...(i) **इति सिद्धम्।**

(ii) $\because \quad MD \parallel BC$

अत: $\angle ADM = \angle ACB$ (संगत कोण)

$\Rightarrow \quad \angle ADM = 90°$

$[\because \angle ACB = 90°$ (दिया है)$]$

परन्तु $\angle ADM + \angle CDM = 180°$

(रैखिक कोण युग्म)

$\therefore \quad 90° + \angle CDM = 180°$

$\angle CDM = 180° - 90°$

$\Rightarrow \quad \angle CDM = 90°$

इस प्रकार, $\angle ADM = \angle CDM = 90° \quad ...(ii)$

$\Rightarrow \quad \mathbf{MD \perp AC.}$ **इति सिद्धम्।**

(iii) ΔAMD और ΔCMD में,

$AD = CD$ [समीकरण (i) से]

$\angle ADM = \angle CDM$ [समीकरण (ii) से]

और $MD = MD$ [उभयनिष्ठ]

$\Delta AMD \cong \Delta CMD$ (SAS नियम)

$\Rightarrow \quad \therefore MA = MC$

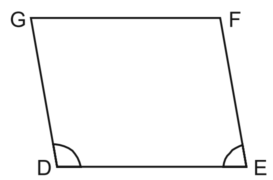
साथ ही, $MA = \frac{1}{2} AB$, चूँकि M भुजा AC का मध्य-बिन्दु है।

$\therefore \quad \mathbf{CM = MA = \frac{1}{2} AB.}$ **इति सिद्धम्।**

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. दिय गये गये चित्र में $\angle GDE + \angle DEF = 180°$, इस स्थिति में कौन-सी रेखाएँ समान्तर होंगी ?



हल : चित्र में, रेखाखण्ड DE एक तिर्यक रेखा है जो रेखा GD और FE को मिलती है। दिया गया है : $\angle GDE + \angle DEF = 180°$ यह 'क्रमागत अन्तः कोणों' का योग है। हम जानते हैं कि यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे और एक ही ओर के अन्तः कोणों का योग 180° हो, तो वे रेखाएँ समान्तर होती हैं। अतः GD समान्तर है FE के (GD || FE)।

प्रश्न 2. यदि एक आयत की आसन्न भुजाएँ समान हों तो आकृति क्या कहलाती है?

हल : वर्ग

प्रश्न 3. आयत, समान्तर चतुर्भुज, वर्ग, समचतुर्भुज, समलम्ब चतुर्भुज में से किसमें "विकर्ण उन कोणों के अर्द्धक होते हैं जिनमें से होकर वे गुजरते हैं ?" उनके नाम लिखिए।

हल : (1) वर्ग (2) समचतुर्भुज

प्रश्न 4. किसी आयत ABCD के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेदित करते हैं। यदि $\angle BOC = 40°$ हो तो $\angle OAD$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\angle AOD$ और $\angle BOC$ शीर्षाभिमुख कोण हैं।

$\therefore \quad \angle AOD = \angle BOC = 40°$

ΔAOD एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें समान भुजाओं के सामने के कोण बराबर होंगे :

$$\angle OAD = \angle ODA$$

ΔAOD में,

$$\angle OAD + \angle ODA + \angle AOD = 180°$$

$\Rightarrow \quad \angle OAD + \angle OAD + 40° = 180°$

$\Rightarrow \quad 2\angle OAD = 140°$

$\Rightarrow \quad \angle OAD = \frac{140°}{2} = 70°$

प्रश्न 5. समान्तर चतुर्भुज ABCD में यदि $\angle D = 115°$ हो तो $\angle A$ तथा $\angle B$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : समान्तर चतुर्भुज ABCD,

$$\angle B = \angle D, \ \angle D = 115°$$

समान्तर चतुर्भुज के किन्हीं दो आसत्र कोणों का योग 180° होता है।

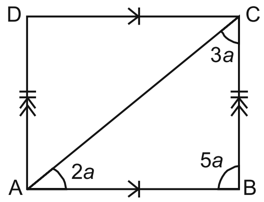
$\Rightarrow \quad \angle A + \angle D = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle A + 115° = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle A = 180° - 115°$

$\Rightarrow \quad \angle A = 65°.$

प्रश्न 6. संलग्न आकृति के अनुसार ΔABC में $\angle A$, $\angle B$ तथा $\angle C$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल : ΔABC में,

$$2a + 3a + 5a = 180°$$

$\Rightarrow \quad 10a = 180°$

$\Rightarrow \quad a = 18°$

तब $2a = 36°$, $3a = 54°$ और $5a = 90°$।

प्रश्न 7. यदि समान्तर चतुर्भुज का एक कोण सबसे छोटे कोण के दुगुने से 24° कम हो, तो समान्तर चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल : माना समान्तर चतुर्भुज का सबसे छोटा कोण = $x°$

प्रश्नानुसार, दूसरा आसन्न कोण (जो बड़ा है) = $(2x - 24)°$

समान्तर चतुर्भुज के किन्हीं दो आसन्न कोणों का योग 180° होता है।

$\Rightarrow \quad x° + (2x° - 24°) = 180°$

हल करने पर,

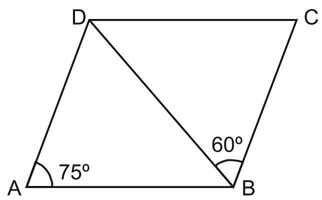
$\Rightarrow \quad x° = 68°$

अतः (1) पहला कोण (सबसे छोटा) = 68°

(2) दूसरा कोण = $2(68°) - 24° = 136° - 24° = 112°$

हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं। अतः चारों कोण क्रमशः 68°, 112°, 68°, 112° होंगे।

प्रश्न 8. समान्तर चतुर्भुजाकार आकृति में $\angle DAB = 75°$ और $\angle DBC = 60°$ है, तो $\angle CDB$ और $\angle ADB$ का मान ज्ञात कीजिए।



हल : $\angle ADB$ के लिए, चूँकि AD || BC है और BD एक तिर्यक रेखा है। अतः एकांतर अन्तः कोण बराबर होंगे।

$$\angle ADB = \angle DBC$$

$\Rightarrow \quad \angle ADB = 60°$

$\angle CDB$ के लिए, चूँकि AB || DC है और BD एक तिर्यक रेखा है, तो $\angle CDB = \angle ABD$ होगा।

समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं, इसलिए

$$\angle C = \angle A = 75°$$

अब ΔBCD में कोण योग गुण से,

$$\angle CDB + \angle C + \angle DBC = 180°$$

$\Rightarrow \quad \angle CDB + 75° + 60° = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle CDB + 135° = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle CDB = 180° - 135°$

$\Rightarrow \quad \angle CDB = 45°$

अत: $\angle CDB = 45°$ तथा $\angle ADB = 60°$.

प्रश्न 9. आयत की विशेषताएँ लिखिए।

हल : आयत प्रत्येक कोण समकोण (90°) होता है।
इसकी सम्मुख भुजाएँ समान और समान्तर होती हैं।
विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

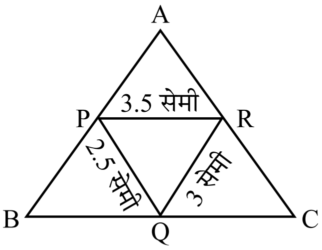
प्रश्न 10. समचतुर्भुज के गुण लिखिए।

हल : समचतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं।
इसके सम्मुख कोण बराबर होते हैं तथा विकर्ण परस्पर समकोण 90° पर समद्विभाजित करते हैं।

$AC \perp BD$

विकर्ण शीर्ष कोणों को भी समद्विभाजित करते हैं।

प्रश्न 11. सलग्न चित्र में, P, Q, R क्रमशः भुजाओं AB, BC तथा AC के मध्य बिन्दु है। यदि PQ = 2.5 सेमी, QR = 3·0 सेमी तथा PR = 3.5 सेमी है, तो AB, BC तथा AC की गणना करो।



संकेत : त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड, तीसरी भुजा के समान्तर और उसका आधा होता है।

(1) AC के लिए : P और Q क्रमशः AB और BC के मध्य बिंदु हैं।

$\therefore \quad PQ = \frac{1}{2}AC \Rightarrow 2.5 = \frac{1}{2}AC$

$AC = 2 \times 2.5 = 5.0$ सेमी।

(2) AB के लिए : Q और R क्रमशः BC और AC के मध्य बिंदु हैं।

$\therefore \quad QR = \frac{1}{2}AB \Rightarrow 3.0 = \frac{1}{2}AB$

$AB = 2 \times 3.0 = 6.0$ सेमी।

(3) BC के लिए : P और R क्रमशः AB और AC के मध्य बिंदु हैं।

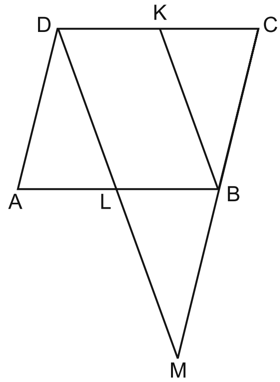
$\therefore \quad PR = \frac{1}{2}BC \Rightarrow 3.5 = \frac{1}{2}BC$

$BC = 2 \times 3.5 = 7.0$ सेमी

AB = 6 सेमी, BC = 7 सेमी, AC = 5 सेमी

प्रश्न 12. समचतुर्भुज ABCD में, K भुजा CD का मध्य बिन्दु है। DM को भुजा BK के समान्तर खींचा गया है जो CB को आगे बढ़ाने पर M पर मिलती है और AB को L पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध करो।

(i) $AD = \frac{1}{2}CM$ (ii) DM = 2BK.



संकेत : ΔCKB तथा ΔCMD में,

$\angle CBK = \angle CMD$

(संगत कोण, BK || DM, CB तिर्यक रेखा)

$\angle CKB = \angle CDM$

(संगत कोण, BK || DM, CD तिर्यक रेखा)

$\therefore \quad \angle CKB \sim \angle CMD$ (AA समरूपता)

समरूपता से,

$$\frac{CK}{CD} = \frac{CB}{CM} \text{ तथा } \frac{CK}{CD} = \frac{KB}{DM}$$

$CK = \frac{1}{2}CD,$

$CB = CD$ (समचतुर्भुज)

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{CD}{CM}$

$\Rightarrow \quad CM = 2CD$

परंतु $\quad CD = AD \Rightarrow CM = 2AD$

$\Rightarrow \quad AD = \frac{1}{2}CM$

साथ ही,

$\frac{1}{2} = \frac{KB}{DM}$

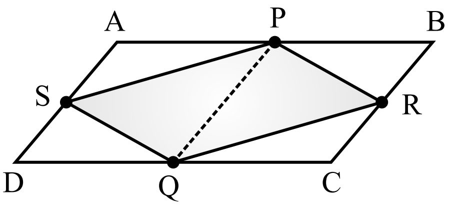
$\Rightarrow \quad DM = 2KB$

$\Rightarrow \quad DM = 2BK$

अत: $AD = \frac{1}{2}CM$ तथा $DM = 2BK$.

प्रश्न 13. ABCD में एक समान्तर चतुर्भुज है। P और Q क्रमशः सम्मुख-भुजाओं AB और CD तथा R और S क्रमशः सम्मुख भुजाओं BC तथा AD के मध्य-बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि PRQS एक समान्तर चतुर्भुज है।

हल : दिया है : समान्तर चतुर्भुज ABCD, P और Q क्रमशः सम्मुख भुजाओं AB और CD के मध्यबिंदु हैं।



PR और QS रेखाखंण्ड हैं जैसे आकृति में दिखाया गया है।

सिद्ध करना है : PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

(1) समान्तर चतुर्भुज ABCD में, AB || CD और AB = CD ।

P, AB का मध्यबिंदु है ⇒ $AP = PB = \frac{AB}{2}$

Q, CD का मध्यबिंदु है ⇒ $CQ = QD = \frac{CD}{2}$

∴ AP = CQ (क्योंकि AB = CD)

(2) AP और CQ समान और समान्तर हैं (AB || CD) ⇒ APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है (यदि एक चतुर्भुज की एक जोड़ी सम्मुख भुजाएँ बराबर और समान्तर हों, तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है)।

∴ AQ || PC ...(i)

(3) इसी प्रकार, PB = DQ और PB || DQ ⇒ PBQD एक समान्तर चतुर्भुज है।

∴ PD || QB ...(ii)

(4) चतुर्भुज PRQS में, भुजा PQ उभयनिष्ठ है।

(i) और (ii) से, AQ || PC और PD || QB ⇒ चतुर्भुज PRQS की सम्मुख भुजाएँ समान्तर हैं।

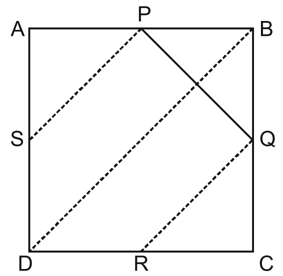
(5) अतः PRQS एक समान्तर चतुर्भुज है।

PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

प्रश्न 14. संलग्न चित्र में ABCD एक वर्ग है जिसमें, P, Q, R क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD के मध्य बिन्दु है, तो सिद्ध करो कि

(i) $\angle PQR = 90^o$

(ii) यदि P से गुजरने वाली रेखा QR के समान्तर भुजा AD को समद्विभाजित करती है।



हल : दिया है : वर्ग ABCD में P, Q, R क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD के मध्यबिंदु हैं।

P से QR के समान्तर रेखा खींची गई है जो AD को S पर काटती है।

सिद्ध करना है : (i) $\angle PQR = 90°$

(ii) S, AD का मध्यबिंदु है।

(i) $\angle PQR = 90°$

(1) मान लीजिए वर्ग की भुजा = $2a$ (मध्यबिंदु सुविधा के लिए)

⇒ $AB = BC = CD = DA = 2a$

(2) मध्यबिंदु : P, AB का मध्य ⇒ $AP = PB = a$

Q, BC का मध्य ⇒ $BQ = QC = a$

R, CD का मध्य ⇒ $CR = RD = a$

(3) ΔPBQ में :

$PB = BQ = a$

$\angle PBQ = 90°$ (वर्ग का कोण)

⇒ ΔPBQ समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है

⇒ $\angle BPQ = \angle BQP = 45°$ ...(i)

(4) ΔQCR में :

$QC = CR = a$

$\angle QCR = 90°$ (वर्ग का कोण)

⇒ ∠QCR समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है

⇒ $\angle CQR = \angle CRQ = 45°$ ...(ii)

(5) बिंदु Q पर कोण :

किरण QP, QB से 45° का कोण बनाती है (समीकरण i से)

किरण QR, QC से 45° का कोण बनाती है (समीकरण ii से)

QB और QC एक ही रेखा BC पर हैं (B, Q, C सरेख)

⇒ QP और QR के बीच का कोण = 45° + 45° = 90°

∴ $\angle PQR = 90°$

(ii) S, AD का मध्यबिंदु है

(1) ΔBCD में, Q, BC का मध्य, R, CD का मध्य

∴ मध्यबिंदु प्रमेय से,

QR || BD ...(iii)

(2) दिया है, PS || QR ...(iv)

(iii) और (iv) से,

$PS \parallel QR \parallel BD$

(3) ΔABD में,

P, AB का मध्यबिंदु है।

$PS \parallel BD$ (उपर्युक्त)

$\therefore$ किसी त्रिभुज में, यदि एक रेखा एक भुजा के मध्यबिंदु से होकर दूसरी भुजा के समान्तर जाए, तो वह तीसरी भुजा को उसके मध्यबिंदु पर काटती है।

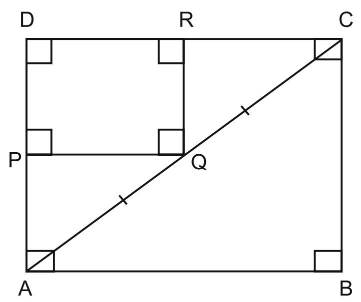
$\Rightarrow$ S, AD का मध्यबिंदु है।

(4) अत: S, AD का मध्यबिंदु है और $PS \parallel QR$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 15. दिये गये चित्र में ABCD तथा PQRD आयत है। AC आयत ABCD का विकर्ण है। यदि Q, AC का मध्य बिन्दु है। सिद्ध करो कि

(i) R, CD का मध्य बिन्दु है। (ii) AC = 2PR



हल : दिया है : आयत ABCD और आयत PQRD

AC, ABCD का विकर्ण है।

Q, AC का मध्यबिंदु है।

सिद्ध करना है : (i) R, CD का मध्यबिंदु है।

(ii) AC = 2PR

(i) R, CD का मध्यबिंदु

(1) चूँकि ABCD एक आयत है :

$AD \parallel BC, AB \parallel DC$

विकर्ण AC और BD बराबर हैं और एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(2) Q, AC का मध्यबिंदु है (दिया है)

$\Rightarrow$ आयत में विकर्णों के मध्यबिंदु समान होते हैं, अत: Q भी BD का मध्यबिंदु है।

(3) आयत PQRD में,

P और Q दिए हैं, R और D आयत के शीर्ष हैं।

चूँकि PQRD आयत है, इसके विकर्ण PR और QD बराबर हैं और एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(4) Q, BD का मध्यबिंदु है और Q आयत PQRD का एक शीर्ष है, तो Q से D तक एक भुजा है।

(5) आयत PQRD में, भुजाएँ $PQ \parallel DR$ और $QR \parallel PD$ (आयत की सम्मुख भुजाएँ)

(6) अब, D और C, ABCD में सलंग्र शीर्ष हैं।

R, PQRD में D के सामने वाला शीर्ष है।

(7) चूँकि Q, AC का मध्यबिंदु है।

$PQ \parallel AD$ (आयत PQRD और ABCD की समान्तर भुजाएँ)

$\Rightarrow$ P, AB का मध्यबिंदु हो सकता है।

(8) परंतु यदि P, AB का मध्य है और $PQ \parallel AD$, तो Q, BD का मध्य होगा—जो सत्य है।

(9) अब, R के लिए, चूँकि PQRD आयत है, DR = PQ और $DR \parallel PQ$।

और PQ, AB का आधा है यदि P मध्यबिंदु है।

(10) ΔDCR में,

यदि $DR \parallel AB$ और AB = DC (आयत), तथा $DR = \frac{AB}{2}$,

तो R, DC का मध्यबिंदु होगा। **इति सिद्धम्।**

(ii) AC = 2PR

(1) चूँकि R, CD का मध्यबिंदु है और P, AB का मध्यबिंदु है (चित्रानुसार), तो PR, AD और BC के समान्तर है (आयत में)।

(2) ΔACD में,

R, CD का मध्यबिंदु

Q, AC का मध्यबिंदु

$\therefore$ मध्यबिंदु प्रमेय से, $RQ \parallel AD$ और $RQ = \frac{AD}{2}$

(3) अब PQRD आयत है $\Rightarrow$ PR = QD (विकर्ण बराबर)

और Q, BD का मध्यबिंदु है $\Rightarrow QD = \frac{BD}{2}$

(4) आयत में AC = BD

$\Rightarrow \quad QD = \frac{AC}{2}$

(5) परंतु QD = PR

$\Rightarrow \quad PR = \frac{AC}{2}$

$\Rightarrow \quad AC = 2PR$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 16. सिद्ध करो कि किसी आयत के विकर्ण समान लम्बाई के होते हैं।

संकेत : ΔABC और ΔDCB में,

$AB = DC$ (आयत की सम्मुख भुजाएँ)

$BC = BC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ABC = \angle DCB = 90°$

(आयत का प्रत्येक कोण)

$\therefore$ भुजा-कोण-भुजा (SAS) सर्वांगसमता के नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta DCB$

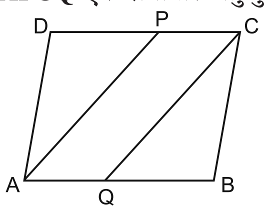
सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ बराबर होती हैं।

$\Rightarrow$ $AC = BD$

अत: आयत के विकर्ण समान लंबाई के होते हैं।

इति सिद्धम्।

प्रश्न 17. दिए गए चित्र में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। AP और CQ क्रमश: $\angle A$ और $\angle C$ के समद्विभाजक हैं। सिद्ध कीजिए कि APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।



संकेत : चरण 1. माना ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। AP, $\angle DAB$ का समद्विभाजक है जो DC को P पर काटता है। CQ, $\angle BCD$ का समद्विभाजक है जो AB को Q पर काटता है।

चरण 2. चूँकि ABCD समान्तर चतुर्भुज है :

$AB \parallel DC$ और $AD \parallel BC$

$\angle DAB = \angle BCD$ (सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

चरण 3. समद्विभाजक द्वारा बने कोण :

माना $\angle DAB = 2x$ और $\angle BCD = 2y$

समद्विभाजक AP $\Rightarrow \angle DAP = \angle PAB = x$

समद्विभाजक CQ $\Rightarrow \angle BCQ \Rightarrow \angle QCD = y$

चरण 4. चूँकि $AB \parallel DC$ और AC तिर्यक रेखा है :

$\angle BAC = \angle ACD$ (एकान्तर कोण)

लेकिन $\angle BAC = x$ (AP समद्विभाजक)

और $\angle ACD = y$ (CQ समद्विभाजक)

$\therefore$ $x = y$

चरण 5. $\angle PAC = x$ और $\angle ACQ = y$

चूँकि $x = y \Rightarrow \angle PAC = \angle ACQ$

ये एकान्तर कोण हैं जब AC तिर्यक रेखा है AP और CQ के लिए

$\therefore$ $AP \parallel CQ$ ...(i)

चरण 6. चूँकि $AB \parallel DC$ (समान्तर चतुर्भुज)

और AQ, AB का भाग है तथा PC, DC का भाग है।

$\therefore$ $AQ \parallel PC$ ...(ii)

अत: चतुर्भुज APCQ में,

$AP \parallel CQ$ [(i) से]

$AQ \parallel PC$ [(ii) से]

$\Rightarrow$ दोनों युग्म सम्मुख भुजाएँ समान्तर हैं।

अत: APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है। **इति सिद्धम्।**

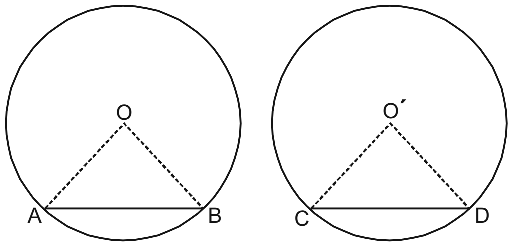
❑ ❑

9 वृत्त

प्रश्नावली 9·1

1. याद कीजिए कि दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी त्रिज्याएँ बराबर हों। सिद्ध कीजिए कि सर्वांगसम वृत्तों की बराबर जीवाएँ उनके केन्द्रों पर बराबर कोण अन्तरित करती हैं।

हल : दिया है : वृत्त $C(O, r) \cong$ वृत्त $C'(O' r)$ में जीवा $AB = CD$ द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण क्रमशः AOB तथा $CO'D$ हैं।



सिद्ध करना है : $\angle AOB = \angle CO'D$.

रचना : बिन्दुओं OA, OB, $O'C$ तथा $O'D$ को मिलाया।

उपपत्ति : ΔAOB तथा $\Delta CO'D$ में,

$AB = CD$ (दिया है)

$OA = O'C$ (सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ)

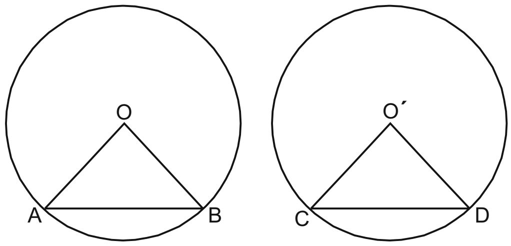
$OB = O'D$ (सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ)

$\therefore \quad \Delta AOB \cong \Delta CO'D$ (SSS नियम से)

अतः $\angle AOB = \angle CO'D$. **इति सिद्धम्।**

2. सिद्ध कीजिए कि यदि सर्वांगसम वृत्तों की जीवाएँ उनके केन्द्रों से बराबर कोण अन्तरित करें, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।

हल : दिया है : वृत्त $C(O, r) \cong$ वृत्त $C'(O' r)$ में जीवा $AB = CD$ द्वारा केन्द्र पर अन्तरित $\angle AOB = \angle CO'D$ है।



सिद्ध करना है : जीवा $AB =$ जीवा CD.

उपपत्ति : ΔAOB व $\Delta CO'D$ में,

$OA = O'C$

(सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ)

$OB = O'D$

(सर्वांगसम वृत्तों की त्रिज्याएँ)

$\angle AOB = \angle CO'D$ (दिया है)

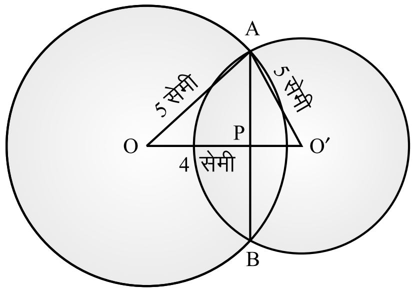
$\therefore \quad \Delta AOB \cong \Delta CO'D$ (SAS नियम से)

$\therefore \quad AB = CD$ **इति सिद्धम्।**

प्रश्नावली 9·2

1. 5 सेमी और 3 सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करते हैं तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 4 सेमी है। उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : O तथा O' केन्द्रों वाले वृत्तों की त्रिज्याएँ OA तथा $O'A$ क्रमशः 5 सेमी व 3 सेमी हैं। $OO' = 4$ सेमी है।



$\Delta OAO'$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(OA)^2 = (O'A)^2 + (OO')^2$$
$$5^2 = 3^2 + 4^2$$
$$25 = 9 + 16 = 25$$

अतः $\Delta OAQ'$ समकोण त्रिभुज है, जिसमें सबसे बड़ी भुजा OA कर्ण है, तब $\angle AO'O$ समकोण है।

$\therefore$ बिन्दु P और केन्द्र O' सम्पाती होंगे

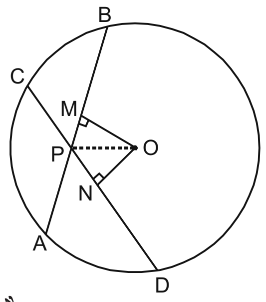
अतः $AP = AO' = 3$ सेमी

$\therefore$ जीवा की लम्बाई $= 2 \times AP$

$= 2 \times 3 = 6$ सेमी **उत्तर**

2. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेदित करें, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के दोनों खण्ड दूसरी जीवा के संगत खण्डों के बराबर हैं।

हल : दिया है : वृत्त $C(O, r)$ में जीवा AB = जीवा CD जो एक-दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेदित करती हैं।



सिद्ध करना है :

(i) $CP = AP$

(ii) $PB = PD$.

रचना : $OM \perp AB, ON \perp CD$ खींचे। OP को मिलाया।

उपपत्ति : $AM = MB = \frac{1}{2} AB$

तथा $CN = ND = \frac{1}{2} CD$

[केन्द्र से खींचा गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है]

$AM = CN$

$MB = ND$ ...(1)

[$\because AB = CD$ (दिया है)]

ΔOMP तथा ΔONP में, $OM = ON$

[एक वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर स्थित होती हैं।]

$\angle OMP = \angle ONP$ [प्रत्येक 90°]

$OP = OP$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore$ $\Delta OMP \cong \Delta ONP$ (RHS नियम से)

अत: $MP = PN$ ...(2)

समीकरण (1) में (2) जोड़ने पर,

$MB + MP = ND + PN$

या $BP = PD$ ...(2)

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

$AM - MP = CN - PN$

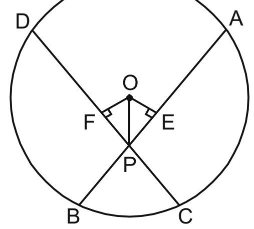
$AP = CP$ ...(1)

अत: (i) $\boldsymbol{AP = CP}$ और (ii) $\boldsymbol{PB = PD}$.

इति सिद्धम्।

3. यदि एक वृत्त की दो समान जीवाएँ वृत्त के अन्दर प्रतिच्छेदित करें, तो सिद्ध कीजिए कि प्रतिच्छेदित बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा जीवाओं से बराबर कोण बनाती हैं।

हल : दिया है : वृत्त $C(O, r)$ में जीवा AB = जीवा CD जो परस्पर P बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती हैं।



सिद्ध करना है :

$\angle OPE = \angle OPF$.

रचना : $OE \perp AB$ तथा $OF \perp CD$ खींचे और OP को मिलाया।

उपपत्ति : ΔOEP तथा ΔOFP में,

$\angle OEP = \angle OFP$ [प्रत्येक 90°]

$OP = OP$ [उभयनिष्ठ]

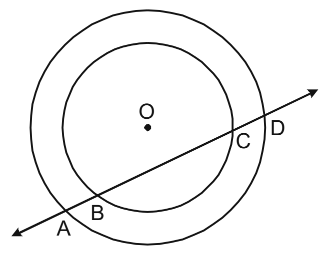
$OE = OF$

[एक वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर स्थित होती हैं]

$\therefore$ $\Delta OEP \cong \Delta OFP$ (RHS नियम से)

अत: $\angle OPE = \angle OPF$ **इति सिद्धम्।**

4. यदि एक रेखा दो संकेन्द्री वृत्तों (एक ही केन्द्र वाले वृत्तों) को, जिनका केन्द्र O है, A, B, C और D पर प्रतिच्छेदित करे, तो सिद्ध कीजिए $AB = CD$ (देखिए आकृति)।



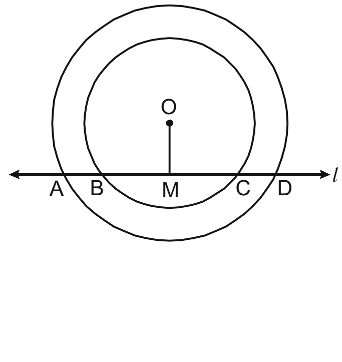
हल : $OM \perp AD$ खींचा।

BC छोटे वृत्त की जीवा है तथा $OM \perp BC$

$BM = CM$ ...(1)

AD बड़े वृत्त की जीवा है तथा $OM \perp AD$

$AM = DM$ ...(2)



($\because$ वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समाद्विभाजित करता है)

समीकरण (2) में से (1) को घटाने पर,

$$AM - BM = DM - CM$$

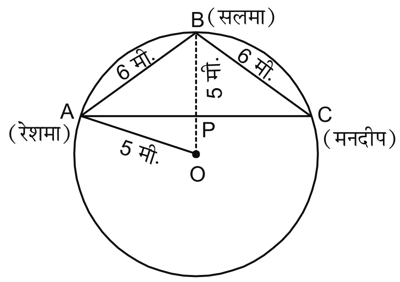
$\therefore$ $AB = CD.$ **इति सिद्धम्।**

5. एक पार्क में बने 5 मीटर त्रिज्या वाले वृत्त पर खड़ी तीन लड़कियाँ रेशमा, सलमा एवं मनदीप खेल रही हैं। रेशमा एक गेंद को सलमा के पास, सलमा मनदीप के पास तथा मनदीप रेशमा के पास फेंकती है। यदि रेशमा तथा सलमा के बीच और सलमा तथा मनदीप के बीच प्रत्येक की दूरी 6 मीटर हो, तो रेशमा और मनदीप के बीच की दूरी क्या है ?

हल : दिया है : पार्क में 5 मीटर त्रिज्या का एक वृत्त है जिसका केन्द्र O है। तीन लड़कियाँ रेशमा, सलमा और मनदीप वृत्त पर क्रमशः A, B व C स्थानों पर खड़ी हैं। रेशमा और सलमा के बीच की दूरी $AB = 6$ मीटर तथा सलमा और मनदीप के बीच दूरी $BC = 6$ मीटर है।

ज्ञात करना है : रेशमा और मनदीप के बीच की दूरी $= AC.$

गणना : त्रिज्याएँ OA और OB खींचीं और माना त्रिज्या OB, AC को बिन्दु P पर काटती है।



ΔOAB में, $OA = 5$ मीटर (त्रिज्या), $OB = 5$ मीटर (त्रिज्या) तथा $AB = 6$ मीटर।

माना $OP = x$, तब $BP = (5 - x)$

ΔABP में, $\angle P = 90°$

$$\therefore \quad AP^2 = AB^2 - BP^2 = (6)^2 - (5-x)^2$$
$$= 36 - (25 - 10x + x^2)$$
$$AP^2 = 11 + 10x - x^2 \quad ...(1)$$

पुनः ΔAPO में,

$$AP^2 = AO^2 - OP^2$$
$$AP^2 = 5^2 - x^2 = 25 - x^2 \quad ...(2)$$

समी. (1) तथा (2) से,

$$11 + 10x - x^2 = 25 - x^2$$

या $10x = 14$

$$x = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

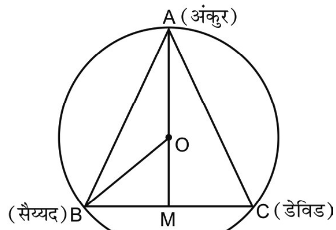
x का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$AP^2 = 25 - \left(\frac{7}{5}\right)^2 = 25 - \frac{49}{25}$$
$$= \frac{625 - 49}{25} = \frac{576}{25}$$
$$AP = \sqrt{\frac{576}{25}} = \frac{24}{5} = 4.8 \text{ सेमी}$$
$$AP = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AC = 2AP$$
$$\therefore \quad AC = 2 \times 4.8$$
$$= 9.6 \text{ मीटर।}$$

अतः रेशमा और मनदीप के बीच की दूरी 9.6 मीटर है।

उत्तर

6. 20 मीटर त्रिज्या का एक गोल पार्क (वृत्ताकार) एक कॉलोनी में स्थित है। तीन लड़के अंकुर, सैय्यद तथा डेविड इसकी परिसीमा पर बराबर दूरी पर बैठे हैं और प्रत्येक के हाथ में एक खिलौना टेलीफोन आपस में बात करने के लिए है। प्रत्येक फोन की डोरी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है : O केन्द्र वाला एक वृत्ताकार पार्क जिसकी त्रिज्या $OA = OB = 20$ मीटर है। वृत्त की परिधि पर तीन लड़के एक-दूसरे से बराबर दूरी पर A, B व C स्थानों पर बैठे हैं। अतः $AB = BC = CA$.

ज्ञात करना है : डोरी की लम्बाई AB.

रचना : $AM \perp BC$ खींचा तथा BO को मिलाया।

गणना : चूँकि ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।

माना इसकी प्रत्येक भुजा $= x$

$\therefore$ ऊँचाई $AM = \sqrt{3}x$

अब $OM = AM - OA$

$$= (\sqrt{3}x - 20) \text{ मीटर}$$

समकोण ΔOBM में,

$$OB^2 = BM^2 + OM^2$$

$$\Rightarrow \quad 20^2 = x^2 + (\sqrt{3}x - 20)^2$$

$$\Rightarrow \quad 400 = x^2 + 3x^2 - 40\sqrt{3}x + 400$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - 40\sqrt{3}x = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4x(x - 10\sqrt{3}) = 0$$

या तो $x = 0,$ (असंभव)

या $x - 10\sqrt{3} = 0$

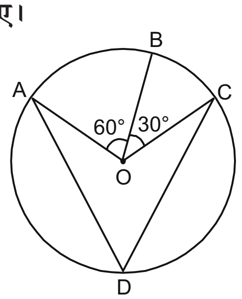
$\Rightarrow \quad x = 10\sqrt{3}$

अब $BC = 2BM = 2x = 20\sqrt{3}$ मीटर

अत: **प्रत्येक फोन की डोरी की लम्बाई = $20\sqrt{3}$ मीटर।** **उत्तर**

प्रश्नावली 9·3

1. आकृति में, केन्द्र O वाले वृत्त पर तीन बिन्दु A, B और C इस प्रकार हैं कि $\angle BOC = 30°$ तथा $\angle AOB = 60°$ हैं। यदि चाप ABC के अतिरिक्त वृत्त पर D एक बिन्दु है, तो $\angle ADC$ ज्ञात कीजिए।



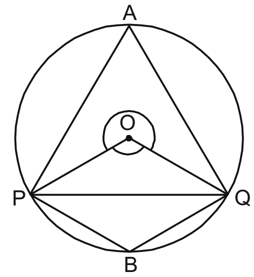
हल : $\because$ एक वृत्त के केन्द्र पर चाप ABC, $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 60° + 30° = 90°$ तथा $\angle ADC$ वृत्त के बचे हुए भाग के एक बिन्दु पर बनता है।

$$\therefore \quad \angle ADC = \frac{1}{2}(\angle AOC)$$

$$= \frac{1}{2} \times 90° = \mathbf{45°}.$$ **उत्तर**

2. किसी वृत्त की एक जीवा वृत्त की त्रिज्या के बराबर है। जीवा द्वारा लघु चाप के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए तथा दीर्घ चाप के किसी बिन्दु पर भी अंतरित कोण ज्ञात कीजिए।

हल : माना PQ एक जीवा है। OP तथा OQ को मिलाया।



दिया है : $PQ = OP = OQ$ [$\because$ जीवा = त्रिज्या]

ΔOPQ एक समबाहु त्रिभुज है।

$\therefore \quad \angle POQ = 60°$

$\because$ चाप PAQ वृत्त के केन्द्र पर अंतरित (वृहत्)

$\angle POQ = 360° - 60°$

$= 300°$

$\therefore \angle PBQ$ वृत्त के लघु चाप पर बना कोण

$$\angle PBQ = \frac{1}{2} \times \text{दीर्घ } \angle POQ$$

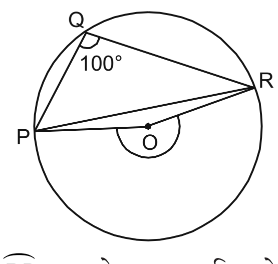
$$= \frac{1}{2} \times 300° = 150°$$

इसी प्रकार, दीर्घ चाप पर बना कोण

$$\angle PAQ = \frac{1}{2} \text{ लघु } (\angle POQ) = \frac{1}{2} \times 60° = 30°.$$

$\therefore$ जीवा द्वारा लघु चाप पर बनाया गया कोण **150°** तथा दीर्घ चाप पर बनाया गया कोण **30°** है। **उत्तर**

3. आकृति में, $\angle PQR = 100°$ है, जहाँ P, Q तथा R; केन्द्र O वाले एक वृत्त पर स्थित बिन्दु हैं। $\angle OPR$ ज्ञात कीजिए।



हल : चाप $\widehat{PR}$ द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण POR तथा शेषभाग पर अंतरित $\angle PQR$

$\therefore \quad$ वृहत् $\angle POR = 2\angle PQR$

$\Rightarrow \quad$ वृहत् $\angle POR = 2 \times 100° = 200°$

लघु $\angle POR = 360° - 200° = 160°$

ΔOPR में, $OP = OR$ [एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ]

$\Rightarrow \quad \angle OPR = \angle ORP = x°$ (माना)

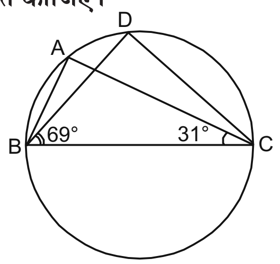
(समान भुजाओं के सम्मुख कोण)

ΔOPR में,

$$\angle POR + \angle OPR + \angle ORP = 180^o$$
$$\Rightarrow \quad 160^o + x^o + x^o = 180^o$$
$$\Rightarrow \quad 2x^o = 180^o - 160^o = 20^o$$
$$\therefore \quad x^o = \frac{200}{2} = 100^o$$

अत: $\angle \boldsymbol{OPR = 100°}$. उत्तर

4. आकृति में, $\angle ABC = 69°$ और $\angle ACB = 31°$ हों, तो $\angle BDC$ ज्ञात कीजिए।



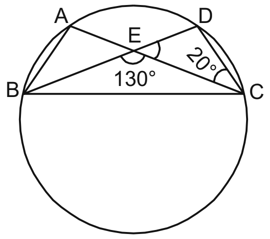
हल : ΔABC में,

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180°$$
$$\Rightarrow \quad \angle BAC + 69° + 31° = 180°$$
$$\Rightarrow \quad \angle BAC + 100° = 180°$$
$$\therefore \quad \angle BAC = 180° - 100° = 80°$$

$\because$ एक ही वृत्तखण्ड में कोण बराबर होते हैं।

$\therefore \quad \angle \boldsymbol{BDC = \angle BAC = 80°}$. उत्तर

5. आकृति में, एक वृत्त पर A, B, C और D चार बिन्दु हैं। AC और BD एक बिन्दु E पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\angle BEC = 130°$ तथा $\angle ECD = 20°$ हैं। $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।



हल : $\angle CED + \angle CEB = 180°$[रैखिक युग्म]

$$\Rightarrow \quad \angle CED + 130° = 180°$$
$$\therefore \quad \angle CED = 180° - 130° = 50°$$

ΔECD में,

$$\angle EDC + \angle CED + \angle ECD = 180°$$
$$\Rightarrow \quad \angle EDC + 50° + 20° = 180°$$
$$\Rightarrow \quad \angle EDC = 180° - 50° - 20°$$
$$\therefore \quad \angle EDC = 110°$$

$\because$ एक ही वृत्तखण्ड के कोण समान होते हैं।

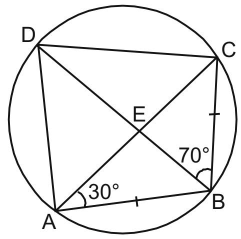
$\therefore \quad \angle \boldsymbol{BAC = \angle BDC = 110°}$. उत्तर

6. $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसके विकर्ण एक बिन्दु E पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle DBC = 70°$ और $\angle BAC = 30°$ हों, तो $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए। पुनः यदि $AB = BC$ हो, तो $\angle ECD$ ज्ञात कीजिए।

हल : $\angle BDC = \angle BAC$ [एक ही वृत्तखण्ड के कोण]

$$\Rightarrow \quad \angle BDC = 30°$$

[$\because \angle BAC = 30°$ (दिया है)]



ΔBCD में,

$$\angle BDC + \angle DBC + \angle BCD = 180°,$$
$$\Rightarrow \quad 30° + 70° + \angle BCD = 180°$$
$$\therefore \quad \angle BCD = 180° - 30° - 70° = 80°$$

यदि $AB = BC$, तब $\angle BCA = \angle BAC = 30°$

[त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।]

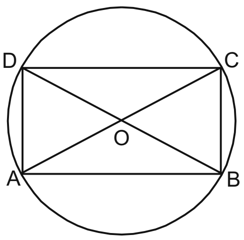
अब $\angle ECD = \angle BCD - \angle BCA$
$= 80° - 30° = 50°$

[$\because \angle BCD = 80°$ (ऊपर ज्ञात किया) तथा $\angle BCA = 30°$]

$\therefore \quad \angle \boldsymbol{BCD = 80°}$ **और** $\angle \boldsymbol{ECD = 50°}$. उत्तर

7. यदि एक चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण उसके शीर्षों से होकर जाने वाले वृत्त के व्यास हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह एक आयत है।

हल : वृत्त $C(O, r)$ में चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ के व्यास $AC = BD$.



सिद्ध करना है : चतुर्भुज $ABCD$ एक आयत है।

उपपत्ति : चूँकि एक वृत्त की सभी त्रिज्याएँ बराबर होती हैं।

$$\therefore \quad OA = OB = OC = OD$$
$$\Rightarrow \quad OA = OC = \frac{1}{2} AC \quad ...(1)$$

व $\qquad OB = OD = \frac{1}{2} BD \qquad ...(2)$

समी. (1) व (2) से,

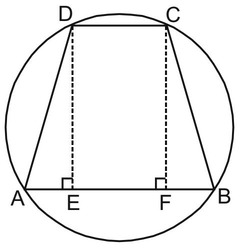
$\Rightarrow \qquad AC = BD$

$\because$ चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण बराबर हैं तथा एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

अतः चतुर्भुज *ABCD* एक आयत है। **उत्तर**

8. यदि एक समलम्ब की असमान्तर भुजाएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह चक्रीय है।

हल : दिया है : एक समलम्ब $ABCD$ की असमान्तर भुजाएँ $AD = BC$.



सिद्ध करना है : $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है।

रचना : $DE \perp AB$ तथा $CF \perp AB$ खींचे।

उपपत्ति :

ΔDEA तथा ΔCFB में,

$\because \qquad AD = BC$ [दिया है]

$\angle DEA = \angle CFB$ [प्रत्येक 90°]

तथा $\qquad DE = CF$ [दो समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी]

$\therefore \qquad \Delta DEA \cong \Delta CFB$ (RHS प्रगुण)

$\Rightarrow \angle A = \angle B$ तथा $\angle ADE = \angle BCF$

अब $\qquad \angle ADE = \angle BCF$

$\Rightarrow \quad 90° + \angle ADE = 90° + \angle BCF$

(दोनों पक्षों में 90º जोड़ने पर)

$\angle EDC + \angle ADE = \angle FCD + \angle BCF$

[$\because \angle EDC = 90°$ तथा $\angle FCD = 90°$]

$\Rightarrow \qquad \angle ADC = \angle BCD$ या $\angle D = \angle C$

अतः $\qquad \angle A = \angle B$ तथा $\angle C = \angle D$

$\therefore \ \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

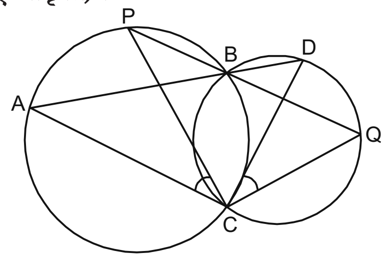
(एक चतुर्भुज के अन्तःकोणों का योग 360° होता है)

$\Rightarrow \quad 2\angle B + 2\angle D = 360°$

$\Rightarrow \quad \angle B + \angle D = 180°$

$\therefore$ *ABCD* एक चक्रीय चतुर्भुज है। **इति सिद्धम्।**

9. दो वृत्त दो बिन्दुओं *B* और *C* पर प्रतिच्छेदित करते हैं। *B* से जाने वाले दो रेखाखण्ड *ABD* और *PBQ* वृत्तों को *A*, *D* और *P*, *Q* पर क्रमशः प्रतिच्छेदित करते हुए खींचे गए हैं (देखिए आकृति)।



सिद्ध कीजिए कि $\angle ACP = \angle QCD$ है।

हल : $\because$ एक ही वृत्तखण्ड के कोण बराबर होते हैं।

$\angle ACP = \angle ABP \qquad ...(i)$

और $\quad \angle QCD = \angle QBD \qquad ...(ii)$

तथा $\quad \angle ABP = \angle QBD \qquad ...(iii)$

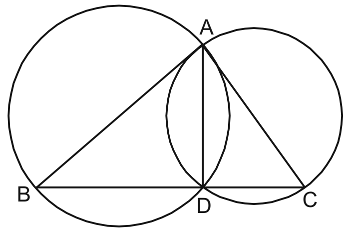
[शीर्षाभिमुख कोण]

$\therefore$ समीकरण (i), (ii) एवं (iii) से,

$\angle ACP = \angle QCD$. **इति सिद्धम्।**

10. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को व्यास मानकर वृत्त खींचे जाएँ, तो सिद्ध कीजिए कि इन वृत्तों का प्रतिच्छेद बिन्दु तीसरी भुजा पर स्थित होता है।

हल : दिया है : ΔABC की भुजाओं AB तथा AC को व्यास लेते हुए दो वृत्त बनाए गए हैं। वृत्त एक-दूसरे को A तथा D बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करते हैं।



सिद्ध करना है : D, BC पर स्थित है।

रचना : A तथा D को मिलाया।

उपपत्ति : $\because AB$ तथा AC वृत्तों के व्यास हैं। [दिया है]

$\therefore \qquad \angle ADB = 90°$

[अर्द्धवृत्त में बने कोण] ...(i)

$\Rightarrow \qquad \angle ADC = 90°$

[अर्द्धवृत्त में बने कोण] ...(ii)

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर,

$\angle ADB + \angle ADC = 90° + 90° = 180°$

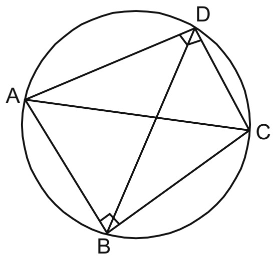
$\Rightarrow BDC$ एक सीधी रेखा है।

$\therefore$ *D*, *BC* पर स्थित है। **इति सिद्धम्।**

11. उभयनिष्ठ कर्ण *AC* वाले दो समकोण त्रिभुज *ABC* और *ADC* हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle CAD = \angle CBD$ हैं।

हल : उभयनिष्ठ कर्ण *AC* को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त बिन्दु *B* तथा *D* से गुजरता है।

[$\because \angle ABC = \angle ADC = 90°$ है]



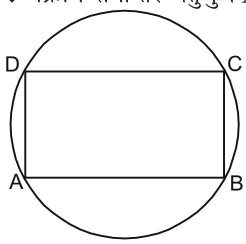
स्पष्टत: $\angle CAD = \angle CBD$

∵ एक ही वृत्तखण्ड में स्थित कोण समान होते हैं।

इति सिद्धम्।

12. सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समान्तर चतुर्भुज आयत होता है।

हल : दिया है : चक्रीय समान्तर चतुर्भुज *ABCD*



सिद्ध करना है : *ABCD* एक आयत है।

उपपत्ति : ∵ *ABCD* एक चक्रीय समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore \quad \angle A + \angle C = 180°$ …(i)

लेकिन $\quad \angle A = \angle C$ …(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से,

$\angle A = \angle C = 90°$,

[समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण]

इसी प्रकार, $\angle B = \angle D = 90°$ है।

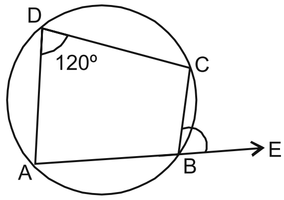
$\therefore$ *ABCD* का प्रत्येक कोण 90° है।

अत: *ABCD* एक आयत है। **इति सिद्धम्।**

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. चित्र में, ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि $\angle D = 120°$ हो, तो $\angle CBE$ का मान ज्ञात कीजिए।



संकेत : हम जानते हैं कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।

अत: $\angle D + \angle B = 180°$

$\Rightarrow \quad 120° + \angle ABC = 180°$

$\angle ABC = 60°$

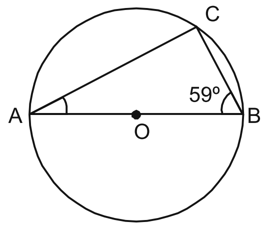
अब, ABE एक सरल रेखा है।

अत: $\angle ABC + \angle CBE = 180°$

$\Rightarrow \quad 60° + \angle CBE = 180°$

$\angle CBE = 120°$.

प्रश्न 2. दी गई आकृति में AB वृत्त का व्यास है। यदि $\angle ABC = 59°$ है तो $\angle BAC$ का मान लिखिए।



हल : हम जानते हैं कि अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।

अत:, $\quad \angle ACB = 90°$

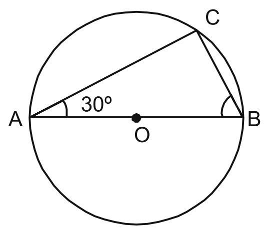
त्रिभुज ABC में,

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle BAC + 59° + 90° = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle BAC = 180° - 149° = 31°$.

प्रश्न 3. दिए गए चित्र में 'O' वृत्त का केन्द्र है। यदि $\angle BAC = 30°$ है, तो $\angle ABC$ का मान लिखिए।



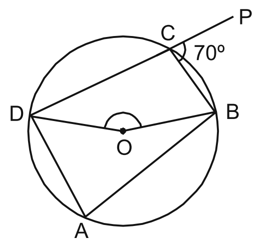
संकेत : अर्द्धवृत्त पर बना कोण 90° होता है।

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle ABC + 90° + 30° = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle ABC = 60°$

प्रश्न 4. दिए गए चित्र में 'O' वृत्त का केन्द्र है। ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। $\angle PCB = 70^o$ है, तो $\angle BOD$ का मान लिखिए।



संकेत : किसी चाप पर बना केंद्रीय कोण, उसी चाप पर बने परिधीय कोण का दोगुना होता है।

$\angle DCB$ परिधीय कोण है जो चाप BD पर बना है।

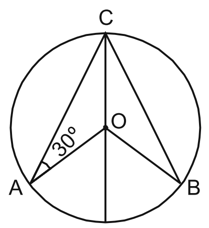
$\angle BOD$ केंद्रीय कोण है जो चाप BD पर बना है।

अतः, $\angle BOD = 2 \times \angle DCB$

$\Rightarrow \angle BOD = 2 \times 70°$

$\angle BOD = 140°$.

प्रश्न 5. दिए गए चित्र में, 'O' वृत्त का केन्द्र है तथा $\angle CAO = 30^o$ है, तो $\angle AOD$ का मान ज्ञात कीजिए—



संकेत : त्रिभुज OAC में,

OA = OC (वृत्त की त्रिज्याएँ)

अतः त्रिभुज OAC समद्विबाहु त्रिभुज है।

इसलिए, $\angle OAC = \angle OCA = 30°$

त्रिभुज OAC में,

$\angle AOC + \angle OAC + \angle OCA = 180°$

$\Rightarrow \angle OAC + 30° + 30° = 180°$

$\Rightarrow \angle AOC = 120°$

इसी प्रकार, त्रिभुज OAB में,

OA = OB (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle OAB = \angle OBA = 30°$

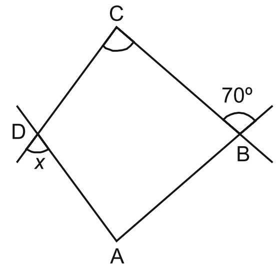
सरल रेखा कोण $\angle COD$ के लिए,

$\angle AOD = 180° - \angle AOC$

$= 180° - 120° = 60°$

अतः $\angle AOD = 60°$.

प्रश्न 6. चित्र में, यदि A, B, C और D एक चक्रीय चतुर्भुज के शीर्ष हों, तो x का मान ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है : ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\angle A = x°$ तथा $\angle C = 70°$

ज्ञात करना है : x का मान

हम जानते हैं कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।

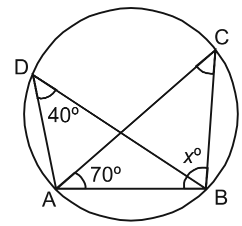
अतः, $\angle A + \angle C = 180°$

$\Rightarrow x° + 70° = 180°$

$\Rightarrow x° = 180° - 70° = 110°$

अतः $x° = 110°$.

प्रश्न 7. आकृति में x का मान ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है : $\angle BDA = 40°$, $\angle CAB = 70°$

ज्ञात करना है : $\angle ABC = x°$

हम जानते हैं कि वृत्त के एक ही खंड में स्थित कोण बराबर होते हैं तथा त्रिभुज के कोणों का योग 180° होता है।

$\angle BDA$ और $\angle BCA$ एक ही चाप BA पर स्थित हैं।

अतः $\angle BCA = \angle BDA$

$\Rightarrow \angle BCA = 40°$

अब त्रिभुज ABC में,

$\angle CAB + \angle BCA + \angle ABC = 180°$

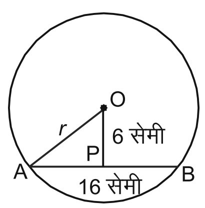
$\Rightarrow 70° + 40° + \angle ABC = 180°$

$\Rightarrow \angle ABC = 180° - 100°$

$\Rightarrow \angle ABC = 70°$

अतः $\angle ABC = 70°$.

प्रश्न 8. आकृति में, जीवा की लम्बाई 16 सेमी. तथा जीवा पर केन्द्र O से डाले गए लम्ब की लम्बाई 6 सेमी. है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



संकेत : समकोण त्रिभुज ΔOPA में पाइथागोरस प्रमेय से,

$(\text{कर्ण})^2 = (\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})^2$

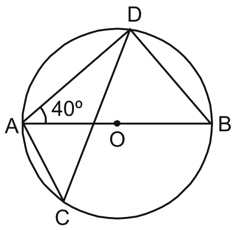
$\Rightarrow \quad OA^2 = OP^2 + AP^2$

$\Rightarrow \quad r^2 = (6)^2 + (8)^2$

$\Rightarrow \quad r^2 = 36 + 64$

$\Rightarrow \quad r = \sqrt{100} = 10$

प्रश्न 9. आकृति में, वृत्त का व्यास AB है और $\angle DAB = 40^o$ हो, तो $\angle DCA$ ज्ञात कीजिए।



संकेत : दिया है : वृत्त का व्यास AB है तथा $\angle DAB = 40°$

ज्ञात करना है : $\angle DCA$

(1) चूँकि AB व्यास है, इसलिए अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है।

$\angle ADB = 90°$

(2) $\angle ABD + \angle ADB + \angle DAB = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle ABD + 90° + 40° = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle ABD = 180° - 130° = 50°$

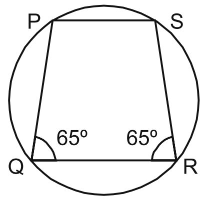
(3) एक ही चाप (AD) द्वारा वृत्त के शेष भाग पर बने कोण समान होते हैं।

$\angle DCA = \angle DBA \qquad$ (या $\angle ABD$)

$\therefore \quad \angle DCA = 50°$

अत: $\angle DCA = 50°$.

प्रश्न 10. PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि $\angle Q = \angle R = 65^o$ हो, तो $\angle P$ और $\angle S$ ज्ञात कीजिए।



संकेत : चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।

$\angle P$ के लिए : (P और R सम्मुख कोण हैं)

$\angle P + \angle R = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle P + 65° = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle P = 180° - 65° = 115°$

$\angle S$ के लिए : (S और Q सम्मुख कोण है)

$\Rightarrow \quad \angle S + \angle Q = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle S + 65° = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle S = 180° - 65° = 115°$

अत: $\quad \angle P = 115°$ तथा $\angle S = 115°$

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि एक समचतुर्भुज की किसी भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त उसके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाता है।

हल : दिया है : ABCD एक समचतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD बिंदु O पर काटते हैं।

सिद्ध करना है : भुजा AB को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त बिंदु O से गुजरता है।

उपपत्ति : हम जानते हैं कि समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

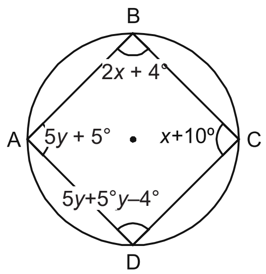
$\therefore \quad \angle AOB = 90°$

(2) अब, यदि हम AB को व्यास मानकर एक वृत्त खींचते हैं, तो वृत्त की परिधि पर स्थित किसी भी बिंदु पर व्यास द्वारा अंतरित कोण 90° (अर्धवृत्त का कोण) होगा।

(3) चूँकि $\angle AOB = 90°$ है, इसका अर्थ है कि बिंदु O उस वृत्त की परिधि पर स्थित होना चाहिए जिसका व्यास AB है।

अत:, भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जाता है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 12. आकृति में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। x और y के मान ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है : ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\angle A = 5y + 5°, \angle B = 2x + 4°$

$\angle C = x + 10°, \angle D = 4y - 4°$

सिद्धांत : चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।

चरण 1. सम्मुख कोण A और C का योग

$\angle A + \angle C = 180°$

$\Rightarrow \quad (5y + 5) + (x + 10) = 180°$

$\Rightarrow \quad x + 5y + 15 = 180°$

$\Rightarrow \quad x + 5y = 165° \quad ...(i)$

चरण 2. सम्मुख कोण B और D का योग

$\angle B + \angle D = 180°$

$\Rightarrow \quad (2x + 4) + (4y - 4) = 180°$

$\Rightarrow \quad 2x + 4y = 180°$

$\Rightarrow \quad x + 2y = 90° \quad ...(ii)$

चरण 3. समीकरण (i) में से समीकरण (ii) को घटाने पर,

$\Rightarrow \quad (x + 5y) - (x + 2y) = 165° - 90°$

$\Rightarrow \quad 3y = 75°$

$\Rightarrow \quad y = \frac{75°}{3} = 25°$

अब y का मान समीकरण (ii) में रखने पर,

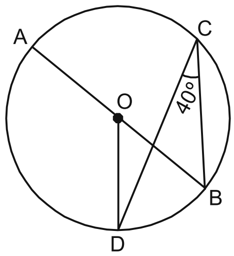
$x + 2(25)° = 90°$

$\Rightarrow \quad x + 50° = 90°$

$\Rightarrow \quad x = 40°$

अतः $x = 40°$ तथा $y = 25°$.

प्रश्न 13. संलग्न चित्र में, AOB वृत्त का व्यास है और $\angle BCD = 40°$ है तो $\angle AOD$ का मान ज्ञात करो।



हल : दिया है : AOB वृत्त का व्यास है और $\angle BCD = 40°$

ज्ञात करना है : $\angle AOD$

चाप BD द्वारा वृत्त की परिधि पर बना कोण $\angle BCD = 40°$ है। हम जानते हैं कि किसी चाप द्वारा केंद्र पर बना कोण, परिधि के शेष भाग पर बने कोण का दोगुना होता है।

$\therefore \quad \angle BOD = 2 \times \angle BCD$

$\Rightarrow \quad \angle BOD = 2 \times 40° = 80°$

चूँकि AOB एक सरल रेखा (व्यास है), अतः उस पर बने कोणों का योग 180° होगा।

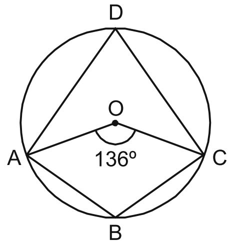
$\angle AOD + \angle BOD = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle AOD + 80° = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle AOD = 180° - 80° = 100°$

अतः $\quad \angle AOD = 100°$

प्रश्न 14. आकृति में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि $\angle AOC = 136°$ हो, तो $\angle ABC$ ज्ञात कीजिए।



संकेत दिया है : चाप ABC द्वारा केंद्र पर बना कोण 136° है। अतः शेष परिधि (बिंदु D) पर बना कोण इसका आधा होगा।

$\angle ADC = \frac{1}{2} \times \angle AOC$

$\Rightarrow \quad \angle ADC = \frac{136°}{2} = 68°$

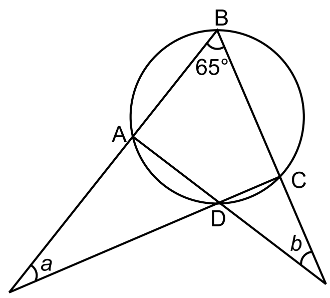
हम जानते हैं कि चक्रीय के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।

$\Rightarrow \quad \angle ABC + \angle ADC = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle ABC + 68° = 180°$

$\Rightarrow \quad \angle ABC = 112°.$

प्रश्न 15. दिए गए चित्र में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि $\angle CBE = 65°$ तथा $a = \frac{2}{3}b$ तो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है : ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है तथा $\angle CBE = 65°$ तथा $a = \frac{2}{3}b$

$\angle CBE$ एक परिधि कोण है, अतः संबधित चाप का मान

$= 2 \times 65° = 130°$

वृत्त के बाह्य बने दोनों कोणों का योग

$a + b = \frac{1}{2}$ (बड़े चाप – छोटे चाप)

$= \frac{1}{2}(130° - 30°) = 50°$

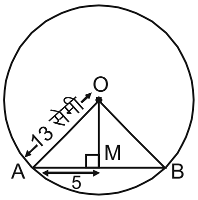
माना $\quad a = 2x, b = 3x$

$\Rightarrow \quad a + b = 2x + 3x = 5x$

$\Rightarrow \quad 5x = 50° \Rightarrow x = 10°$

अत: $a = 20°$ तथा $b = 30°$.

प्रश्न 16. यदि वृत्त की त्रिज्या 13 सेमी. है और इसकी एक जीवा की लम्बाई 10 सेमी. हो, तो इस जीवा की वृत्त के केन्द्र से दूरी ज्ञात कीजिए।



संकेत : समकोण ΔOMA में पाइथागोरस प्रमेय से,

$OM^2 + AM^2 = OA^2$

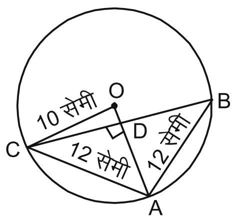
$\Rightarrow \quad d^2 + (5)^2 = (13)^2$

$\Rightarrow \quad d^2 + 25 = 169$

$\Rightarrow \quad d^2 = 144 = (12)^2$

अत: $\quad d = 12$ सेमी।

प्रश्न 17. 10 सेमी. त्रिज्या के एक वृत्त में, दो जीवाएँ AB = AC = 12 सेमी. हों, तो जीवा BC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



हल : दिया है : वृत्त की त्रिज्या (R) = 10 सेमी तथा दो जीवाएँ AB = AC = 12 सेमी.

ज्ञात करना है : जीवा BC की लम्बाई

माना केंद्र O है। AB = AC है, इसलिए A से खींचा गया लम्ब AD जीवा BC को समद्विभाजित करेगा और केंद्र O से होकर जाएगा। माना AD = h है। समकोण ΔADC (जहाँ D, BC का मध्य बिन्दु है) में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$DC^2 = AC^2 - AD^2 = 12^2 - h^2 \quad ...(i)$$

अब समकोण ΔODC में (जहाँ OD = $10 - h$ या $h - 10$ हो सकता है, दूरी का वर्ग समान रहेगा)

$DC^2 = OC^2 - OD^2 = 10^2 - (10 - h)^2$

$\Rightarrow \quad DC^2 = 100 - (100 + h^2 - 20h)$

$\Rightarrow \quad DC^2 = 20h - h^2 \quad ...(ii)$

समीकरण (i) और (ii) को बराबर करने पर,

$144 - h^2 = 20h - h^2$

$\Rightarrow \quad 144 = 20h$

$\Rightarrow \quad h = \dfrac{144}{20} = 7.2$ सेमी.

अब h का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$DC^2 = 144 - (7.2)^2$

$\Rightarrow \quad DC^2 = 144 - 51.84$

$\Rightarrow \quad DC^2 = 92.16$

$\Rightarrow \quad DC = \sqrt{92.16} = 9.6$ सेमी

जीवा BC की कुल लम्बाई :

$BC = 2 \times DC = 2 \times 9.6 = 19.2$ सेमी

❑❑

10 हीरोन का सूत्र

प्रश्नावली 10·1

1. एक यातायात संकेत पट पर 'आगे स्कूल है' लिखा है तथा यह भुजा 'a' वाले एक समबाहु त्रिभुज के आकार का है। हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके इस बोर्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि संकेत बोर्ड पर परिमाप 180 सेमी है तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा ?

हल : समबाहु त्रिभुज के आकार के बोर्ड की एक भुजा की लम्बाई = a

$\therefore$ समबाहु त्रिभुज के आकार के बोर्ड का परिमाप

$$= a + a + a = 3a$$

$\therefore$ त्रिभुज का अर्द्ध-परिमाप $s = \dfrac{3a}{2}$

$\therefore$ हीरोन के सूत्र से,

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{3a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ वर्ग इकाई}$$

यदि त्रिभुज का परिमाप 180 सेमी है, तो प्रत्येक भुजा $= \dfrac{180}{3} = 60$ सेमी होगी।

तब $a = 60$

$\therefore$ त्रिभुजाकार बोर्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

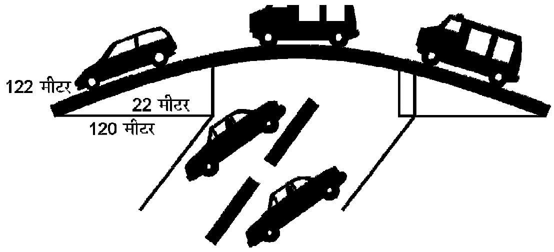
$$= \frac{60\times 60\times\sqrt{3}}{4} \text{ वर्ग सेमी}$$

$$= 900\sqrt{3} \text{ वर्ग सेमी}$$

अत: **संकेत पट का क्षेत्रफल = $900\sqrt{3}$ वर्ग सेमी।**

उत्तर

2. किसी फ्लाईओवर (flyover) की त्रिभुजाकार दीवार को विज्ञापनों के लिए प्रयोग किया जाता है। दीवार की भुजाओं की लम्बाइयाँ 122 मीटर, 22 मीटर और 120 मीटर हैं। इस विज्ञापन से प्रतिवर्ष 5,000 रु. प्रति मीटर^2 की प्राप्ति होती है। एक कम्पनी ने इस दीवार को विज्ञापन देने के लिए 3 महीने के लिए किराए पर लिया। उसने कुल कितना किराया दिया ?



हल : फ्लाईओवर की त्रिभुजाकार दीवार की मापें

= 122 मीटर, 22 मीटर, 120 मीटर।

$\therefore$ $a = 122$ मीटर, $b = 22$ मीटर, $c = 120$ मीटर

अर्द्ध-परिमाप $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

$$= \frac{122+22+120}{2} = \frac{264}{2} = 132 \text{ मीटर}$$

$\therefore$ त्रिभुजाकार दीवार का क्षेत्रफल

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{132(132-122)(132-22)(132-120)}$

$= \sqrt{132\times 10\times 110\times 12}$ वर्ग मीटर

$= \sqrt{11\times 12\times 10\times 10\times 11\times 12}$ वर्ग मीटर

$= 11 \times 12 \times 10$ वर्ग मीटर $= 1,320$ वर्ग मीटर

$\because$ 12 महीनों का 1 वर्ग मीटर क्षेत्रफल का किराया

= 5,000 रु.

$\therefore$ 12 महीनों का 1,320 वर्ग मीटर क्षेत्रफल का किराया

= 5,000 × 1,320 रु.

$\therefore$ 3 महीनों का 1,320 मी.^{2} क्षेत्रफल का किराया

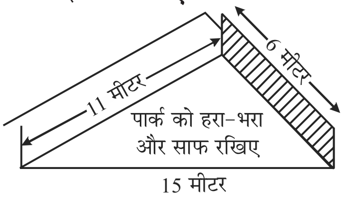
$$= \frac{5,000\times 1,320}{12} \times 3 \text{ रु.}$$

= 5,000 × 110 × 3 रु.

= ₹ 16,50,000.

उत्तर

3. किसी पार्क में एक फिसल पट्टी (slide) बनी हुई है। इसकी पार्श्वीय दीवारों (slide walls) में से एक दीवार पर किसी रंग से पेन्ट किया गया है और उस पर ''पार्क को हरा-भरा और स्वच्छ रखिए'' लिखा हुआ है। यदि इस दीवार की विमाएँ 15 मीटर, 11 मीटर और 6 मीटर हैं, तो रंग हुए भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : रंगीन त्रिभुजाकार दीवार की भुजाएँ

$a = 15$ मीटर, $b = 11$ मीटर और $c = 6$ मीटर

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{15+11+6}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ मीटर}$$

$\therefore$ त्रिभुजाकार दीवार का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{16(16-15)(16-11)(16-6)}$$

$$= \sqrt{16 \times 1 \times 5 \times 10}$$

$$= 20\sqrt{2} \text{ वर्ग मीटर}$$

अत: **पेन्ट किए हुए भाग का क्षेत्रफल**

$= 20\sqrt{2}$ वर्ग मीटर। उत्तर

4. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो भुजाएँ 18 सेमी और 10 सेमी तथा परिमाप 42 सेमी है।

हल : त्रिभुज की दो भुजाएँ $a = 18$ सेमी तथा $b = 10$ सेमी हैं।

माना तीसरी भुजा c सेमी है।

त्रिभुज का परिमाप $= a + b + c$

$= 18 + 10 + c = 28 + c$

परन्तु दिया है कि परिमाप 42 सेमी है।

$\therefore \quad 28 + c = 42$

$c = 42 - 28$

$c = 14$ सेमी

अर्द्ध-परिमाप $(s) = \frac{42}{2} = 21$ सेमी

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{21(21-18)\ (21-10)\ (21-14)}$$

$$= \sqrt{21 \times 3 \times 11 \times 7}$$

$$= \sqrt{7 \times 3 \times 3 \times 11 \times 7}$$

$$= 7 \times 3\sqrt{11} = 21\sqrt{11} \text{ वर्ग सेमी}$$

अत: Δ का क्षेत्रफल = **$21\sqrt{11}$ वर्ग सेमी।** उत्तर

5. एक त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 12 : 17 : 25 है और उसका परिमाप 540 सेमी है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना त्रिभुज की भुजाएँ $12x$ सेमी, $17x$ सेमी तथा $25x$ सेमी हैं।

$\therefore$ परिमाप $= 12x + 17x + 25x = 54x$ सेमी

$\Rightarrow \quad 540 = 54x$

$\Rightarrow \quad x = 10$

तब $a = 12x = 12 \times 10 = 120$ सेमी

$b = 17x = 17 \times 10 = 170$ सेमी

$c = 25x = 25 \times 10 = 250$ सेमी

$\therefore \quad s = \frac{540}{2} = 270$ सेमी

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{270(270-120)\ (270-170)\ (270-250)}$$

$$= \sqrt{270 \times 150 \times 100 \times 20}$$

$$= \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 10 \times 5 \times 3 \times 10 \times 10 \times 10 \times 5 \times 2 \times 2}$$

$$= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}$$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 10 \times 10 = 9000$ वर्ग सेमी

अत: **त्रिभुज का क्षेत्रफल = 9,000 वर्ग सेमी।** उत्तर

6. एक समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाप 30 cm है और प्रत्येक बराबर भुजा 12 cm लम्बाई की है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिभुज की तीसरी भुजा

$=$ परिमाप $- 2 \times$ बराबर भुजाओं की लम्बाई

$= (30 - 2 \times 12)$ सेमी

$= (30 - 24)$ cm $= 6$ सेमी

तब $s = \frac{\text{परिमाप}}{2} = \frac{30}{2}$ सेमी $= 15$ सेमी

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{15(15-12)\ (15-12)\ (15-6)} \text{ वर्ग सेमी}$$

$= \sqrt{15 \times 3 \times 3 \times 9} =$ **$9\sqrt{15}$ वर्ग सेमी।** उत्तर

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. यदि a, b, c त्रिभुज की भुजाएँ हैं तो त्रिभुज का अर्द्ध-परिमाप लिखिए।

हल : $s = \frac{a+b+c}{2}$

प्रश्न 2. एक त्रिभुज का आधार 14 सेमी. एवं ऊँचाई 10 सेमी. है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

संकेत : क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 14 \times 10 = 70$ वर्ग सेमी

प्रश्न 3. हीरोन का सूत्र लिखिए।

संकेत : $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

प्रश्न 4. यदि त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः 20 सेमी., 51 सेमी. और 37 सेमी. हैं तो त्रिभुज का अर्धपरिमाप ज्ञात कीजिए।

हल : $s = \frac{20+51+37}{2} = \frac{108}{2} = 54$

प्रश्न 5. उस समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल $16\sqrt{3}$ वर्ग सेमी. है।

संकेत : समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल का सूत्र

$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2$

$16\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2$

$(\text{भुजा})^2 = 16 \times 4$

$\Rightarrow$ भुजा $= \sqrt{16 \times 4}$ $\Rightarrow$ भुजा = 8 सेमी।

प्रश्न 6. उस समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो समान भुजाओं की लम्बाई 5 सेमी. और तीसरी भुजा की लम्बाई 8 सेमी. है।

संकेत : $s = \frac{5+5+8}{2} = \frac{18}{2} = 9$ सेमी

चरण 2 : $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{9 \times (9-5) \times (9-5) \times (9-8)}$

$= \sqrt{9 \times 4 \times 4 \times 1} = \sqrt{144} = 12$ वर्ग सेमी

प्रश्न 7. समद्विबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी समान भुजा 5 सेमी. प्रत्येक तथा असमान भुजा की लम्बाई 6 सेमी. है।

संकेत : अर्ध-परिमाप $s = \frac{5+5+6}{2} = \frac{16}{2} = 8$ सेमी

$A = \sqrt{8 \times (8-5) \times (8-5) \times (8-6)}$

$= \sqrt{8 \times 3 \times 3 \times 2} = \sqrt{144} = 12$ वर्ग सेमी

प्रश्न 8. उस समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल एवं ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी एक भुजा 6 सेमी. हो।

हल : क्षेत्रफल : $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (6)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36$

$= 9\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

ऊँचाई : $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{भुजा} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ सेमी

प्रश्न 9. उस समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल $36\sqrt{3}$ वर्ग सेमी. है।

संकेत : समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2$

$\Rightarrow$ $36\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2$

$\Rightarrow$ $(\text{भुजा})^2 = 144 \Rightarrow$ भुजा $= \sqrt{144} = 12$ सेमी

प्रश्न 10. उस समबाहु ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई 10 सेमी. है।

हल : समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\text{भुजा})^2$

$\Rightarrow$ $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (10)^2 = 25\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

प्रश्न 11. एक त्रिभुजाकार खेत की भुजाएँ 20 मीटर, 51 मीटर एवं 37 मीटर हैं। 2 × 3 वर्ग मीटर माप की कितनी क्यारियाँ इस खेत में बनाई जा सकती हैं ?

हल : खेत का क्षेत्रफल (हीरोन के सूत्र द्वारा)

$s = \frac{20+51+37}{2} = 54$ मी

$A = \sqrt{54 \times (54-20) \times (54-51) \times (54-37)}$

$= \sqrt{54 \times 34 \times 3 \times 17}$

$= \sqrt{93636} = 306$ वर्ग मी

एक डयोढ़ी का क्षेत्रफल $= 2 \times 3 = 6$ वर्ग मी.

डयोढ़ियों की संख्या $= \frac{306}{6} = 51.$

प्रश्न 12. उस ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ क्रमशः 40 मी., 24 मी. तथा 32 मी. हैं।

हल : $s = \frac{40+24+32}{2} = 48$ मी

$$A = \sqrt{48\times(48-40)\times(48-24)\times(48-32)}$$
$$= \sqrt{48\times8\times24\times16}$$
$$= \sqrt{(48\times16)\times(8\times24)} = \sqrt{768\times192}$$
$$= \sqrt{147456} = 384 \text{ वर्ग मी.।}$$

प्रश्न 13. किसी त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 25 : 17 : 12 है। यदि इस त्रिभुज का परिमाप 540 मी. है, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल : माना भुजाएँ $25x$, $17x$ और $12x$ है।

परिमाप = $25x + 17x + 12x = 540$

$54x = 540$

$x = 10$

अतः भुजाएँ :

$a = 25 \times 10 = 250$ मीटर

$b = 17 \times 10 = 170$ मीटर

$c = 12 \times 10 = 120$ मीटर

अर्द्ध-परिमाप $(s) = \frac{540}{2} = 270$ मीटर

क्षेत्रफल = $\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$

$= \sqrt{[270(270-250)(270-170)(270-120)]}$

$= \sqrt{[270\times20\times100\times150]}$

$= \sqrt{[81000000]}$

= 9000 वर्ग मीटर।

प्रश्न 14. चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें $\angle ABD = 90^o$, 12 सेमी भुजा वाला समबाहु त्रिभुज BCD तथा AD = 15 सेमी. है।

हल : ΔABD का क्षेत्रफल :

पाइथागोरस प्रमेय से,

$AB^2 = AD^2 - BD^2 = 15^2 - 12^2$

$= 225 - 144 = 81$

$\Rightarrow$ AB = 9 सेमी

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times AB \times BD$

$= \frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54$ वर्ग सेमी

ΔBCD का क्षेत्रफल :

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (12)^2$

$= 36\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

कुल क्षेत्रफल $54 + 36\sqrt{3}$ वर्ग सेमी।

प्रश्न 15. एक त्रिभुजाकार मैदान की भुजाएँ 90 मी., 70 मी. तथा 40 मी. हैं, इसे समतल करवाने का व्यय 5 रुपये प्रति वर्ग मीटर हो, तो कुल व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है :

$a = 90$ मीटर, $b = 70$ मीटर, $c = 40$ मीटर

अर्द्ध-परिमाप $(s) = \frac{(90+70+40)}{2}$

$= \frac{200}{2} = 100$ मीटर

क्षेत्रफल = $\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$

$= \sqrt{[100(100-90)100-70)(100-40)]}$

$= \sqrt{[100\times10\times30\times60]}$

$= \sqrt{[1800000]}$

$= \sqrt{(3600\times500)}$

$= 60\sqrt{500}$

$= 60\times10\sqrt{5}$

$= 600\sqrt{5}$ वर्ग मीटर

व्यय की दर = 5 रुपये प्रति वर्ग मीटर

कुल व्यय = $600\sqrt{5}\times5$

$= 3000 \times 2.236$

= 6708 रुपये।

❑ ❑

11 पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

प्रश्नावली 11.1

1. एक शंकु के आधार का व्यास 10.5 सेमी और इसकी तिर्यक ऊँचाई 10 सेमी है। इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : शंकु के आधार का व्यास = 10.5 सेमी

$\therefore$ शंकु के आधार की त्रिज्या $(r) = \frac{10.5}{2}$ सेमी

और शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) = 10 सेमी

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times \frac{10.5}{2} \times 10$ वर्ग सेमी

= 165 वर्ग सेमी

अत: शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = **165 वर्ग सेमी।** **उत्तर**

2. एक शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 21 मीटर और आधार का व्यास 24 मीटर है।

हल : शंकु के आधार का व्यास = 24 मीटर

$\therefore$ शंकु के आधार की त्रिज्या $(r) = \frac{24}{2} = 12$ मीटर

और शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) = 21 मीटर

$\therefore$ शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

= वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$= \pi r l + \pi r^2 = \pi r\,(l + r)$

$= \frac{22}{7} \times 12 \times (21 + 12)$

$= \frac{22}{7} \times 12 \times 33$ वर्ग मीटर

$= \frac{8712}{7}$ वर्ग मीटर = 1244.57 वर्ग मीटर

अत: शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

= **1244.57 वर्ग मीटर।** **उत्तर**

3. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 308 सेमी² है, और इसकी तिर्यक ऊँचाई 14 सेमी है। ज्ञात कीजिए :

(i) आधार की त्रिज्या,

(ii) शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल।

हल : (i) माना शंकु के आधार की त्रिज्या r सेमी है।

शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) = 14 सेमी

$\therefore$ शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$

$308 = \frac{22}{7} \times r \times 14$ वर्ग सेमी

$= 44r$ वर्ग सेमी

$r = \frac{308}{44} = 7$ सेमी

अत: शंकु के आधार की त्रिज्या = **7 सेमी।** **उत्तर**

(ii) शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

= वक्र पृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल

$= \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times (14 + 7)$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 21 = 462$ वर्ग सेमी।

अत: शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

= **462 वर्ग सेमी।** **उत्तर**

4. शंकु के आकार का एक तम्बू 10 मीटर ऊँचा है और उसके आधार की त्रिज्या 24 मीटर है। ज्ञात कीजिए:

(i) तम्बू की तिर्यक ऊँचाई

(ii) तम्बू में लगे केनवास की लागत, यदि 1 वर्ग मीटर केनवास की लागत ₹ 70 है।

हल : (i) तम्बू के आधार की त्रिज्या (r) = 24 मीटर तथा ऊँचाई (h) = 10 मीटर है।

$\therefore$ तिर्यक् ऊँचाई $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{(10)^2 + (24)^2}$

$= \sqrt{100 + 576}$

$= \sqrt{676} = 26$ मीटर

अत: तम्बू की तिर्यक ऊँचाई (l) = **26 मीटर।** **उत्तर**

(ii) तम्बू को बनाने में प्रयुक्त केनवास शंकु के आकार वाले तम्बू का वक्र पृष्ठ $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 24 \times 26$ वर्ग मीटर

$= \frac{13{,}728}{7}$ वर्ग मीटर

$\therefore$ तम्बू को बनाने में प्रयुक्त केनवास का क्षेत्रफल

$$= \frac{13,728}{7} \text{ वर्ग मीटर}$$

अत: तम्बू में लगे केनवास की लागत

= केनवास का क्षेत्रफल × 1 वर्ग मीटर केनवास की लागत

$$= \frac{13,728}{7} \times 70 = ₹\ \mathbf{1,37,280}$$ उत्तर

5. 8 मीटर ऊँचाई और आधार की त्रिज्या 6 मीटर वाले एक शंकु के आकार का तम्बू बनाने में 3 मीटर चौड़े तिरपाल की कितनी लम्बाई लगेगी? यह मान कर चलिए कि इसकी सिलाई और कटाई में 20 सेमी तिरपाल अतिरिक्त लगेगा। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : शंकु के आधार की त्रिज्या (r) = 6 मीटर

शंकु की ऊँचाई (h) = 8 मीटर

$\therefore$ शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{(8)^2 + (6)^2}$

$= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ मीटर

$\therefore$ तम्बू का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = πrl

$= 3.14 \times 6 \times 10 = 188.40$ वर्ग मीटर

$\therefore$ तिरपाल का क्षेत्रफल = 188.40 वर्ग मीटर

तिरपाल की चौड़ाई = 3 मीटर

$$\text{तिरपाल की लम्बाई} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}}$$

$$= \frac{188.40}{3} = 62.80 \text{ मीटर}$$

सिलाई इत्यादि में प्रयुक्त तिरपाल = 20 सेमी

= 0.20 मीटर

अत: तिरपाल की कुल लम्बाई

= (62.80 + 0.20) मीटर **= 63 मीटर।** उत्तर

6. एक शंकु के आकार के एक गुम्बज की तिर्यक ऊँचाई और आधार का व्यास क्रमश: 25 मीटर और 14 मीटर है। इसके वक्र पृष्ठ पर 210 रुपये प्रति 100 मीटर² की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल :

शंक्वाकार गुम्बज के आधार का व्यास = 14 मीटर

$\therefore$ शंक्वाकार गुम्बज के आधार की त्रिज्या (r) = $\frac{14}{2} = 7$ मीटर

गुम्बज की तिर्यक ऊँचाई (l) = 25 मीटर

$\therefore$ गुम्बज का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = πrl

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 550 \text{ वर्ग मीटर}$$

100 वर्ग मीटर पृष्ठ पर सफेदी कराने का व्यय = पृष्ठीय क्षेत्रफल × दर प्रति 100 मी²

$$= 550 \times \frac{210}{100} = ₹\ 1,155$$

अत: गुम्बज के वक्र पृष्ठ पर सफेदी कराने का व्यय

= ₹ **1,155** उत्तर

7. एक जोकर की टोपी शंकु के आकार की है, जिसके आधार की त्रिज्या 7 सेमी और ऊँचाई 24 सेमी है। इसी प्रकार की 10 टोपियाँ बनाने के लिए आवश्यक गत्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : जोकर की टोपी शंक्वाकार है।

$\therefore$ टोपी के आधार की त्रिज्या (r) = 7 सेमी

तथा टोपी की ऊँचाई (h) = 24 सेमी

$\therefore$ टोपी की तिर्यक ऊँचाई (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{(24)^2 + (7)^2}$

$= \sqrt{576 + 49} = \sqrt{625} = 25$ सेमी

$\therefore$ टोपी का वक्र पृष्ठ = πrl

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 = 550 \text{ वर्ग सेमी}$$

$\because$ 1 टोपी बनाने में लगा गत्ता = 550 वर्ग सेमी

$\therefore$ 10 टोपी बनाने में लगा गत्ता = 550 × 10

= 5500 वर्ग सेमी। उत्तर

8. किसी बस स्टॉप को पुराने गत्ते से बने 50 खोखले शंकुओं द्वारा सड़क से अलग किया हुआ है। प्रत्येक शंकु के आधार का व्यास 40 सेमी और ऊँचाई 1 मीटर है। यदि इन शंकुओं के बाहरी पृष्ठों को पेंट करवाना है और पेंट की दर ₹ 12 प्रति मीटर² है, तो इनको पेंट कराने में कितनी लागत आयेगी? ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{1.04} = 1.02$ का प्रयोग कीजिए ।)

हल : शंकु के आधार का व्यास = 40 सेमी

$\therefore$ शंकु के आधार की त्रिज्या (r) = $\frac{40}{2} = 20$ सेमी

= 0.20 मीटर

और शंकु की ऊँचाई (h) = 1 मीटर

$\therefore$ शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (0.2)^2} = \sqrt{1.04} = 1.02$ मीटर

शंकु का वक्र पृष्ठ = $\pi\, rl$

$= 3.14 \times 0.20 \times 1.02$ वर्ग मीटर

$= 0.64056$ वर्ग मीटर

$\therefore$ 50 शंकुओं का वक्र पृष्ठ

= 50 × 0.64056 वर्ग मीटर = 32.028 वर्ग मीटर

$\therefore$ 50 शंकुओं पर सफेदी कराने का व्यय

= वक्र पृष्ठ × मूल्य-दर = 32.028 × 12

= ₹ 384.336 = ₹ 384.34 लगभग।

अत: शंकुओं पर सफेदी कराने में लगभग **₹ 384.34** व्यय होंगे। उत्तर

प्रश्नावली 11.2

1. निम्नलिखित त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) 10.5 सेमी, (ii) 5.6 सेमी, (iii) 14 सेमी।

हल : (i) गोले की त्रिज्या (r) = 10.5 सेमी

$= \frac{21}{2}$ सेमी

अत: गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= 4\times\frac{22}{7}\times\frac{21}{2}\times\frac{21}{2}$ वर्ग सेमी

= **1386 वर्ग सेमी।** उत्तर

(ii) गोले की त्रिज्या (r) = 5.6 सेमी

अत: गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= 4\times\frac{22}{7}\times 5.6\times 5.6$ वर्ग सेमी

= **394.24 वर्ग सेमी।** उत्तर

(iii) गोले की त्रिज्या (r) = 14 सेमी

अत: गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= 4\times\frac{22}{7}\times 14\times 14$ वर्ग सेमी

= **2464 वर्ग सेमी।** उत्तर

2. निम्नलिखित व्यास वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) 14 सेमी, (ii) 21 सेमी, (iii) 3.5 मीटर।

हल : (i) गोले का व्यास = 14 सेमी

$\therefore$ गोले की त्रिज्या (r) $= \frac{14}{2} = 7$ सेमी

अत: गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= 4\times\frac{22}{7}\times 7\times 7$ वर्ग सेमी

= **616 वर्ग सेमी ।** उत्तर

(ii) गोले का व्यास = 21 सेमी

$\therefore$ गोले की त्रिज्या (r) $= \frac{21}{2}$ सेमी

अत: गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= 4\times\frac{22}{7}\times\frac{21}{2}\times\frac{21}{2}$

= **1386 वर्ग सेमी।** उत्तर

(iii) गोले का व्यास = 3.5 मीटर

$\therefore$ गोले की त्रिज्या (r) $= \frac{3.5}{2}$ मीटर $= \frac{7}{4}$ मीटर

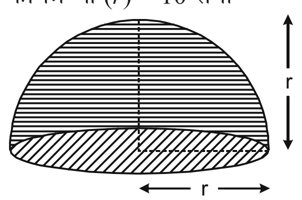
अत: **गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल** $= 4\pi r^2$

$= 4\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}$ वर्ग मीटर

$= \frac{22\times 7}{4}$ वर्ग मीटर = **38.5 वर्ग मीटर।** उत्तर

3. 10 सेमी त्रिज्या वाले एक अर्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । (π = 3.14)

हल : गोले की त्रिज्या (r) = 10 सेमी



अत: अर्द्धगोले का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 3\pi r^2 = 3 \times 3.14 \times 10 \times 10$ वर्ग सेमी

= 942 वर्ग सेमी। उत्तर

4. एक गोलाकार गुब्बारे में हवा भरने पर, उसकी त्रिज्या 7 सेमी से 14 सेमी हो जाती है। इन दोनों स्थितियों में, गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : पहले गुब्बारे की त्रिज्या (r) = 7 सेमी

$\therefore$ गुब्बारे का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= 4\pi \times 7 \times 7$ वर्ग सेमी $= 196\,\pi$ वर्ग सेमी।

हवा भरने के बाद गुब्बारे की त्रिज्या (R) = 14 सेमी

$\therefore$ हवा भरने के बाद गुब्बारे का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 4\pi R^2 = 4\pi \times 14 \times 14$ वर्ग सेमी

$= 784\pi$ वर्ग सेमी।

अत: गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफलों में अनुपात

$= 196\pi : 784\pi = 1 : 4.$ उत्तर

5. पीतल से बने एक अर्द्धगोलाकार कटोरे का आन्तरिक व्यास 10.5 सेमी है। 16 रुपये प्रति 100 सेमी^{2} की दर से इसके आन्तरिक पृष्ठ पर कलई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ त्रिज्या $r = \left(\frac{10.5}{2}\right)$ सेमी = 5.25 सेमी

अर्द्धगोले का वक्रीय पृष्ठ $= 2\pi r^2$

$$= \left(2\times\frac{22}{7}\times 5.25\times 5.25\right) \text{ सेमी}^2$$

$= 173.25$ सेमी^{2}

कलई की दर = ₹ 16 प्रति 100 सेमी^{2}

∴ आन्तरिक पृष्ठ पर कलई कराने का व्यय

$$= \left(173.25\times\frac{16}{100}\right) = ₹\ 27.72$$ **। उत्तर**

6. उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 सेमी^{2} है।

हल : माना गोले की त्रिज्या $= r$

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रंफल = 154 सेमी^{2}

$\Rightarrow \quad 4\pi r^2 = 154$

$\Rightarrow \quad 4\times\frac{22}{7}\times r^2 = 154$

$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{154\times 7}{4\times 22}$

$\therefore \quad r = \sqrt{\frac{7\times 7}{4}} = 3.5$ सेमी

अत: गोले की त्रिज्या = **3.5 सेमी।** उत्तर

7. चन्द्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक-चौथाई है। इन दोनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : माना पृथ्वी का व्यास R है, तब चन्द्रमा का व्यास $\frac{R}{4}$ होगा।

तब चन्द्रमा और पृथ्वी की त्रिज्याएँ क्रमश: $\frac{R}{8}$ और $\frac{R}{2}$ होंगी।

उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात

$$= \frac{4\pi\left(\frac{R}{8}\right)^2}{4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{64}\times\frac{4}{1} = \frac{1}{16} = 1 : 16$$

अत: चन्द्रमा और पृथ्वी के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात = **1 : 16.** उत्तर

8. एक अर्द्धगोलाकार कटोरा 0.25 सेमी मोटी स्टील से बना है। इस कटोरे की आन्तरिक त्रिज्या 5 सेमी है। कटोरे का बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : आंतरिक त्रिज्या, $r = 5$ सेमी

स्टील की मोटाई = 0.25 सेमी

∴ बाहरी त्रिज्या, $R = (r +$ स्टील की मोटाई) मीटर

$= (5 + 0.25)$ सेमी = 5.25 सेमी

∴ बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi R^2$

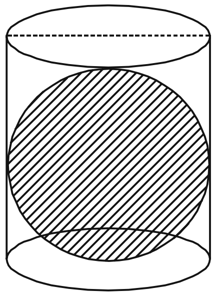
$$= \left(2\times\frac{22}{7}\times 5.25\times 5.25\right) \text{ सेमी}^2$$

$= 173.25$ सेमी^{2}

अत: कटोरे का बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 173.25$ सेमी^{2}। उत्तर

9. एक लम्बवृत्तीय बेलन त्रिज्या r वाले एक गोले को पूर्णतया घेरे हुए है। ज्ञात कीजिए :



(i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल,

(iii) ऊपर (i) और (ii) में प्राप्त क्षेत्रफलों का अनुपात।

हल : ∵ चित्र में लम्बवृत्तीय बेलन गोले को पूर्णतया घेरे हुए है।

∴ माना बेलन की त्रिज्या (R) = गोले की त्रिज्या (r)

(i) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

(ii) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi RH$

चित्र से स्पष्ट है कि बेलन की ऊँचाई $H = 2r$

∴ बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi R\ (2r)$

$= 2\pi r\ (2r)$, क्योंकि $R = r$

$= 4\pi r^2$

अत: **बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4\pi r^2$** उत्तर

(iii) उक्त दोनों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात

$= 4\pi r^2 : 4\pi r^2 =$ **1 : 1.** उत्तर

प्रश्नावली 11.3

1. उस लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी :

(i) त्रिज्या 6 सेमी और ऊँचाई 7 सेमी है।

(ii) त्रिज्या 3.5 सेमी और ऊँचाई 12 सेमी है।

हल : (i) लम्बवृत्तीय शंकु की त्रिज्या $(r) = 6$ सेमी तथा ऊँचाई $(h) = 7$ सेमी।

$\therefore$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (6)^2 \times 7$ घन सेमी $= 264$ घन सेमी।

अत: लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन **264 घन सेमी।** उत्तर

(ii) लम्बवृत्तीय शंकु की त्रिज्या $(r) = 3.5$ सेमी

$= \frac{7}{2}$ सेमी

शंकु की ऊँचाई $(h) = 12$ सेमी

$\therefore$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 12$ घन सेमी $= 154$ घन सेमी

अत: लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन

= 154 घन सेमी। उत्तर

2. शंकु के आकार के उस बर्तन की लीटरों में धारिता ज्ञात कीजिए, जिसकी :

(i) त्रिज्या 7 सेमी और तिर्यक ऊँचाई 25 सेमी है।

(ii) ऊँचाई 12 सेमी और तिर्यक ऊँचाई 13 सेमी है।

हल : (i) यहाँ, $r = 7$ सेमी और $l = 25$ सेमी

माना शंकु की ऊँचाई h सेमी है, तब

$\therefore \quad l^2 = h^2 + r^2$

$h^2 = l^2 - r^2 = 25^2 - 7^2$

$= 625 - 49 = 576$

$\therefore \quad h = \sqrt{576} = 24$ सेमी

शंक्वाकार बर्तन का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24\right)$ सेमी^{3} $= 1232$ सेमी^{3}

$\therefore$ बर्तन की धारिता (लीटर में)

$= \left(\frac{1232}{1000}\right)$ लीटर **= 1·232 लीटर।** उत्तर

(ii) यहाँ, $h = 12$ सेमी और $l = 13$ सेमी

माना शंकु के आधार की त्रिज्या r सेमी है।

तब, $r^2 = l^2 - h^2 = 13^2 - 12^2$

$= 169 - 144 = 25$

$\Rightarrow \quad r = \sqrt{25} = 5$ सेमी

शंक्वाकार बर्तन का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 5 \times 5 \times 12\right)$ सेमी^{3} $= \frac{2200}{7}$ सेमी^{3}

$\therefore$ लीटर में बर्तन की धारिता (आयतन)

$= \left(\frac{2200}{7} \times \frac{1}{1000}\right)$ लीटर

($\because$ 1000 घन सेमी = 1 लीटर)

$= \mathbf{\frac{11}{35}}$ **लीटर।** उत्तर

3. एक शंकु की ऊँचाई 15 सेमी है। यदि इसका आयतन 1570 सेमी^{3} है, तो इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ प्रयोग कीजिए।)

हल : यहाँ, $h = 15$ सेमी और आयतन $= 1570$ सेमी^{3}

माना शंकु के आधार की त्रिज्या r सेमी है।

$\therefore$ आयतन $= 1570$ सेमी^{3}

$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\pi r^2 h = 1570$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} \times 3.14 \times r^2 \times 15 = 1570$

$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{1570}{3 \cdot 14 \times 5} = 100$

$\therefore \quad r = \sqrt{100} = 10$

अत: शंकु के आधार की त्रिज्या **10 सेमी** है। उत्तर

4. यदि 9 सेमी ऊँचाई वाले एक लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन 48π सेमी^{3} है। इसके आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल : शंकु की ऊँचाई $(h) = 9$ सेमी

शंकु का आयतन $= 48\pi$ सेमी^{3}

$\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) = 48\pi$ सेमी^{3}

$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times 9 = 48\pi$

$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{48\pi \times 3}{\pi \times 9}$ सेमी^{2} $= 16$ सेमी^{2}

$\therefore \quad r = \sqrt{16}$ सेमी $= 4$ सेमी

$\Rightarrow \quad 2r = 2 \times 4$ सेमी $= 8$ सेमी

अत: शंकु के आधार का व्यास = **8 सेमी।** उत्तर

5. ऊपरी व्यास 3.5 मीटर वाले शंकु के आकार का एक गड्ढा 12 मीटर गहरा है। इसकी धारिता किलोलीटर में कितनी है ?

हल : गड्ढे का ऊपरी व्यास = 3.5 मीटर

$\therefore$ गड्ढे की त्रिज्या $(r) = \frac{3.5}{2}$ मीटर

$= \frac{35}{2\times10}$ मीटर $= \frac{7}{4}$ मीटर

गड्ढे की ऊँचाई (h) = 12 मीटर

$\therefore$ गड्ढे का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}\times12$ मीटर^3 $= \frac{154}{4}$ मीटर^3

$\because$ 1मी^{3} = 1000 लीटर = 1 किलो लीटर

$\therefore$ 38.5 मी^{3} = 38.5 किलो लीटर

अत: गढ्ढे की धारिता = 38.5 किलो लीटर **उत्तर**

6. एक लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन 9856 सेमी^{3} है। यदि इसके आधार का व्यास 28 सेमी है, तो ज्ञात कीजिए :

(i) शंकु की ऊँचाई (ii) शंकु की तिर्यक ऊँचाई (iii) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल।

हल : (i) शंकु के आधार का व्यास = 28 सेमी

$\therefore$ त्रिज्या $= r = \frac{28}{2}$ सेमी = 14 सेमी

शंकु का आयतन = 9856 सेमी^{3}

$\Rightarrow$ $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ = 9856 सेमी^{3}

$\Rightarrow$ $\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times14\times14\times h = 9856$

$\Rightarrow$ $h = \frac{9856\times3\times7}{22\times14\times14}$ = 48 सेमी

अत: शंकु की ऊँचाई = **48 सेमी।** **उत्तर**

(ii) माना शंकु की तिर्यक ऊँचाई l है, तब

$l^2 = h^2 + r^2 = 48^2 + 14^2$

$= 2304 + 196 = 2500$

$\therefore$ $l = \sqrt{2500} = 50$ सेमी

अत: शंकु की तिर्यक् ऊँचाई = 50 सेमी। **उत्तर**

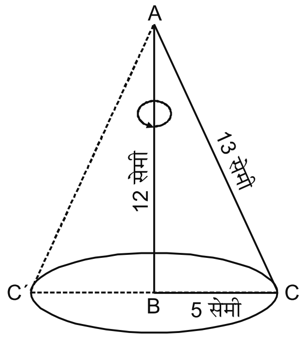
(iii) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi rl$

$= \frac{22}{7}\times14\times50$

= **2,200 सेमी^{2}।** **उत्तर**

7. भुजाओं 5 सेमी, 12 सेमी और 13 सेमी वाले एक समकोण त्रिभुज ABC को भुजा 12 सेमी के परित: घुमाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ ΔABC को 12 सेमी वाली भुजा AB के परित: घुमाए जाने पर प्राप्त निम्नलिखित शंक्वांकार ठोस आकृति प्राप्त होती हैं जिसमें



$\therefore$ शंकु की ऊँचाई AB = 12 सेमी

और शंकु की त्रिज्या CB = शंकु की दूसरी भुजा

= 5 सेमी

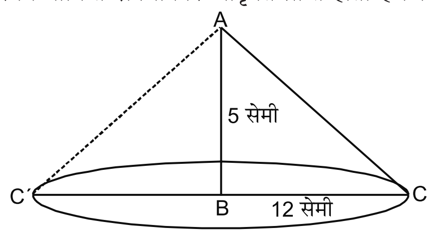
$\therefore$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\times\pi\times(5)^2\times12 = 100\pi$ घन सेमी।

अत: प्राप्त शंकु का आयतन = **100π घन सेमी।** **उत्तर**

8. यदि प्रश्न 7 के त्रिभुज ABC को यदि भुजा 5 सेमी के परित: घुमाया जाए, तो इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। प्रश्न 7 और 8 में प्राप्त किए गए दोनों ठोसों के आयतनों का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ ΔABC को 5 सेमी वाले भुजा के परित: घुमाए जाने पर निम्नांकित शंक्वाकार आकृति प्राप्त होती है जिसमें



$\therefore$ शंकु की ऊँचाई (h) = 5 सेमी

और आधार की त्रिज्या (r) = दूसरी भुजा

= 12 सेमी

$\therefore$ शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\times\pi\times(12)^2\times5$ घन सेमी

$= 240\pi$ घन सेमी

अत: प्राप्त शंकु का आयतन = 240π घन सेमी।

तब प्रश्न 7 व प्रश्न 8 से प्राप्त ठोसों के आयतनों का अनुपात **= 100π : 240π**

= 5 : 12. उत्तर

9. गेहूँ की एक ढेरी 10.5 मीटर व्यास और 3 मीटर ऊँचाई वाले एक शंकु के आकार की है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए। इस ढेरी को वर्षा से बचाने के लिए केनवास से ढका जाना है। वांछित केनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : गेहूँ की ढेरी से बने शंकु की ऊँचाई (h) = 3 मीटर

तथा आधार का व्यास = 10.5 मीटर = $\frac{21}{2}$ मीटर

$\therefore$ आधार की त्रिज्या (r) = $\frac{21}{2\times2} = \frac{21}{4}$ मीटर

$\therefore$ गेहूँ की ढेरी (शंकु) का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{21}{4}\times\frac{21}{4}\times3$ घन मीटर

$= \frac{693}{8}$ घन मीटर

= 86.625 घन मीटर।

ढेरी से प्राप्त शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) = $\sqrt{r^2+h^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{21}{4}\right)^2+(3)^2}$

$= \sqrt{\frac{441}{16}+9} = \sqrt{\frac{441+144}{16}}$

$= \sqrt{\frac{585}{16}} = \frac{1}{4}\times\sqrt{585}$

$= \frac{1}{4}\times24.186$

= 6.046 मीटर = 6.05 मीटर

$\therefore$ ढेरी को ढकने के लिए आवश्यक केनवास = गेहूँ की ढेरी का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \pi rl$

$= \frac{22}{7}\times\frac{21}{4}\times6.05$

= 99.825 वर्ग मीटर

अत: गेहूँ की ढेरी (शंकु) को ढकने के लिए आवश्यक केनवास का क्षेत्रफल

= 99.825 वर्ग मीटर। उत्तर

प्रश्नावली 11.4

1. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या निम्नलिखित हैं :

(i) 7 सेमी, (ii) 0.63 मीटर।

हल : (i) गोले की त्रिज्या (r) = 7 सेमी

$\therefore$ गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(7)^3$ घन सेमी

$= \frac{4}{3}\times22\times7\times7$ घन सेमी

$= \frac{4312}{3}$ घन सेमी

$= 1437\frac{1}{3}$ घन सेमी

$\therefore$ गोले का आयतन = **1437.33 घन सेमी।** उत्तर

(ii) गोले की त्रिज्या (r) = 0.63 मीटर

$\therefore$ गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(0\cdot63)^3$ घन मीटर

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times0\cdot63\times0\cdot63\times0\cdot63$ घन मीटर

= 1.047816 घन मीटर।

= 1.05 घन मीटर लगभग

अत: गोले का आयतन = **1.05 घन मीटर (लगभग)।** उत्तर

2. उस ठोस गोलाकार गेंद द्वारा हटाए गए (विस्थापित) पानी का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसका व्यास निम्नलिखित है :

(i) 28 सेमी, (ii) 0.21 मीटर।

हल : (i) गोले का व्यास = 28 सेमी

$\therefore$ गोले की त्रिज्या (r) = $\frac{28}{2}$ = 14 सेमी

गोले का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$

गोले द्वारा हटाए गए पानी का आयतन = गोले का आयतन

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(14)^3$ घन सेमी

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times14\times14\times14$ घन सेमी

$= \frac{34,496}{3}$ घन सेमी

अत: गोला पानी हटाएगा = 11,498.67 घन सेमी।

उत्तर

(ii) गोले का व्यास = 0.21 मीटर

$\therefore$ गोले की त्रिज्या $(r) = \frac{0.21}{2}$ मीटर

= 0.105 मीटर

गोले द्वारा हटाए गए पानी का आयतन =

गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(0.105)^3$ घन मीटर

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times0.0011576$ घन मीटर

= 0.004851 घन मीटर लगभग

अत: गोले द्वारा हटाए गए पानी का आयतन

= **0.004851 घन मीटर लगभग। उत्तर**

3. धातु की एक गेंद का व्यास 4.2 सेमी है। यदि इस धातु का घनत्व 8.9 ग्राम प्रति घन सेमी है तो इस गेंद का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

हल : गेंद का व्यास = 4.2 सेमी

$\therefore$ गेंद की त्रिज्या $(r) = \frac{4.2}{2} = 2.1$ सेमी

$\therefore$ गेंद का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(2.1)^3$ घन सेमी

$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times2.1\times2.1\times2.1$ घन सेमी

= 4 × 22 × 0.1 × 2.1 × 2.1 घन सेमी

= 38.808 घन सेमी

$\therefore$ गेंद का द्रव्यमान = गेंद का आयतन × गेंद की धातु का घनत्व

= 38.808 घन सेमी × 8.9 ग्राम/घन सेमी

= 345.3912 ग्राम

= 345.39 ग्राम लगभग

अत: गेंद का द्रव्यमान = **345.39 ग्राम (लगभग)।**

उत्तर

4. चन्द्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक-चौथाई है। चन्द्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन की कौन-सी भिन्न है?

हल : माना पृथ्वी का व्यास $4D$ मीटर है।

$\therefore$ पृथ्वी की त्रिज्या $(R) = 2D$ मीटर

प्रश्नानुसार, चन्द्रमा का व्यास $= \frac{1}{4}$ पृथ्वी का व्यास

$\therefore$ चन्द्रमा का व्यास $= \frac{1}{4}\times4D = D$ मीटर

$\therefore$ चन्द्रमा की त्रिज्या $r = \frac{D}{2}$ मीटर

तब चन्द्रमा का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3$, क्योंकि $r = \frac{D}{2}$

$= \frac{\pi D^3}{6}$ घन मीटर

और पृथ्वी का आयतन $= \frac{4}{3}\pi R^3$

$= \frac{4}{3}\pi(2D)^3$, क्योंकि $R = 2D$

$= \frac{32\pi D^3}{3}$ घन मीटर

$$\therefore \frac{\text{चन्द्रमा का आयतन}}{\text{पृथ्वी का आयतन}} = \frac{\frac{\pi D^3}{6}}{\frac{32\pi D^3}{3}}$$

$$= \frac{\pi D^3}{6}\times\frac{3}{32\pi D^3} = \frac{1}{64}$$

अत: चन्द्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन का

$= \mathbf{\frac{1}{64}}$ **भाग** है। उत्तर

5. व्यास 10.5 सेमी वाले एक अर्द्ध-गोलाकार कटोरे में कितने लीटर दूध आ सकता है?

हल : कटोरे का व्यास = 10.5 सेमी

$\therefore$ कटोरे की त्रिज्या $(r) = \frac{10.5}{2}$ सेमी

$= \frac{105}{20}$ सेमी $= \frac{21}{4}$ सेमी

अर्द्धगोलाकार कटोरे का आयतन

$$= \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times\left(\frac{21}{4}\right)^3$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{21}{4}\times\frac{21}{4}\times\frac{21}{4}$$

$= \frac{4851}{16}$ घन सेमी

= 303.1875 घन सेमी = 303 घन सेमी

$= \frac{303}{1000}$ लीटर (क्योंकि 1 लीटर = 1000 घन सेमी)

= 0.303 लीटर

अत: कटोरे में **0.303 लीटर दूध** आ सकता है। **उत्तर**

6. एक अर्द्धगोलाकार टंकी 1 सेमी मोटी एक लोहे की चादर से बनी है। यदि इसकी आंतरिक त्रिज्या 1 मीटर है, तो इस टंकी के बनाने में लगे लोहे का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : माना अर्द्धगोलाकार टंकी की बाह्य त्रिज्या = R तथा भीतरी त्रिज्या = r

R = (1 + 0.01) मी., (मोटाई = 1 सेमी = 0.01 मीटर)

= 1.01 मी.

और r = 1 मीटर

टंकी में प्रयुक्त लोहे का आयतन

= बाहरी आयतन − भीतरी आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$$

$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times[(1.01)^3 - (1)^3]$ मीटर^3

$= \frac{44}{21}\times(1.030301 - 1)$ मीटर^3

$= \left(\frac{44}{21}\times 0.030301\right)$ मीटर^3

= 0.06348 मीटर^3 (लगभग)

अत: टंकी में लगे लोहे का आयतन

= **0.06348 मीटर^3**। **उत्तर**

7. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 सेमी^{2} है।

हल : माना गोले की त्रिज्या r सेमी है।

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 154 सेमी^{2}

$\Rightarrow \quad 4\pi r^2 = 154$

$\Rightarrow \quad \frac{154\times 7}{4\times 22} = 12.25 \quad = 154$

$\Rightarrow \quad r^2 = \sqrt{12.25} = 3.5$

$\therefore \quad r = \sqrt{12.25} = 3.5$ सेमी

गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \left(\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\times 3.5\right)$ सेमी^{3}

$= \frac{539}{3}$ सेमी^{3} = $179\frac{2}{3}$ सेमी^{3}

= 179.67 सेमी^{3} (लगभग)

अत: गोले का आयतन लगभग **179.67 घन सेमी** है। **उत्तर**

8. किसी भवन का गुम्बद एक अर्द्धगोले के आकार का है। अन्दर से इसमें सफेदी कराने में ₹ 498.96 व्यय हुए। यदि सफेदी कराने की दर ₹ 2 प्रति वर्ग मीटर है, तो ज्ञात कीजिए :

(i) गुम्बद का आन्तरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) गुम्बद के अन्दर की हवा का आयतन।

हल : (i) ₹ 2 प्रति वर्ग मीटर की दर से सफेदी कराने का व्यय = ₹ 498.96

$\therefore$ गुम्बद का आन्तरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \frac{498.96}{2}$ मी^{2} = **249.48 मीटर^2**। **उत्तर**

(ii) अर्द्धगोले का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल

$\therefore \quad 2\pi r^2 = 249.48$

$\Rightarrow \quad 2\times\frac{22}{7}\times r^2 = 249.48$

$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{249.48\times 7}{2\times 22}$

$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{24948\times 7}{2\times 22\times 100} = \frac{567\times 7}{100}$

$\Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{567\times 7}{100}}$

$\therefore \quad r = \sqrt{\frac{9\times 9\times 7\times 7}{10\times 10}}$ मीटर

$= \frac{9\times 7}{10}$ मी. $= \frac{63}{10}$ मीटर

अब गुम्बद का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{63}{10}\times\frac{63}{10}\times\frac{63}{10}$ मी^{3}

= 523.908 मीटर^3 523.9 लगभग

अत: गुम्बद के अन्दर हवा का आयतन

= **523.9 मीटर^3 (लगभग)**। **उत्तर**

9. लोहे के सत्ताइस ठोस गोलों को पिघलाकर, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r है और पृष्ठ का क्षेत्रफल S है, एक बड़ा गोला बनाया जाता है, जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल S' है। ज्ञात कीजिए :

(i) नए गोले की त्रिज्या r'

(ii) S और S' का अनुपात।

हल : (i) गोले की त्रिज्या r और पृष्ठीय क्षेत्रफल S है, तब

$$S = 4\pi r^2 \qquad ...(1)$$

और गोले का आयतन $(V) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ सभी 27 गोलों का आयतन $(V') = 27 \times \frac{4}{3}\pi r^3$

$= 36\pi r^3$

$\therefore$ नव निर्मित गोले का आयतन $= 36\pi r^3$

$\because$ नव निर्मित गोले की त्रिज्या r' है; अत: इस गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r'^3$

तब, $\frac{4}{3}\pi r'^3 = 36\pi r^3 \Rightarrow r'^3 = 27r^3 = (3r)^3$

$\Rightarrow \qquad r' = 3r$

अत: नव निर्मित गोले की त्रिज्या $3r$ है (जहाँ r छोटे गोलों की त्रिज्या है)। **उत्तर**

(ii) नव निर्मित गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $S' = 4\pi r'^2$

$= 4\pi(3r)^2$

$\therefore \qquad S' = 36\pi r^2 \qquad ...(2)$

समीकरण (1) व (2) से,

अपेक्षित अनुपात $= \frac{S}{S'} = \frac{4\pi r^2}{36\pi r^2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

अपेक्षित अनुपात = **1 : 9.** **उत्तर**

10. दवाई का एक कैप्सूल 3.5 मिमी व्यास का एक गोला (गोली) है। इस कैप्सूल को भरने के लिए कितनी दवाई (मिमी³ में) की आवश्यकता होगी ?

हल : कैप्सूल का व्यास = 3.5 मिमी

$\therefore$ कैप्सूल की त्रिज्या $(r) = \frac{3.5}{2}$ मिमी

$= \frac{35}{20}$ मिमी $= \frac{7}{4}$ मिमी

$\therefore$ कैप्सूल का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4}$ मिमी³

$= \frac{539}{24}$ मिमी³

= 22.46 मिमी³ (लगभग)

अत: कैप्सूल को भरने के लिए दवाई की आवश्यकता होगी = **22.46 मिमी³।** **उत्तर**

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. यदि एक बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल 1760 सेमी.² तथा त्रिज्या 14 सेमी. है, तो उसकी ऊँचाई लिखिए।

हल : बेलन का वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh$

$\Rightarrow \qquad 1760 = 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times h$

$= 2 \times 22 \times 2 \times h = 88 \times h$

बेलन की ऊँचाई 20 सेमी है।

प्रश्न 2. एक लम्बवृत्तीय शंकु के आधार की त्रिज्या 6 सेमी. तथा ढालू ऊँचाई 28 सेमी. है। शंकु के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल लिखिए।

हल : शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi rl = \frac{22}{7} \times 6 \times 28$

$= 22 \times 6 \times 4 = 528$

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 528 सेमी² है।

प्रश्न 3. एक बेलनाकार बोतल का व्यास 10 सेमी है। यदि उसमें 14 सेमी ऊँचाई तक द्रव भरा हो, तो द्रव का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : बेलन का आयतन $= \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times 5 \times 5 \times 14$

$= 22 \times 25 \times 2 = 44 \times 25 = 1100.$

द्रव का आयतन 1100 सेमी³ है।

प्रश्न 4. एक टैन्ट शंकु के आकार का है, जिसके आधार की त्रिज्या 7 मीटर तथा ऊँचाई 5 मीटर है। टैन्ट में लगने वाले कपड़े का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : तिर्यक ऊँचाई (l) ज्ञात करन होगी :

$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} \approx 8.6$ मी.

टेन्ट के कपड़े का क्षेत्रफल

= शंकु का वक्र पृष्ठय (πrl)

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 8.6 = 22 \times 8.6 = 189.2$

कपड़े का क्षेत्रफल लगभग 189.2 मीटर² होगा।

प्रश्न 5. एक धातु के गोले की त्रिज्या 14 सेमी है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$$= 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$$

$$= 4 \times 22 \times 2 \times 14 = 176 \times 14 = 2464$$

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 2464 सेमी^{2} है।

प्रश्न 6. 2 सेमी त्रिज्या वाले एक बेलनाकार गिलास की ऊँचाई $\frac{6}{\pi}$ सेमी है, तो उसमें कितना पानी आयेगा?

हल : पानी का आयतन = बेलन का आयतन $(\pi r^2 h)$

$$= \pi \times (2)^2 \times \frac{6}{\pi} = \pi \times 4 \times \frac{6}{\pi}$$

$$= \frac{\pi \times 4 \times 6}{\pi} = 24 = 24 \text{ सेमी}^3$$

प्रश्न 7. एक शंकु के आधार का व्यास 12 मीटर तथा तिर्यक ऊँचाई 10 मीटर है। शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : सम्पूर्ण पृष्ठ $= \pi r(l + r)$

$$= \frac{22}{7} \times 6(10 + 6) = \frac{22}{7} \times 6 \times 16$$

$$= \frac{2112}{7} \approx 301.71 = 301.71 \text{ मीटर}^2$$

प्रश्न 8. यदि एक शंकु का वक्रपृष्ठ 2035 वर्ग सेमी तथा आधार का व्यास 35 सेमी हो तो शंकु की तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : $\because \quad \pi rl = 2035$

$$\Rightarrow \quad \frac{22}{7} \times 17.5 \times l = 2035$$

$$\Rightarrow \quad 22 \times 2.5 \times l = 2035$$

$$\Rightarrow \quad l = \frac{2035}{55} = 37.$$

प्रश्न 9. लम्ब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई 8 सेमी तथा आधार की त्रिज्या 6 सेमी है। उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $h = 8$ सेमी, $r = 6$ सेमी

$$\text{आयतन} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 8$$

$$= \frac{22}{7} \times 2 \times 6 \times 8 = \frac{2112}{7} \approx 301.71 \text{ सेमी}^3$$

प्रश्न 10. एक शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 1884.4 मीटर^2 है तथा इसकी तिर्यक ऊँचाई 12 मीटर है। इसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : $\pi rl = 1884.4$

$$\Rightarrow \quad 3.14 \times r \times 12 = 1884.4$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1884.4}{37.68} = 50 \text{ मीटर}$$

प्रश्न 11. एक खोखला गोलीय शैल 2 सेमी मोटा है। यदि इसकी बाह्य त्रिज्या 8 सेमी है तो इसमें लगी धातु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : धातु का आयतन $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}(8^3 - 6^3) = \frac{88}{21}(512 - 216)$$

$$= \frac{88}{21} \times 296 = \frac{26048}{21} \approx 1240.38 \text{ सेमी}^3$$

प्रश्न 12. समान व्यास वाले एक शंकु तथा एक अर्द्धगोले के समतल पृष्ठों को मिलाकर एक ठोस निर्मित किया है, यदि ठोस का सम्पूर्ण आयतन 80π घन सेमी तथा शंकु की ऊँचाई 7 सेमी है तो आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल : माना त्रिज्या $= r$, शंकु की ऊँचाई $(h) = 7$ सेमी

ठोस का आयतन = शंकु का आयतन + अर्द्धगोले का आयतन

$$\Rightarrow \quad 80\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow \quad 80 = \frac{1}{3}r^2(7) + \frac{2}{3}r^3$$

$$\Rightarrow \quad 240 = 7r^2 + 2r^3$$

$$\Rightarrow \quad r^2(7 + 2r) = 240$$

यहाँ हिट-एंड-ट्रायल से जाँचे **:** यदि $r = 4$, तो $16(7 + 8) = 16 \times 15 = 240$ संतुष्ट होता है।

अत: त्रिज्या $r = 4$ सेमी

आधार का व्यास $2r = 8$ सेमी है।

प्रश्न 13. एक शंकु की ऊँचाई 28 सेमी तथा आधार की त्रिज्या 21 सेमी है। उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : $r = 21, h = 28$

$$\text{तिर्यक ऊँचाई } (l) = \sqrt{21^2 + 28^2} = \sqrt{441 + 784}$$

$$= \sqrt{1225} = 35 \text{ सेमी}$$

$$\text{वक्र पृष्ठ } (\pi rl) : \frac{22}{7} \times 21 \times 35$$

$$= 22 \times 3 \times 35 = 2310 \text{ सेमी}^2$$

$$\text{सम्पूर्ण पृष्ठ } (\pi r(l + r)) : \frac{22}{7} \times 21(35 + 21)$$

$$= 66 \times 56 = 3696 \text{ सेमी}^2$$

आयतन $\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right) : \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 28$

$= 22 \times 21 \times 28 = 12936$ सेमी^{3}

प्रश्न 14. एक शंकु, एक अर्धगोला व बेलन एक ही आधार व ऊँचाई पर बने हैं। उनके आयतनों का अनुपात लिखिए।

हल : अनुपात = शंकु : अर्द्धगोला : बेलन

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^2 h$ ($h = r$ रखने पर)

$= \frac{1}{3}\pi r^3 : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^3 = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1$

$= 1 : 2 : 3$

प्रश्न 15. यदि एक गोले का आयतन 38808 घन सेमी है, तो गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3 = 38808$

$\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3 = 38808$

$\Rightarrow \quad r^3 = 441 \times 21 = 9261$

$\Rightarrow \quad r = 21$ सेमी

पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 88 \times 63 = 5544$

प्रश्न 16. 10 सेमी त्रिज्या के धातु के गोले से समान त्रिज्या के 8 गोले बनाए जाते हैं। इस प्रकार बने प्रत्येक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : बड़े गोले का आयतन = 8 × छोटे गोले का आयतन

$\Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi(10)^3 = 8 \times \frac{4}{3}\pi r^3$

$\Rightarrow \quad 1000 = 8r^3 = 5$ सेमी

छोटे गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल $= 4\pi(5)^2 = 100\pi$

प्रत्येक छोटे गोले का क्षेत्रफल 100π सेमी^{2} है।

प्रश्न 17. एक शंकु के आकार के बर्तन की त्रिज्या 10 सेमी और ऊँचाई 18 सेमी है। यह पानी से पूरा भरा हुआ है। इसे 5 सेमी त्रिज्या के एक बेलनाकार बर्तन में उडेला जाता है। बेलनाकार बर्तन में पानी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : पानी का आयतन समान रहेगा।

शंकु का आयतन = बेलन का आयतन

$\frac{1}{3}\pi R_1^2 H_1 = \pi R_2^2 H_2$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} \times (10)^2 \times 18 = (5)^2 \times H_2$

$\Rightarrow \quad 600 = 25 \times H_2 \quad \Rightarrow \quad H_2 = \frac{600}{25} = 24$

बेलनाकार बर्तन में पानी की ऊँचाई 24 सेमी होगी।

प्रश्न 18. 9 सेमी त्रिज्या के धातु के गोले को पिघलाकर 3 सेमी त्रिज्या और 6 सेमी ऊँचाई के कितने शंकु बनाये जा सकते हैं?

हल : शंकुओं की संख्या $(n) = \frac{\text{गोले का आयतन}}{\text{एक शंकु का आयतन}}$

$\Rightarrow \quad n = \frac{\frac{4}{3}\pi(9)^3}{\frac{1}{3}\pi(3)^2(6)} = \frac{4\times9\times9\times9}{3\times3\times6}$

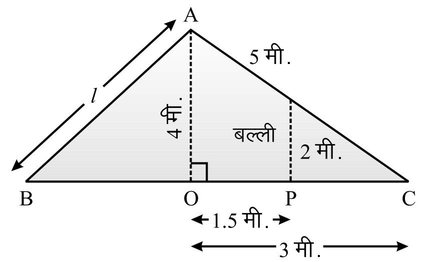
$= \frac{2916}{54} = 54$ शंकु

प्रश्न 19. सीसे के एक गोले की त्रिज्या 5 सेमी है। इससे 5 मि.मी. त्रिज्या की कितनी गोलियाँ बनाई जा सकती हैं?

हल : बड़ा $R = 5$ सेमी = 50 मिमी, छोटा $r = 5$ मिमी

संख्या $= \frac{\text{बड़े गोले का आयतन}}{\text{छोटे गोले का आयतन}}$

$= \frac{R^3}{r^3} = \left(\frac{50}{5}\right)^3 = (10)^3 = 1000$ गोलियाँ



बल्ली से त्रिज्या (समरूप Δ)

$\frac{1.5}{2} = \frac{r}{4} \Rightarrow r = 3$ मीटर

तिर्यक् ऊँचाई AC $= \sqrt{OA^2 + OC^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ मीटर

आवश्यक कपड़ा (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल)

$\pi r l = \frac{22}{7} \times 3 \times 5$

$= \frac{330}{7} = 47.14$ वर्ग मीटर।

❑ ❑

12 सांख्यिकी

प्रश्नावली 12.1

1. एक संगठन ने पूरे विश्व में 15—44 (वर्षों में) की आयु वाली महिलाओं में बीमारी और मृत्यु के कारणों का पता लगाने के लिए किए गए सर्वेक्षण से निम्नलिखित आँकड़े (% में) प्राप्त किए :

क्र.सं.	कारण	महिला मृत्युदर
1.	जनन स्वास्थ्य अवस्था	31.8
2.	तंत्रिका मनोविकारी अवस्था	25.4
3.	क्षति	12.4
4.	हृद य वाहिका अवस्था	4.3
5.	श्वसन अवस्था	4.1
6.	अन्य कारण	22.0

(i) ऊपर दी गई सूचनाओं को आलेखीय रूप में निरूपित कीजिए।

(ii) कौन-सी अवस्था पूरे विश्व की महिलाओं के खराब स्वास्थ्य और मृत्यु का बड़ा कारण है?

(iii) अपनी अध्यापिका की सहायता से ऐसे दो कारणों का पता लगाने का प्रयास कीजिए, जिनकी ऊपर (ii) में मुख्य भूमिका रही हो।

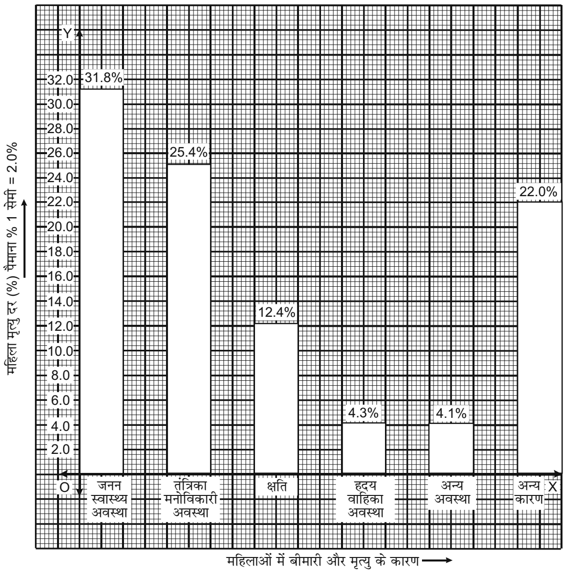
हल : (i) दी गई सूचनाओं का आलेखीय निरूपण :

बनाने की विधि :

(1) X-अक्ष पर विभिन्न बीमारी तथा मृत्यु के कारणों को सुविधानुसार समान अन्तराल पर प्रदर्शित किया जाता है। X-अक्ष पैमाना = 1 कारण = 1 सेमी

(2) X-अक्ष पर बीमारी अथवा मृत्यु का प्रतिशत प्रदर्शित किया जाता है।

पैमाना = 1 सेमी = 2%



(ii) जनन स्वास्थ्य अवस्था का प्रतिशत (31.8) सर्वाधिक है। अत: यह पूरे विश्व की महिलाओं के खराब स्वास्थ्य और मृत्यु का सबसे बड़ा कारण है।

(iii) (a) पुनरुत्पादी स्वास्थ्य अवस्था, (b) अपरिपक्व आयु में प्रजनन।

2. भारतीय समाज के विभिन्न क्षेत्रों में प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की (निकटतम दस तक की) संख्या के आँकड़े नीचे दिए गए हैं :

क्र.सं.	क्षेत्र	प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की संख्या
1.	अनुसूचित जाति	940
2.	अनुसूचित जनजाति	970
3.	गैर-अनुसूचित जाति/जनजाति	920
4.	पिछड़े जिले	950
5.	गैर-पिछड़े जिले	920
6.	ग्रामीण	930
7.	शहरी	910

(i) ऊपर दी गई सूचनाओं को एक दण्ड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

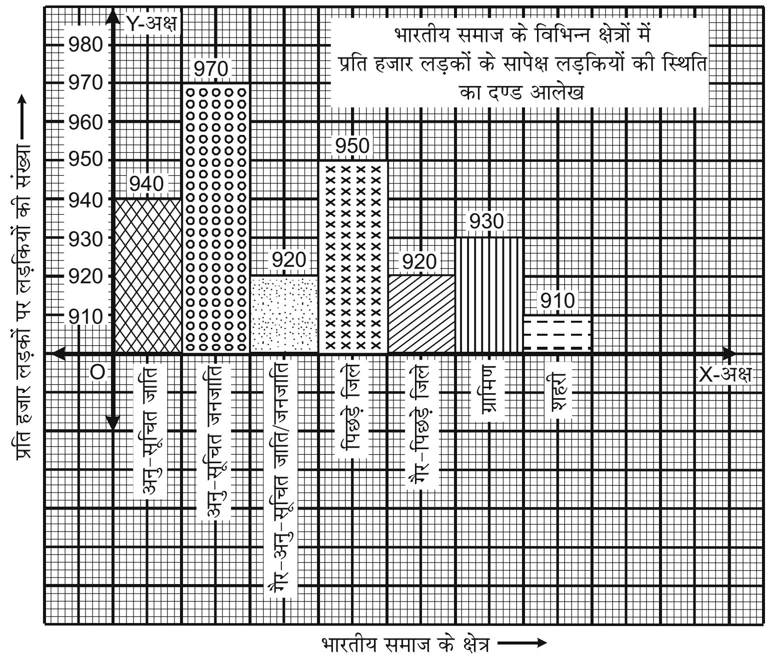
(ii) कक्षा में चर्चा करके बताइए कि आप इस आलेख से कौन-कौन से निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

हल : (i) दण्ड चित्र (आलेख) बनाने की विधि :

(1) X-अक्ष पर विभिन्न क्षेत्रों को प्रदर्शित करते हैं किन्हीं दो क्षेत्रों के मध्य समान-अन्तराल रखा जाता है।

पैमाना, 1 क्षेत्र = 1 सेमी

(2) Y-अक्ष पर लड़कियों की संख्या को प्रदर्शित करते हैं। प्रतिच्छेद बिन्दु O को 900 मानकर, पैमाना निर्धारित करते हैं। Y-अक्ष पर पैमाना, 1 सेमी = 10 लड़कियाँ इस प्रकार O से ऊपर प्रत्येक सेमी पर 910, 920 ...... आदि अंकित करते हैं।



(ii) आलेख के निष्कर्ष :

(1) अनुसूचित जनजाति में (प्रति हजार लड़कों पर) लड़कियों की संख्या सर्वाधिक है।

(2) गैर-पिछड़े जिलों की अपेक्षा पिछड़े जिलों में (प्रति हजार लड़कों पर) लड़कियों की संख्या अधिक है।

(3) शहरी क्षेत्रों की अपेक्षा ग्रामीण क्षेत्रों में (प्रति हजार लड़कों पर) लड़कियों की संख्या अधिक है।

3. एक राज्य की विधान सभा के चुनाव में विभिन्न राजनीतिक पार्टियों द्वारा जीती गई सीटों के परिणाम नीचे दिए गए हैं :

राजनीतिक पार्टी	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
जीती गई सीटें	75	55	37	29	10	37

(i) मतदान के परिणामों को निरूपित करने वाला एक दण्ड आलेख खींचिए।

(ii) किस राजनीतिक पार्टी ने अधिकतम सीटें जीती हैं?

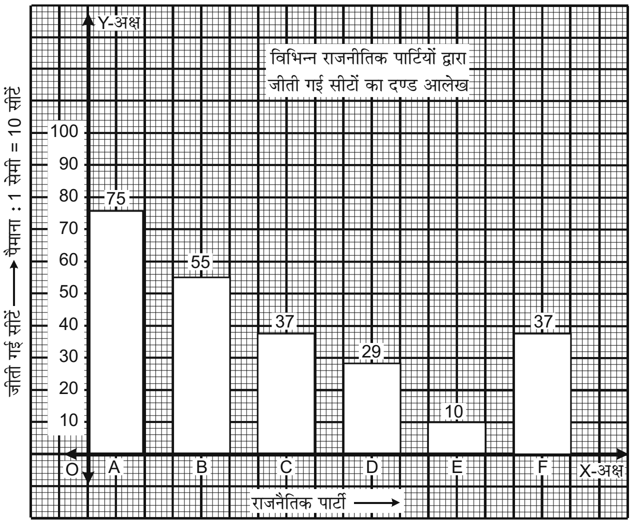
हल : (i) दण्ड आलेख बनाने की विधि :

(1) X-अक्ष पर विभिन्न राजनीतिक पार्टियों को प्रदर्शित करते हैं। दो पार्टियों के मध्य समान अन्तर रखते हैं।

X-अक्ष पर पैमाना, 1 पार्टी = 1 सेमी.

(2) Y-अक्ष पर जीती गयी सीटें प्रदर्शित की जाती हैं।

Y-अक्ष पर पैमाना, 10 सीटें = 1 सेमी.



(ii) A पार्टी द्वारा जीती गयी सीटों से सम्बन्धित आयत की ऊँचाई सर्वाधिक है।

अत: A पार्टी से अधिकतम सीटें जीती हैं। **उत्तर**

4. एक पौधे की 40 पत्तियों की लम्बाइयाँ एक मिलीमीटर तक शुद्ध मापी गई हैं और प्राप्त आँकड़ों को निम्नलिखित सारणी में निरूपित किया गया है :

लम्बाई (मिलीमीटर में)	पत्तियों की संख्या
118 – 126	**3**
127 – 135	**5**
136 – 144	**9**
145 – 153	**12**
154 – 162	**5**
163 – 171	**4**
172 – 180	**2**

(i) दिए हुए आँकड़ों को निरूपित करने वाला एक आयत चित्र खींचिए।

(ii) क्या इन्हीं आँकड़ों को निरूपित करने वाला कोई अन्य उपयुक्त आलेख है ?

(iii) क्या यह सही निष्कर्ष है कि 153 मिलीमीटर लम्बाई वाली पत्तियों की संख्या सबसे अधिक है? क्यों?

हल : (i) आयत चित्र बनाने की विधि :

(1) दिये गये आँकड़ों के वर्ग असतत हैं। इसका सबसे बड़ा दोष यह है कि इसमें उन पौधों की लम्बाइयाँ शामिल नहीं हैं जिनकी लम्बाई पूर्णांक अर्थात् 126.5 मिमी अथवा 153.5 मिमी है। इस दोष के निवारण हम इन वर्गों को सतत वर्गों में बदलेंगे। एक वर्ग की निम्न सीमा और उससे पहले वर्ग की उच्च सीमा का अन्तर 1 है अर्थात् इस बारम्बारता वितरण को सतत बनाने के लिए हम प्रत्येक निम्न सीमा में से $\frac{h}{2}=\frac{1}{2}=0.5$ घटायेंगे और

प्रत्येक उच्च सीमा में 0.5 जोड़ेंगे।

(2) X-अक्ष व Y-अक्ष खींचते हैं।

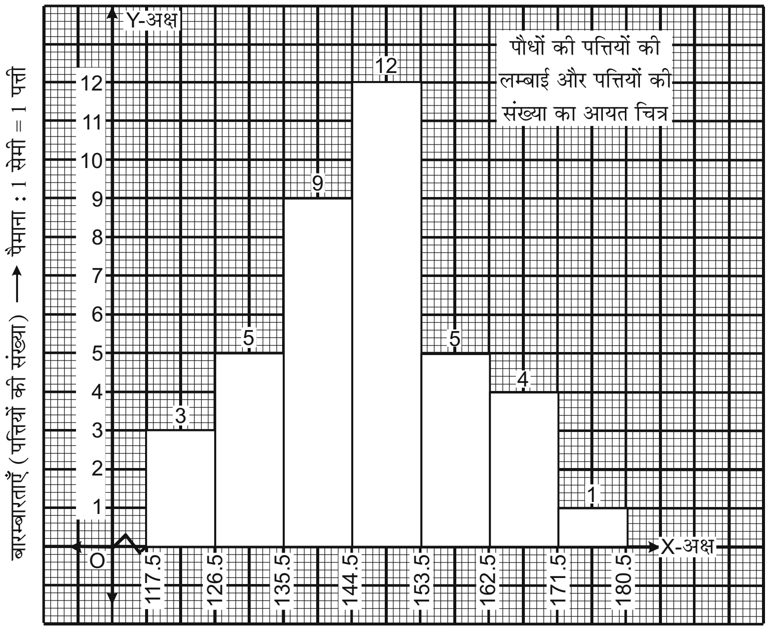
(3) X-अक्ष पर पत्तियों की लम्बाइयाँ प्रदर्शित करते हैं। पैमाना, 1 सेमी = 9 मिमी। दो क्रमागत वर्गों के बीच रिक्त स्थान नहीं छोड़ते हैं।

(4) Y-अक्ष पर पत्तियों की संख्या प्रदर्शित करते हैं।

Y-अक्ष पर पैमाना = 1 सेमी = 1 पत्ती।

पत्तियों की लम्बाइयाँ		पत्तियों की संख्या (बारम्बारता)
असतत वर्ग	सतत वर्ग	
118 – 126	117.5 – 126.5	3
127 – 135	126.5 – 135.5	5
136 – 144	135.5 – 144.5	9
145 – 153	144.5 – 153.5	12
154 – 162	153.5 – 162.5	5
163 – 171	162.5 – 171.5	4
172 – 180	171.5 – 180.5	1

(5) आयतों के ऊपरी सिरों पर सम्बन्धित वर्गों की बारम्बारताएँ अंकित करते हैं।



पत्तियों की लम्बाइयाँ ⟶ पैमाना : 1 सेमी = 9 मिमी

(ii) हाँ, इन आँकड़ों को बारम्बारता बहुभुज द्वारा भी निरूपित किया जा सकता है।

(iii) वर्ग अन्तराल (144.5—153.5) मिमी के अन्तर्गत 153 मिमी आता है; अत: इस वर्ग की बारम्बारता सबसे अधिक है। यह निष्कर्ष सही नहीं है क्योंकि 153 मिमी लम्बाई की पत्तियों की संख्या सर्वाधिक है तथा यह अधिकतम बारम्बारता पूरे वर्ग का प्रतिनिधित्व करती है न कि मात्र 153 मिमी का।

5. नीचे की सारणी में 400 निऑन लैम्पों के जीवन-काल दिए गए हैं :

जीवन-काल (घण्टों में)	लैम्पों की संख्या
300 – 400	14
400 – 500	56
500 – 600	60
600 – 700	86
700 – 800	74
800 – 900	62
900 – 1000	48

(i) एक आयत चित्र की सहायता से दी हुई सूचनाओं को निरूपित कीजिए।

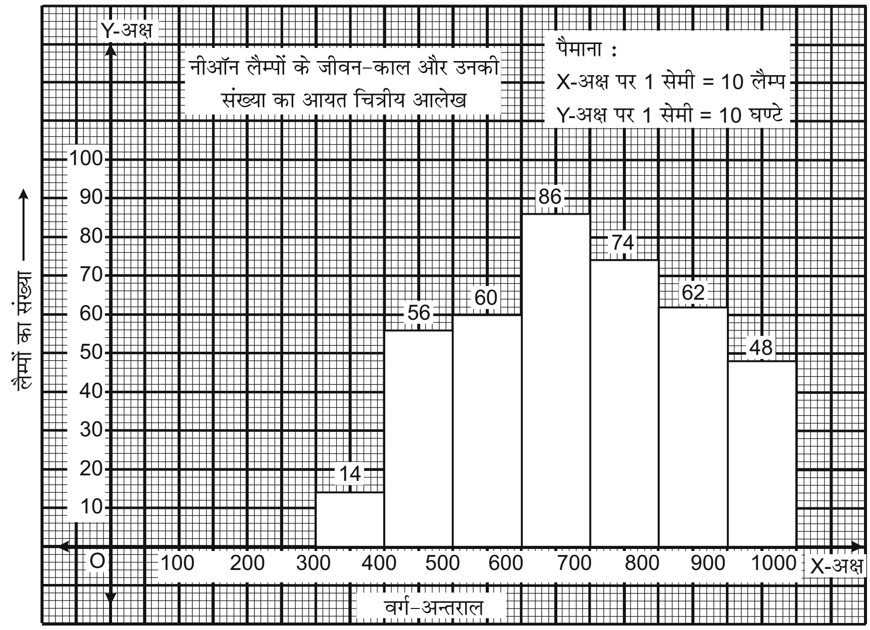
(ii) कितने लैम्पों के जीवन-काल 700 घण्टों से अधिक हैं ?

हल : (i) बनाने की विधि :

(1) X-अक्ष पर जीवन-काल को प्रदर्शित करते हैं।

(2) Y-अक्ष पर लैम्पों की संख्या को प्रदर्शित करते हैं।

(3) वर्गों की चौड़ाई को आधार मानकर और लैम्पों की संख्या को ऊँचाई मानकर लिए गए पैमानों के सापेक्ष आयत चित्र आलेख बनाते हैं।



(ii) वर्ग (700—800), (800—900),व (900—1000), वर्गों के जीवन काल 700 से अधिक घण्टों का प्रतिनिधित्व करते हैं।

∴ 700 घण्टों से अधिक जीवन-काल वाले लैम्पों की संख्या

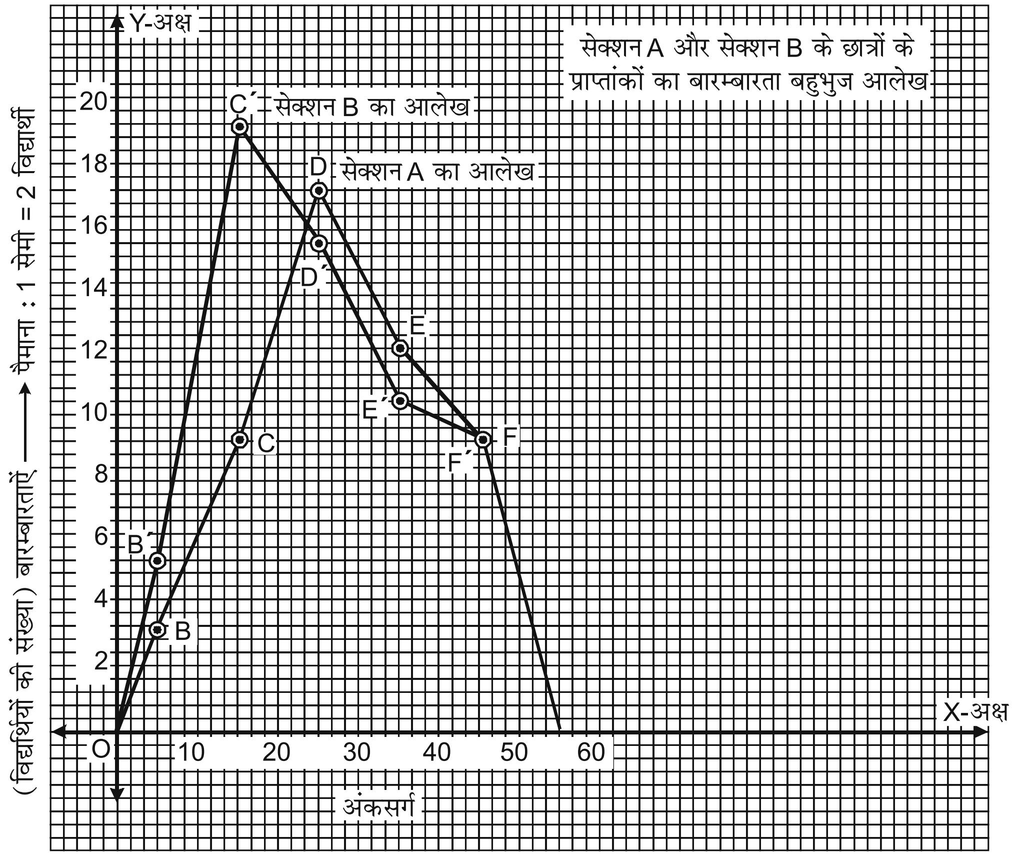
= सम्बन्धित वर्षों की बारम्बारताओं का योग

= 74 + 62 + 48 = 184 लैम्प। **उत्तर**

6. नीचे की दो सारणियों में प्राप्त किए गए अंकों के अनुसार दो सेक्शनों के विद्यार्थियों का बण्टन दिया गया है :

अंक	बारम्बारता	अंक	बारम्बारता
0 – 10	3	0 – 10	5
10 – 20	9	10 – 20	19
20 – 30	17	20 – 30	15
30 – 40	12	30 – 40	10
40 – 50	9	40 – 50	9

दो बारम्बारता बहुभुजों की सहायता से एक ही आलेख पर दोनों सेक्शनों के विद्यार्थियों के प्राप्तांक निरूपित कीजिए। दोनों बहुभुजों का अध्ययन करके दोनों सेक्शनों के निष्पादनों की तुलना कीजिए।



हल : बारम्बारता बहुभुज बनाने की विधि :

(1) X-अक्ष पर दिए हुए अंकों के वर्ग अन्तराल प्रदर्शित किए गए हैं।

यहाँ पैमाना 1 सेमी = 10 अंक

(2) Y-अक्ष पर पैमाना : 1 सेण्टीमीटर = 2 विद्यार्थियों की संख्या (बारम्बारता प्रदर्शित की गयी है।)

(3) प्रत्येक बारम्बारता को y अक्ष के निर्धारित अंक के सामने तथा X-अक्ष के संगत वर्ग अन्तराल के मध्य में बिन्दु रूप में प्रदर्शित किया गया है।

(4) दोनों सेक्शनों से प्राप्त बिन्दुओं को क्रमश: मुक्त हस्त से मिलाने पर दो वक्र प्राप्त होते हैं। जो X-अक्ष के साथ अभीष्ट बहुभुज प्राप्त होते हैं।

दोनों सेक्शन A हेतु बहुभुज = $B\ C\ D\ E\ F$

सेक्शन B हेतु बहुभुज = $B'\ C'\ D'\ E'\ F'$

वर्ग	वर्ग चिन्ह या वर्ग का मध्य बिंदु	अंक	बारम्बारता		
		सेक्शन A के लिए	सेक्शन B के लिए	सेक्शन A के लिए	सेक्शन B के लिए
0 – 10	5	3	5	$B(5, 3)$	$B'(5, 5)$
10 – 20	15	9	19	$C(15, 9)$	$C'(15, 19)$
20 – 30	25	17	15	$D(25, 17)$	$D'(25, 15)$
30 – 40	35	12	10	$E(35, 12)$	$E'(35, 10)$
40 – 50	45	9	9	$F(45, 9)$	$F'(45, 9)$

दोनों आलेखों की तुलना : दोनों आलेखों में सेक्शन A के उच्च स्तर के बिन्दु D, E, F तथा सेक्शन B के समान स्तरीय बिन्दु D', E', F' से अधिक ऊँचाई पर हैं।

अत: सेक्शन A का परिणाम सेक्शन B की अपेक्षा उत्तम है।

7. एक क्रिकेट मैच में दो टीमों A और B द्वारा प्रथम 60 गेंदों में बनाए गए रन नीचे दिए गए हैं :

गेंदों की संख्या	टीम A	टीम B
1 – 6	**2**	**5**
7 – 12	**1**	**6**
13 – 18	**8**	**2**
19 – 24	**9**	**10**
25 – 30	**4**	**5**
31 – 36	**5**	**6**
37 – 42	**6**	**3**
43 – 48	**10**	**4**
49 – 54	**6**	**8**
55 – 60	**2**	**10**

बारम्बारता बहुभुजों की सहायता से एक ही आलेख पर दोनों टीमों के आँकड़े निरूपित कीजिए।

हल : बारम्बारता बहुभुज आलेख बनाने की विधि :

(1) दिए हुए वर्ग असतत हैं। प्रत्येक वर्ग की निम्न सीमा में 0.5 घटाकर और उपरी सीमा में 0.5 जोड़कर इन्हें सतत बना लेते हैं

असतत वर्ग अन्तराल	सतत् वर्ग अन्तराल	वर्ग चिन्ह मध्य बिन्दु (मूल)	टीम A (कोटि)	टीम B (कोटि)	टीम A के लिए बिन्दु के निर्देशांक	टीम B के लिए बिन्दु के निर्देशांक
1 – 6	0.5 – 6.5	3.5	2	5	$B(3.5, 2)$	$B'(3.5, 2)$
7 – 12	6.5 – 12.5	9.5	1	6	$C(9.5, 1)$	$C'(9.5, 6)$
13 – 18	12.5 – 18.5	15.5	8	2	$D(15.5, 8)$	$D'(15.5, 2)$
19 – 24	18.5 – 24.5	21.5	9	10	$E(21.5, 9)$	$E'(21.5, 10)$
25 – 30	24.5 – 30.5	27.5	4	5	$F(27.5, 4)$	$F'(27.5, 5)$
31 – 36	30.5 – 3635	33.5	5	6	$G(33.5, 5)$	$G'(33.5, 6)$
37 – 42	36.5 – 42.5	39.5	6	3	$H(39.5, 6)$	$H'(39.5, 3)$
43 – 48	42.5 – 48.5	45.5	10	4	$I(45.5, 10)$	$I'(45.5, 4)$
49 – 54	48.5 – 54.5	51.5	6	2	$J(51.5, 6)$	$J'(51.5, 8)$
55 – 60	54.5 – 60.5	57.5	2	10	$K(27.5, 2)$	$K'(27.5, 10)$

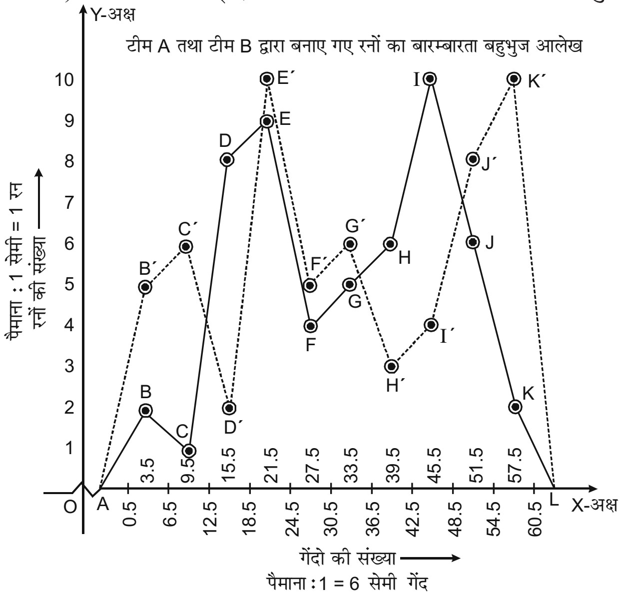
(2) X-अक्ष पर गेंदों की संख्या को प्रदर्शित करते हैं। पैमाना, 1 सेमी = 5 गेंद

(3) तालिका में दिए गए बिन्दुओं को B (3.5, 2), C, (9.1, 1)..... आदि को अंकित करके मिलाने पर क्रमश: बहुभुज टीम $A - B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I\ J\ K$ तथा टीम $B - B'\ C'\ D'\ E'\ F'\ G'\ H'\ I'\ J'\ K'$ **प्राप्त होते हैं।**

(4) Y-अक्ष पर बनाए गए रनों को प्रदर्शित करते हैं। Y-अक्ष पर पैमाना, 1 सेमी = 1 रन

(5) प्रथम वर्ग (0.5—6.5) के ठीक पूर्व एक कल्पित वर्ग लेकर उसका मध्य-बिन्दु A ज्ञात किया।

(6) अन्तिम वर्ग (54.5—60.5) के ठीक पश्चात् एक कल्पित वर्ग लेकर उसका मध्य-बिन्दु L ज्ञात किया।



8. एक पार्क में खेल रहे विभिन्न आयु वर्गों के बच्चों की संख्या का एक यादृच्छिक सर्वेक्षण (random survey) करने पर निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त हुए :

आयु (वर्षों में)	बच्चों की संख्या
1 – 2	**5**
2 – 3	**3**
3 – 5	**6**
5 – 7	**12**
7 – 10	**9**
10 – 15	**10**
15 – 17	**4**

ऊपर दिए आँकड़ों को निरूपित करने वाला एक आयत चित्र खींचिए।

हल : आयत चित्र बनाने की विधि :

(1) X-अक्ष पर उचित पैमाना लेकर आयु (वर्षों में) अंकित कर, माना पैमाना, 1 सेमी = 1 वर्ष

(2) Y-अक्ष पर उचित पैमाना लेकर बच्चों की संख्या अंकित कर, माना पैमाना, 1 सेमी = 1 बच्चा

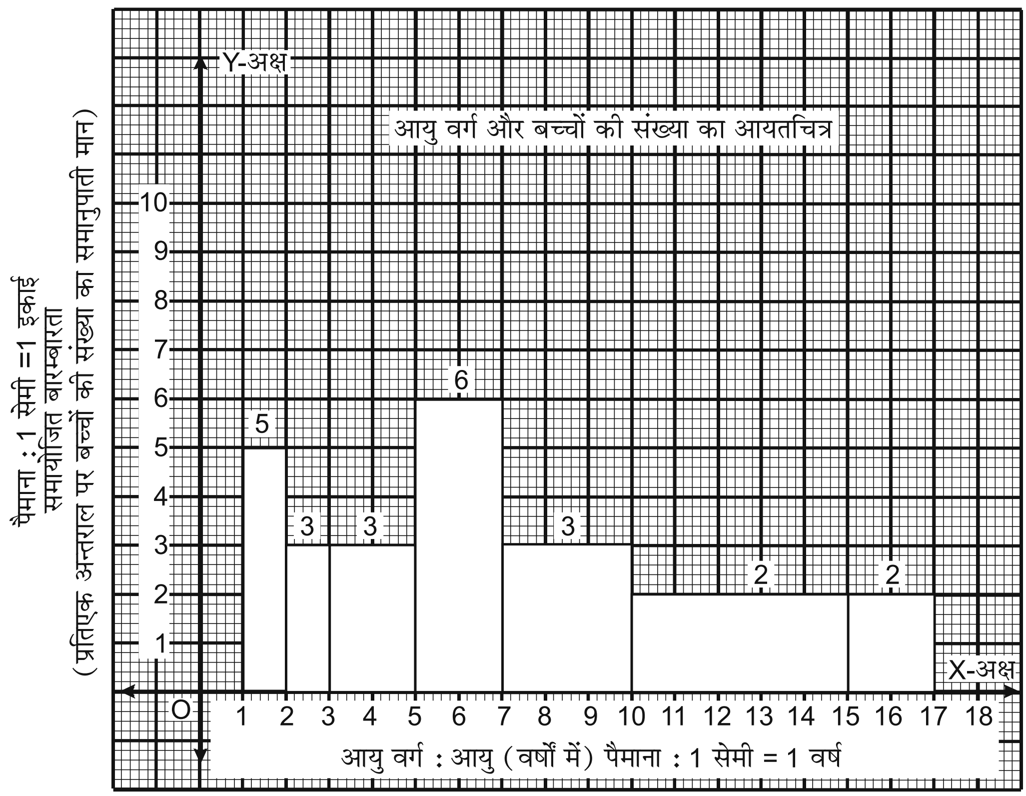
(3) वर्ग का अन्तराल भिन्न-भिन्न है। समायोजित बारम्बारता ज्ञात करनी होगी।

(4) एक वर्ग के लिए समायोजित बारम्बारता = $\dfrac{\text{न्यूनतम वर्ग का अन्तर}}{\text{इसी वर्ग का अन्तर}} \times$ इसकी बारम्बारता

यहाँ न्यूनतम वर्ग का अन्तर = 2 – 1 = 1 है।

(5) वर्गों की चौड़ाई के सापेक्ष आयतों की लम्बाई के लिए एक सारणी निम्नवत् बनाई :

आयु वर्षों	बारम्बारता	वर्ग की चौड़ाई (वर्ग का अंतर)	समायोजित बारम्बारता (आयत की लम्बाई)
1 – 2	5	1	$\frac{1}{1} \times 5 = 5$
2 – 3	3	1	$\frac{1}{1} \times 3 = 3$
3 – 5	6	2	$\frac{1}{2} \times 6 = 3$
5 – 7	12	2	$\frac{1}{2} \times 12 = 6$
7 – 10	9	3	$\frac{1}{3} \times 9 = 3$
10 – 15	10	5	$\frac{1}{5} \times 10 = 2$
15 – 17	4	2	$\frac{1}{2} \times 4 = 2$



9. एक स्थानीय टेलीफोन निर्देशिका से 100 कुलनाम (surname) यदृच्छया लिए गए और उनसे अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्न बारम्बारता बंटन प्राप्त किया गया :

वर्णमाला के अक्षरों की संख्या	कुल नामों की संख्या
1 – 4	**6**
4 – 6	**30**
6 – 8	**44**
8 – 12	**16**
12 – 10	**4**

(i) दी हुई सूचनाओं को निरूपित करने वाला एक आयत चित्र खींचिए।

(ii) वह वर्ग-अन्तराल बताइए जिसमें अधिकतम संख्या में कुल नाम हैं।

हल : (i) बनाने की विधि :

(a) यहाँ वर्ग आकार अलग-अलग हैं। इसलिए समायोजित बारम्बारता की गणना करेंगे।

$$\text{एक वर्ग के लिए समायोजित बारम्बारता} = \frac{\text{न्यूनतम वर्ग - अन्तराल}}{\text{इस वर्ग का वर्ग - अन्तराल (वर्ग की चौड़ाई)}} \times \text{इसकी बारम्बारता}$$

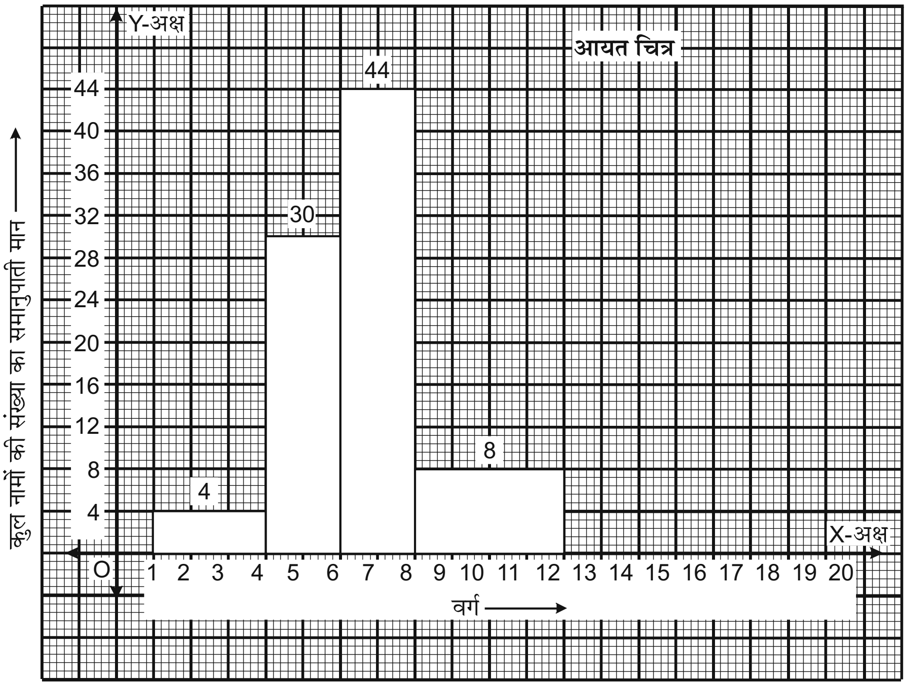
इस प्रश्न में न्यूनतम वर्ग-अन्तराल = 6 – 4 = 2 है।

अत: हमें निम्नलिखित समायोजित बारम्बारता प्राप्त होगी।

वर्ग	बारम्बारता	वर्ग की चौड़ाई (वर्ग का अंतर)	समायोजित बारम्बारता (आयत की लम्बाई)
1 – 4	6	3	$\frac{2}{3} \times 6 = 4$
4 – 6	30	2	$\frac{2}{2} \times 30 = 30$
6 – 8	44	2	$\frac{2}{2} \times 44 = 44$
8 – 12	16	4	$\frac{2}{4} \times 16 = 8$
12 – 20	4	8	$\frac{2}{8} \times 4 = 1$

(b) X-अक्ष पर पैमाना : 1 सेमी = 2 इकाई मानकर वर्ग-अन्तराल को अंकित करते हैं।

(c) Y-अक्ष पर पैमाना : 1 सेमी = 4 इकाई मात्रक मानकर आयत लम्बाई (समायोजित बारम्बारता) को अंकित करते हैं।



(ii) अधिकतम कुलनाम वर्ग–अन्तराल 6–8 में पड़ते हैं।

अन्य महत्वपूर्ण प्रश्न

अतिलघु / लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. आयत चित्र का उपयोग करते हुए निम्न बारम्बारता बंटन का बारम्बारता बहुभुज बनाइए।

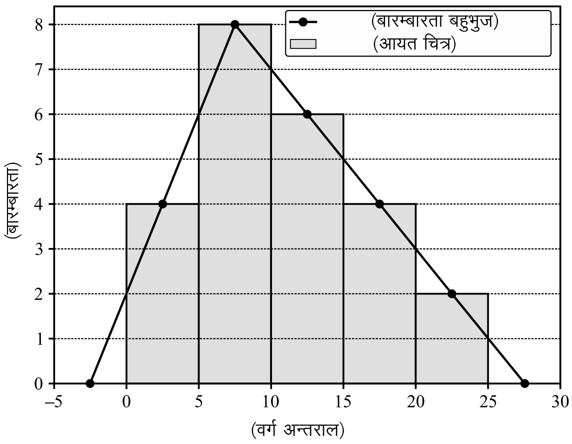
वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
0–5	**4**
5–10	**8**
10–15	**6**
15–20	**4**
20–25	**2**

हल : इस प्रश्न में हमें पहले आयत चित्र बनाना है और फिर उसके माध्यम से बारम्बारता बहुभुज बनाना है।

इसके लिए हमें प्रत्येक वर्ग अन्तराल का 'वर्ग चिन्हन' या मध्य-बिंदु ज्ञात करना सहायक होता है, जो आयत के ऊपरी हिस्से का बीच का पॉइंट होगा।

सारणी :

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	वर्ग चिन्ह
0 – 5	4	2.5
5 – 10	8	7.5
10 – 15	6	12.5
15 – 20	4	17.5
20 – 25	2	22.5



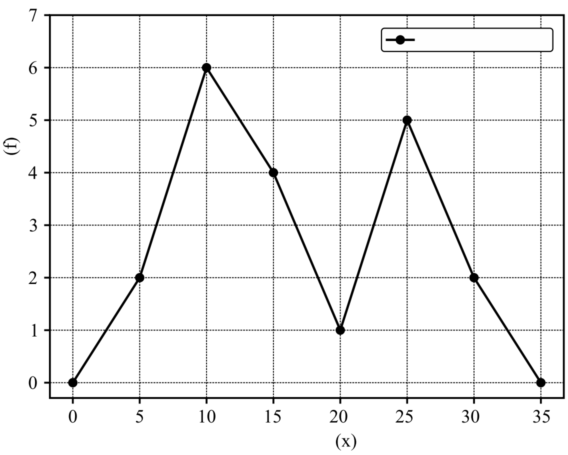
प्रश्न 2. निम्न बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिए—

विचर (x)	बारम्बारता (f)
5	**2**
10	**6**
15	**4**
20	**1**
25	**5**
30	**2**

हल : यहाँ वर्ग अन्तराल नहीं दिया गया है, बल्कि विचर (x) के सीधे मान दिए गए है। इसलिए, हम सीधे बिंदुओं को ग्राफ पर अंकित करेंगे।

बिंदु जो ग्राफ पर दर्शाने हैं ($x - f$) :

(5, 2), (10, 6), (15, 4), (20, 1), (25, 5), (30, 2)



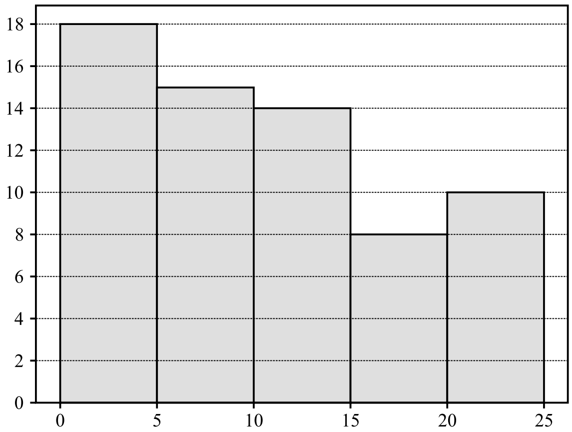
प्रश्न 3. निम्न बारम्बारता सारणी से आयत चित्र बनाइए—

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
0–5	**18**
5–10	**15**
10–15	**14**
15–20	**8**
20–25	**10**

हल : यह एक सतत वर्गीकृत बारम्बारता बंटन है। इसमें केवल आयत बनाने हैं।

सारणी :

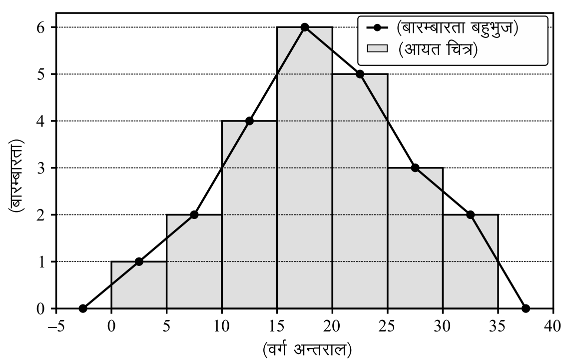
वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
0–5	18
5–10	15
10–15	14
15–20	8
20–25	10



प्रश्न 4. निम्न बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र की सहायता से बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिए—

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
0–5	**1**
5–10	**2**
10–15	**4**
15–20	**6**
20–25	**5**
25–30	**3**
30–35	**2**

हल : वर्ग अन्तराल 0 – 5 से 30 – 35 तक हैं।

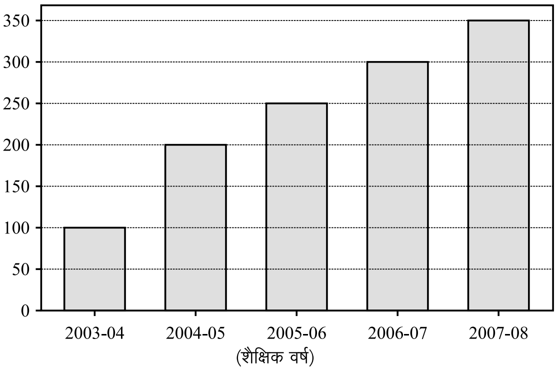


प्रश्न 5. एक विद्यालय में कक्षा IX में अध्ययन करने वाले शैक्षिक वर्ष अनुसार विद्यार्थियों की संख्या निम्नानुसार है—

शैक्षिक वर्ष	विद्यार्थियों की संख्या
2003-04	100
2004-05	200
2005-06	250
2006-07	300
2007-08	350

दिए गए आँकड़ों का दण्ड-आलेख बनाइए।

हल : शैक्षिक वर्ष (x-अक्ष) और विद्यार्थियों की संख्या (y-अक्ष)।

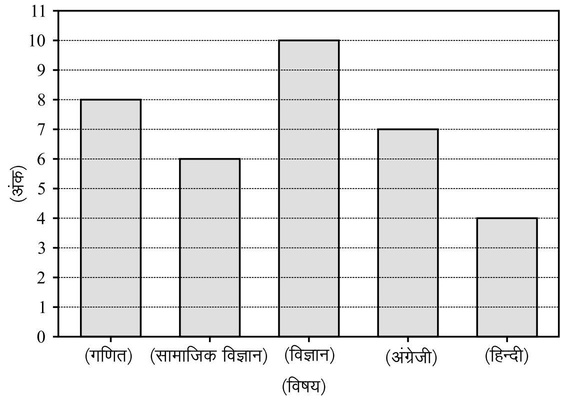


प्रश्न 6. एक विद्यार्थी द्वारा विषयवार प्राप्तांक निम्नानुसार है—

विषय	प्राप्तांक
गणित	8
सामाजिक विज्ञान	6
विज्ञान	10
अंग्रेजी	7
हिन्दी	4

दिए गए आँकड़ों का दण्ड आलेख बनाइए।

हल : विषय (x-अक्ष) और प्राप्तांक (y-अक्ष)।



❑ ❑